Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Б. Нилсон, С. Нордебу, Вывод квантового правила для вероятности детектирования с помощью броуновского движения в пространстве классических полей, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 342–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 03:43:30

© 2013 г. А. Ю. Хренников*, Б. Нилсон*, С. Нордебу*

ВЫВОД КВАНТОВОГО ПРАВИЛА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Правило Борна получено из классической теории случайных волн в комбинации с использованием детекторов порогового типа. Рассматривается модель классических случайных волн, взаимодействующих с классическими детекторами и воспроизводящих правило Борна. Сложные проблемы интерпретации основ квантовой механики не обсуждаются. Читателю предоставляется выбор между “слабой интерпретацией” – классическим математическим моделированием квантового процесса измерения – и “сильной интерпретацией” – классической волновой моделью реальных квантовых (в действительности субквантовых) явлений.

Ключевые слова: основания квантовой механики, правило Борна, вероятность детектирования, классическое случайное поле, пороговые детекторы.

DOI: 10.4213/tmf8416

Посвящается памяти Василия Сергеевича Владимирова

1. ВВЕДЕНИЕ

Основное правило, связывающее квантовую теорию с экспериментом, а именно правило Борна, было постулировано Максом Борном без какого бы то ни было физического обоснования, просто как замечание на первой странице его статьи [1]. Несмотря на многочисленные попытки, для этого правила не удалось получить удовлетворительного вывода из “естественным образом обоснованных принципов”¹⁾. В настоящей работе мы выводим это правило из классической теории случайных волн с использованием детекторов порогового типа. Мы покажем, что случайные

¹⁾“По-видимому, можно прийти к заключению, что до настоящего времени для правила Борна вообще не было дано приемлемого вывода, однако отсюда не следует, что такой вывод невозможен в принципе” [2] (ср. [3]–[5]). Подчеркнем, что недавно интерес к представлению квантовой механики как выводимой теории значительно возрос (см., например, [3]–[43]).

*International Center for Mathematical Modelling in Physics and Cognitive Sciences, Linnaeus University, Växjö, Sweden. E-mail: andrei.khrennikov@lnu.se

волны естественной формы²⁾ в процессе взаимодействия с классическими детекторами производят щелчки детекторов, статистика которых определяется правилом Борна.

Хотя наш подход можно использовать для случайного поля любого вида и, в принципе, вводя классические поля, соответствующие массивным квантовым частицам (“предквантовые поля” [6], [14]), можно воспроизвести правило Борна для таких полей (частиц), в настоящей работе мы ограничим наши конкретные физические приложения детектированием электромагнитных сигналов. Поэтому мы моделируем процесс детектирования фотонов в рамках классической волновой теории. Мы не задаемся здесь сложными проблемами интерпретации основ квантовой механики (см. [6]). Мы оставляем читателю выбор: или рассматривать нашу математическую модель как естественную классическую метафору процесса квантового детектирования фотонов, или выводить фундаментальные заключения из возможности построения такой модели.

В разделе 2 представлена простая и естественная модель классического детектора, основным элементом которого является “классический атом” – заряженная частица S (классический аналог электрона) в отрицательном потенциале $V_0(x)$. Распространяющаяся электромагнитная волна взаимодействует с “классическим атомом”. В результате, в зависимости от энергии волны, частица S может или высвободиться из “классического атома”, или нет. Событие высвобождения частицы рассматривается как щелчок детектора.

Заметим, что один из фундаментальных экспериментов, отделяющий (квази)классические полевые модели от квантово-механических, – это эксперимент Гранжье [15], подтвердивший предсказание квантовой механики об отсутствии совпадения щелчков. Это дискретный вариант “корпускулярной части” эксперимента по интерференции, демонстрирующего, что фотоны обладают свойствами не только волны, но и частицы. Напомним основные следствия эксперимента по интерференции. Обычно считается, что интерференционную картину в этом эксперименте можно объяснить как интерференцию классических волн (см., например, [16]). Но, насколько нам известно, классическая волновая модель, отображающая квантовую интерференционную картину (накапливающиеся точки на регистрационном экране), в литературе отсутствует. Обычно представление ограничивается (тривиальным) выводом интерференционной картины интенсивностей волн (см., например, [16]). Поэтому модель, представленная в настоящей работе, является (насколько нам известно) первой моделью, которая воспроизводит структуру квантовой интерференционной картины как гистограмму накопления точек. Перейдем теперь к “корпускулярной части” эксперимента. Поместим два детектора непосредственно за каждой из двух щелей (и между экраном со щелями и экраном, где происходит детектирование). Квантовая механика предсказывает, что для однофотонного источника не будет совпадений в детектировании. Эксперимент подтверждает это предсказание (по крайней мере, эксперимент типа эксперимента Гранжье [15]). С другой стороны, общеизвестно, что (квази)классические полевые модели всегда предсказывают относительно много совпадающих щелчков (по сравнению с числом щелчков на каждом отдельном детекторе). В разделе 5 мы покажем, что наша простая классическая стохастическая

²⁾ Броуновское движение в комплексном гильбертовом пространстве – винеровский процесс $w(s, x, \omega)$ со значениями в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$.

модель соответствует предсказаниям квантовой теории и эксперимента. Ключевым моментом является использование детекторов порогового типа.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах [17], [18]. В работе [17] было показано, что “предквантовый стохастический процесс” имеет хитрую временную структуру; в частности, он сильно сингулярен, его нельзя представить как стохастический процесс со значениями в гильбертовом пространстве, его траектории являются траекториями со значениями в пространстве распределений [19] на $\mathbb{R}^3$. В работе [18] был введен простой “предквантовый стохастический процесс” – комбинация винеровского процесса и стационарного гауссова процесса. Однако там рассматривался только конечномерный случай, т.е. модель в работе [18] описывала измерение только внутренних степеней свободы (таких как поляризация), но не пространственных. В настоящей работе для описания пространственных степеней свободы мы рассмотрим винеровский процесс со значениями в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^3)$. При этом теория оказывается сложнее математически. Еще одно отличие от работы [18] состоит в том, что здесь мы рассматриваем физическую модель классического детектора порогового типа (см. раздел 2).

В настоящей работе предлагается модель *предквантовых* (стохастических) процессов в *физическом пространстве-времени*. Подход, основанный на использовании пространственно-временной картины вместо абстрактного гильбертова пространства, играет важную роль в демистификации квантовой механики. Подчеркнем, что даже в стандартной квантовой теории некоторые фундаментальные квантовые явления (которые представляют собой типичные “квантовые загадки”) можно прояснить, используя пространственно-временную картину для квантовых процессов³⁾ (см., например, [20]–[25]).

Наконец, подчеркнем, что в нашей модели экспериментальные технические детали, такие как, например, роль порога в процессе детектирования, подняты на уровень теоретических основ модели (ср. [44]).

2. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРОГОВОГО ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

Классический аналог атома с одним электроном выглядит следующим образом: частица S (классический аналог электрона) с отрицательным зарядом, скажем z , в потенциале $V_0(x)$. Этот потенциал отрицателен в некоторой области O и равен нулю вне ее. Исходно частица S находится внутри области O . Начальная энергия частицы S отрицательна, $E_{0,S} < 0$. Такую систему – заряженную частицу в потенциале – мы называем классическим атомом.

³⁾Заметим также, что использование пространственно-временной картины вместо формального алгебраического подхода дает более простые и более интуитивные представления о суперсимметричных классической и квантовой теориях и об их взаимосвязи, о *функциональном суперанализе* (построенном В.С. Владимировым и И.В. Володиным) и его приложениях к квантовой теории поля, суперструнам и гравитации (см. [26]–[28]). Если мы действуем, основываясь на пространственно-временной картине, то это не означает, что мы абсолютизируем роль вещественных чисел – бесконечно-делимого континуума. Начиная с исторических работ В.С. Владимирова и И.В. Володиных [29]–[33] исследователи активно используют p -адические модели пространства-времени: в теории неупорядоченных систем (спиновые стекла), квантовой механике и теории поля, теории струн и суперструн, космологии [35]–[37].

Система, состоящая из классического атома и электромагнитного поля, описывается гамильтонианом

$$H(p, x, A, \Phi) = \frac{p^2}{2m_S} - \frac{zA \cdot p}{m_S} + \frac{z^2 A^2}{2m_S} + z\Phi + V_0(x), \quad (1)$$

где A и Φ – векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Заметим, что, фиксируя кулоновскую калибровку, можно объединить два последних члена в гамильтониане (1), так что мы можем оставить лишь один потенциал V_0 .

Эксперимент с детектированием описывается как эксперимент с распространением и взаимодействием полей. Для простоты будем предполагать, что потери отсутствуют, т.е. энергия сохраняется. Исходно классический атом и электромагнитное поле (E, B) являются независимыми системами. При распространении электромагнитной волны через классический атом системы обмениваются энергией, и по прошествии длительного времени эти две системы снова оказываются свободными. Наконец, если в результате такого взаимодействия частица S приобретает положительную энергию, то она может покинуть область O , и мы говорим, что это свободная частица. Если энергия частицы S все еще отрицательна, то мы говорим, что частица связана. В первом случае присутствие S вне области O (вне классического атома) можно рассматривать как акт детектирования – щелчок.

Для фиксированного потенциала $V_0(x)$ в классическом атоме и электромагнитной волны можно определить минимальный порог детектирования. Если амплитуда волны больше порога, то результатом взаимодействия волны с классическим атомом будет свободная частица S ; если амплитуда волны меньше порога, то результатом будет связанная частица (т.е. классический атом не ионизируется). Минимальная энергия детектирования $\mathcal{E}_{d,\min}$ соответствует минимальной амплитуде детектирования. Вообще говоря, величина $\mathcal{E}_{d,\min}$ зависит от вида потенциала $V_0(x)$ и вида волны. Величина $\mathcal{E}_{d,\min}$ меньше начальной энергии электромагнитной волны, поскольку после взаимодействия с классическим атомом волна все еще имеет ненулевую энергию. Любая величина $\mathcal{E}_d$, большая $\mathcal{E}_{d,\min}$, может служить *порогом детектирования*. Если электромагнитная волна, взаимодействующая с классическим атомом, передает ему энергию, большую чем $\mathcal{E}_d$, то это освобождает частицу S из данного атома и порождает щелчок.

Заметим, что гамильтониан (1) квадратичен по p и A . Отсюда следует, что между ними имеется линейная динамическая зависимость. Таким образом, если вид волны и форма потенциала определяют, будет ли происходить передача энергии от поля к заряженной частице S (классическому аналогу электрона), то энергия частицы S может произвольно возрастать за счет возрастания амплитуды волны.

Заметим также, что модель с потенциалом с конечной протяженностью была выбрана для простоты. Однако представляется, что более продвинутые модели дадут аналогичный порог. Основная проблема представленной модели заключается в том, что рассматриваемый потенциал V_0 не является гармонической функцией (решением уравнения Лапласа) вне начала координат (центра атома), т.е. он не следует из уравнения Максвелла. Чтобы удовлетворить уравнению Максвелла, можно изменить модель следующим образом. Рассмотрим вращательно-симметричный потенциал. Тогда $V_0 = V_0(r)$. Пусть $V_0(r)$ имеет максимум в радиальном направлении на конечном расстоянии от центра атома. При низкой энергии “электрон” локализован между центром атома и этим максимумом, при достаточно высокой энергии он

выходит из этой области. В качестве такого потенциала можно выбрать потенциал, являющийся гармоническим вне начала координат.

Еще раз подчеркнем, что волновая динамика имеет два временных масштаба. Один масштаб – это грубый временной масштаб распространения волны до и после детектирования. На этом временном масштабе детектирование является мгновенным. Другой масштаб – это тонкий временной масштаб, описывающий распространение волны во время детектирования. Если серьезно рассматривать нашу модель не просто как классическую имитацию микроскопических явлений, а как модель этих явлений на основе субквантового описания, то грубый временной масштаб соответствует временному масштабу шредингеровской динамики, а тонкий временной масштаб (субквантовый масштаб) – масштабу квантового измерения. Подходящий квантовый формализм не дает детального описания процесса измерения⁴⁾ (это хорошо известная *проблема измерения*; ср., однако, [45]). Наша модель (интерпретируемая как субквантовая модель) предоставляет такое описание⁵⁾.

3. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС В КОМПЛЕКСНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть H – комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим винеровский процесс $\phi(s, \omega)$ со значениями в этом пространстве. Такой процесс определяется ковариационным оператором $B: H \rightarrow H$. Любой ковариационный оператор является эрмитовым, положительным и ядерным, и верно также обратное. Комплексный винеровский процесс характеризуется эрмитовым ковариационным оператором. Для $y \in H$ имеем

$$E\langle y, \phi(s, \omega) \rangle = 0,$$

а для $y_j \in H$, $j = 1, 2$,

$$E\langle y_1, \phi(s_1, \omega) \rangle \langle \phi(s_2, \omega), y_2 \rangle = \min(s_1, s_2) \langle B y_1, y_2 \rangle. \quad (2)$$

Последнее равенство представляет собой ковариационную функцию стохастического процесса, в операторном виде $B(s_1, s_2) = \min(s_1, s_2)B$. Заметим, что дисперсия H -значного винеровского процесса (в момент времени s) имеет вид

$$\Sigma^2(s) = E\|\phi(s, \omega)\|^2 = s \operatorname{Tr} B. \quad (3)$$

Величина

$$\mathcal{E}(s, \omega) = \|\phi(s, \omega)\|^2$$

представляет собой полную энергию сигнала типа броуновского движения в момент времени s . Поэтому величина

$$\Sigma^2 \equiv \frac{\Sigma^2(s)}{s} = \operatorname{Tr} B \quad (4)$$

⁴⁾Используется проекционный постулат фон Неймана. При таком подходе измерение описывается как “коллапс волновой функции”.

⁵⁾Последнюю интерпретацию нашей модели можно назвать *сильной интерпретацией*, в рамках слабой интерпретации мы просто имитируем вероятности квантового детектирования в рамках классической волновой теории.

является средней мощностью этого случайного сигнала. Подчеркнем, что средняя мощность не зависит от времени.

Также заметим, что с помощью нормировки ковариационной функции при фиксированном s на дисперсию получаем оператор

$$\rho = \frac{B(s, s)}{\Sigma^2(s)} = \frac{B}{\text{Tr } B}, \quad (5)$$

который формально обладает всеми свойствами *оператора плотности*, используемого в квантовой теории для представления квантовых состояний.

Рассмотрим компоненты $\phi_j(s, \omega)$ векторно-значного сигнала $\phi(s, \omega)$. Тогда из (2) следует

$$E\phi_i(s, \omega)\overline{\phi_j(s, \omega)} = \min(s_1, s_2)\langle Be_i, e_j \rangle = b_{ij}. \quad (6)$$

В частности,

$$\sigma_j^2(s) \equiv E\mathcal{E}_j(s, \omega) \equiv E|\phi_j(s, \omega)|^2 = sb_{jj}. \quad (7)$$

Это средняя энергия j -й компоненты в момент времени s . Рассмотрим также средние мощности компонент

$$\sigma_j^2 \equiv \frac{\sigma_j^2(s)}{s} = b_{jj}. \quad (8)$$

Заметим, что средняя мощность полного сигнала равна сумме средних мощностей его компонент:

$$\Sigma^2 = \sum_j \sigma_j^2. \quad (9)$$

Для физического приложения выберем $H = L_2(\mathbb{R}^3)$. L_2 -значный винеровский процесс является случайным полем, $w = w(s, x, \omega)$, где s, x, ω – время, пространство и случайные параметры соответственно. Мы часто будем опускать случайный параметр. При этом формула (3) принимает вид

$$E \int_{\mathbb{R}^3} |w(s, x)|^2 dx = s \text{Tr } B = s \int_{\mathbb{R}^3} B(x, x) dx, \quad (10)$$

где $B(x, y)$ – ядро интегрального оператора B :

$$B\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} B(x, y)\phi(y) dy, \quad \phi \in L_2. \quad (11)$$

Заметим, что поскольку B является ядерным оператором, то он также является оператором Гильберта–Шмидта. Поэтому его ядро квадратично интегрируемо, $\iint |B(x, y)|^2 dx dy < \infty$.

Чтобы найти вероятность детектирования в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$, нам требуется величина $E|w(s, x_0)|^2$. Однако эта величина не является хорошо определимой, поскольку линейный функционал $\phi \rightarrow \phi(x_0)$ не непрерывен на L_2 . Вместо $E|w(s, x_0)|^2$ рассмотрим $E \int_O |w(s, x)|^2 dx$, где O – измеримое подмножество пространства, например шар с центром в точке x_0 . Случайная переменная

$$\omega \rightarrow \mathcal{E}_O(s, \omega) \equiv \int_O |w(s, x, \omega)|^2 dx$$

может быть определена на математическом уровне строгости:

$$E\mathcal{E}_O(s, \omega) = s \int_O B(x, x) dx. \quad (12)$$

В нашей модели квадрат случайного поля $|w(s, x, \omega)|^2$ имеет физическую размерность плотности энергии. Поэтому величина $\int_O |w(s, x, \omega)|^2 dx$ имеет размерность энергии. Заметим также, что левая часть соотношения (10) имеет размерность энергии, поэтому $\text{Tr } B = \int_{\mathbb{R}^3} B(x, x) dx$ имеет размерность мощности волны.

3.1. Пороговое измерение. Рассмотрим схему измерения, в которой пространство разбито на непересекающиеся области O_i , $i = 1, 2, \dots$, каждая из которых содержит детектор типа классического атома (см. раздел 2). Единственное допущение состоит в том, что экспериментатор выбирает один и тот же порог детектирования $\mathcal{E}_d$ для всех детекторов.

Выберем одну фиксированную область детектирования и обозначим ее просто O . Рассматриваемая процедура детектирования сводится к условию, что уровень энергии должен приближаться к порогу детектирования. Момент времени τ_O , соответствующий детектированию сигнала (щелчку детектора), определяется условием

$$\mathcal{E}_O(\tau_O, \omega) = \mathcal{E}_d. \quad (13)$$

Заметим, что момент детектирования волны является случайной переменной: $\tau_O = \tau_O(\omega)$. С математической точки зрения наша цель заключается в том, чтобы найти среднее значение момента детектирования, $\bar{\tau}_O = E\tau_O$. Мы будем использовать величину $1/\bar{\tau}_O$ для нахождения вероятности детектирования, т. е. “как часто детектор выдает щелчки” (см. раздел 4).

Применим оператор математического ожидания (среднего) к обеим частям условия детектирования (13) и получим

$$E\mathcal{E}_O(\tau_O(\omega), \omega) = \mathcal{E}_d. \quad (14)$$

Разделим вычисления среднего в левой части (14) на два шага. На первом шаге найдем это среднее для фиксированного (т. е. неслучайного) τ . Применим (12):

$$E\mathcal{E}_O(\tau, \omega) = \tau \int_O B(x, x) dx. \quad (15)$$

Теперь можно воспользоваться формулой для полной вероятности:

$$\begin{aligned} E\mathcal{E}_O(\tau_O(\omega), \omega) &= \int_0^\infty E[\mathcal{E}_O(\tau(\omega), \omega) | \tau_O(\omega) = \tau] P(\tau_O(\omega) = \tau) d\tau = \\ &= \int_O B(x, x) dx \int_0^\infty \tau P(\tau_O(\omega) = \tau) d\tau = E\tau_O. \end{aligned}$$

Здесь $E[\mathcal{E}_O(\tau(\omega), \omega) | \tau_O(\omega) = \tau]$ – условное математическое ожидание. Его значение имеет вид (15). Таким образом, для условия детектирования (14) получаем

$$\bar{\tau}_O \int_O B(x, x) dx = \mathcal{E}_d. \quad (16)$$

Теперь снова воспользуемся индексированием областей детектирования:

$$\frac{1}{\bar{\tau}_{O_i}} = \frac{1}{\mathcal{E}_d} \int_{O_i} B(x, x) dx. \quad (17)$$

4. ПРАВИЛО БОРНА

Таким образом, в течение длительного периода времени T такой детектор, локализованный в области O_i , щелкает N_{O_i} раз, где

$$N_{O_i} \approx \frac{T}{\bar{\tau}_{O_i}} = \frac{1}{\mathcal{E}_d} T \int_{O_i} B(x, x) dx. \quad (18)$$

Чтобы найти вероятность детектирования и добиться соответствия с реальной схемой детектирования, используемой в квантовых экспериментах, необходимо воспользоваться подходящей нормировкой для N_{O_i} . В квантовых экспериментах вероятности получаются с помощью соответствующей нормировки на сумму щелчков во всех детекторах, используемых в эксперименте, например детекторов спина вверх и спина вниз. Поэтому полное число щелчков равно (см. (10))

$$N = \sum_i N_{O_i} = \frac{1}{\mathcal{E}_d} T \sum_i \int_{O_i} B(x, x) dx = \frac{1}{\mathcal{E}_d} T \int_{\mathbb{R}^3} B(x, x) dx = T \frac{\text{Tr } B}{\mathcal{E}_d}. \quad (19)$$

Вероятность детектирования в области $O = O_i$ равна

$$P_O = \frac{N_O}{N} = \frac{1}{\text{Tr } B} \int_O B(x, x) dx. \quad (20)$$

Это и есть правило Борна в квантовой механике.

Рассмотрим оператор ρ , нормированный на оператор ковариации B (см. (5)). Тогда

$$P_O = \int_O \rho(x, x) dx, \quad (21)$$

где $\rho(x, y)$ – интегральное ядро оператора ρ . Еще раз подчеркнем, что формально ρ является операторной плотностью и поэтому соотношение (21) представляет собой правило Борна, используемое в квантовой механике. Здесь мы *вывели* его, причем в рамках чисто классического подхода случайных волн.

В частности, выберем винеровский процесс, определяемый оператором ковариации $B = |\psi\rangle\langle\psi|$, т. е. ортогональным проектором на вектор $\psi \in H$. Тогда интегральное ядро этого оператора имеет вид $B(x, y) = \psi(x)\psi(y)$. Соответствующий оператор плотности $\rho \equiv \rho_\psi$ есть $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, где $\Psi = \psi/\|\psi\|$ – нормировка вектора ψ . Тогда его интегральное ядро имеет вид $\rho(x, y) = \Psi(x)\overline{\Psi(y)}$. Формула (21) принимает вид

$$P_O = \int_O |\Psi(x)|^2 dx, \quad (22)$$

т. е. исходное правило Борна.

5. СОГЛАСИЕ С КВАНТОВОЙ ТЕОРИЕЙ ДЛЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ СОВПАДЕНИЙ

Для двух детекторов, локализованных в двух непересекающихся областях O_1 и O_2 , совпадение щелчков соответствует выполнению двух условий соответствия приближения к порогу:

$$\mathcal{E}_{O_1}(\tau_{O_1}(\omega), \omega) = \mathcal{E}_d, \quad \mathcal{E}_{O_2}(\tau_{O_2}(\omega), \omega) = \mathcal{E}_d, \quad (23)$$

где соответствие имеет вид

$$\tau_{O_1}(\omega) = \tau_{O_2}(\omega) = \tau(\omega). \quad (24)$$

Наша цель – оценить вероятность совпадения P_{12} . Для сокращения обозначений положим $\mathcal{E}_{O_i}(\omega) \equiv \mathcal{E}_{O_i}(\tau(\omega), \omega)$ или даже просто $\mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим набор случайных параметров, соответствующих совпадению при детектировании: $A_{12} = \{\omega: \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_d, i = 1, 2\}$ (A_{12} представляет собой событие совпадения при детектировании). Эту вероятность можно оценить, используя неравенство Чебышева:

$$P(A_{12}) \leq \frac{E\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_d^2}. \quad (25)$$

Дальнейшие оценки представляют собой довольно простые обобщения соответствующих оценок для внутренних степеней свободы. Получаем

$$E\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \overline{\tau^2} \left(\int_{O_1} B(x, x) dx \int_{O_2} B(x, x) dx + \int_{O_1} \int_{O_2} |B(x, y)|^2 dx dy \right),$$

где $\overline{\tau^2} = E\tau^2$. Можно переписать этот ответ в терминах квантово-механической матрицы плотности:

$$E\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \overline{\tau^2} \text{Tr} B \left(\int_{O_1} \rho(x, x) dx \int_{O_2} \rho(x, x) dx + \int_{O_1} \int_{O_2} |\rho(x, y)|^2 dx dy \right).$$

Таким образом, согласно неравенству Чебышева

$$P(A_{12}) \leq \frac{(\text{Tr} B)^2 \overline{\tau^2}}{\mathcal{E}_d^2} \left(\int_{O_1} \rho(x, x) dx \int_{O_2} \rho(x, x) dx + \int_{O_1} \int_{O_2} |\rho(x, y)|^2 dx dy \right). \quad (26)$$

Величину $\Delta \equiv \sqrt{\overline{\tau^2}}$ можно интерпретировать как временной параметр, масштабирующий временные интервалы между совпадающими щелчками. Поэтому $\overline{\mathcal{E}}_\Delta = \Delta \text{Tr} B$ представляет собой среднюю энергию, распределенную между щелчками. Предположим, что $\epsilon = \overline{\mathcal{E}}_\Delta / \mathcal{E}_d \ll 1$. В этом случае

$$P(A_{12}) \leq \epsilon^2 \left(\int_{O_1} \rho(x, x) dx \int_{O_2} \rho(x, x) dx + \int_{O_1} \int_{O_2} |\rho(x, y)|^2 dx dy \right). \quad (27)$$

Как обычно [15], положим $g^{(2)}(0) = P_{12}/P_1P_2$, где P_1 и P_2 – вероятности детектирования в областях O_1 и O_2 (предполагается, что вторая вероятность положительна). Мы доказали (см. раздел 4), что эти вероятности равны квантовым вероятностям: $P_i = \int_{O_i} \rho(x, x) dx$. Поэтому получаем

$$g^{(2)}(0) = \frac{P_{12}}{P_1P_2} \leq \epsilon^2 \left(1 + \int_{O_1} \int_{O_2} |\rho(x, y)|^2 dx dy \Big/ \int_{O_1} \rho(x, x) dx \int_{O_2} \rho(x, x) dx \right). \quad (28)$$

Поскольку $\epsilon \sim 1/\mathcal{E}_d$, при возрастании параметра $\mathcal{E}_d$ коэффициент $g^{(2)}(0)$ можно сделать меньше единицы. Таким образом, наша предквантовая классическая полевая модель может нарушать (при выборе подходящего порога) неравенство $g^{(2)}(0) \geq 1$, справедливое для “стандартной” классической волновой теории.

Благодарности. На одного из авторов (А.Ю. Хренникова) оказали сильное влияние оригинальные идеи Василия Сергеевича Владимирова, касающиеся теории распределений, суперанализа и p -адической математики и физики, поэтому он благодарен В.С. Владимирову за многочисленные стимулирующие обсуждения и поддержку. Другой автор (Б. Нилсон) благодарен В.С. Владимирову за интересные обсуждения проблем развития ядерной физики в СССР и Швеции, происходившие во время его визита в Университет Вэшьу.

Список литературы

- [1] M. Born, *Z. Phys.*, **37**:12 (1926), 863–867.
- [2] N. P. Landsman, “Algebraic quantum mechanics”, *Compendium of Quantum Physics: Concepts, Experiments, History and Philosophy*, eds. D. Greenberger, K. Hentschel, F. Weinert, and B. Falkenburg, Springer, Berlin, 2009, 6–9; “The Born rule and its interpretation”, *Op. cit.*, 64–70; “Quantization (systematic)”, *Op. cit.*, 510–513; “Quasi-classical limit”, *Op. cit.*, 626–629.
- [3] G. ’t Hooft, *Quantum gravity as a dissipative deterministic system*, [arXiv: gr-qc/9903084](#).
- [4] G. ’t Hooft, *The mathematical basis for deterministic quantum mechanics*, [arXiv: quant-ph/0604008](#).
- [5] G. ’t Hooft, *Her. Russ. Acad. Sci.*, **81**:10 (2011), 907–911, [arXiv: quant-ph/0701097](#).
- [6] A. Yu. Khrennikov, *J. Phys. A*, **38**:41 (2005), 9051–9073, [arXiv: quant-ph/0505228](#).
- [7] A. Yu. Khrennikov, *Found. Phys. Lett.*, **18**:7 (2006), 637–650.
- [8] A. Yu. Khrennikov, *Phys. Let. A*, **357**:3 (2006), 171–176.
- [9] A. Yu. Khrennikov, *Found. Phys. Lett.*, **19**:4 (2006), 299–319.
- [10] A. Yu. Khrennikov, *Nuovo Cimento B*, **121**:5 (2006), 505–521, [arXiv: hep-th/0604163](#).
- [11] A. Yu. Khrennikov, *Europhys. Lett.*, **88**:4 (2009), 40005, 6 pp.
- [12] A. Yu. Khrennikov, *Europhys. Lett.*, **90**:4 (2010), 40004, 7 pp.
- [13] A. Yu. Khrennikov, *J. Russian Laser Research*, **31**:2 (2010), 191–200.
- [14] A. Yu. Khrennikov, M. Ohya, N. Watanabe, *J. Russian Laser Research*, **31**:5 (2010), 462–468.
- [15] P. Grangier, *Etude expérimentale de propriétés non-classiques de la lumière: interférence à un seul photon*, Ph. D. thesis, Université de Paris-Sud, Centre D’Orsay, 1986.
- [16] R. Feynman, A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [17] A. Yu. Khrennikov, *Prog. Theor. Phys.*, **128**:1 (2012), 31–58.
- [18] A. Yu. Khrennikov, B. Nilsson, S. Nordebo, *J. Phys.*, **361**:1 (2012), 012030, 11 pp., [arXiv: 1112.5591](#).
- [19] V. S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Generalized Functions, Analytical Methods and Special Functions*, **6**, Taylor & Francis, London, 2002.
- [20] I. V. Volovich, *Towards quantum information theory in space and time*, [arXiv: quant-ph/0203030](#).
- [21] A. Yu. Khrennikov, I. V. Volovich, “Quantum nonlocality, EPR model, and Bell’s theorem”, *Proceedings of the 3rd International Sakharov Conference on Physics* (Moscow, Russia, June 24–29, 2002), **2**, eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin, World Sci., Singapore, 2003, 269–276.
- [22] A. Yu. Khrennikov, I. Volovich, “Local realism, contextualism and loopholes in Bell’s experiments”, *Foundations of Probability and Physics – 2* (Växjö, Sweden, June 2–7, 2002), *Mathematical Modelling in Physics, Engineering and Cognitive Sciences*, **5**, ed. A. Yu. Khrennikov, Växjö Univ. Press, Växjö, 2003, 325–343.

- [23] A. Yu. Khrennikov, I. Volovich, *Soft Computing – A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, **10**:6 (2005), 521–529.
- [24] A. Yu. Khrennikov, B. Nilsson, S. Nordebo, I. Volovich, “Distance dependence of entangled photons in waveguides”, *Foundations of Probability and Physics*–6 (Växjö, Sweden, June 14–16, 2011), AIP Conference Proceedings, **1424**, eds. M. D’Ariano, Sao-Ming Fei, E. Haven, B. Hiesmayr, G. Jaeger, A. Yu. Khrennikov, J.-Å. Larsson, AIP, Melville, NY, 2012, 262–269.
- [25] A. Yu. Khrennikov, B. Nilsson, S. Nordebo, I. V. Volovich, *Phys. Scr.*, **85**:6 (2012), 065404.
- [26] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, *Докл. АН СССР*, **276**:3 (1984), 521–524.
- [27] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **59**:1 (1984), 3–27.
- [28] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 169–198.
- [29] А. Ю. Хренников, *Суперанализ*, Физматлит, М., 2005.
- [30] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адитический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [31] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:1 (1996), 63–86.
- [32] V. S. Vladimirov, “p-Adic numbers in mathematical physics”, *Advanced Mathematics: Computations and Applications* (Novosibirsk, 1995), NCC Publ., Novosibirsk, 1995, 128–141.
- [33] В. С. Владимиров, “О разветвленных характерах группы идеалей одноклассных квадратичных полей”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **224**, Наука, М., 1999, 122–129.
- [34] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для гамма- и бета-функций одноклассных квадратичных полей. Применения к 4-частичным струнным амплитудам рассеяния”, *Проблемы современной математической физики*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Николая Николаевича Боголюбова, Тр. МИАН, **228**, Наука, М., 2000, 76–89.
- [35] A. Yu. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Mathematics and its Applications (Dordrecht), **309**, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [36] А. Ю. Хренников, *Неархимедов анализ и его применения*, Наука, М., 2003.
- [37] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
- [38] A. E. Allahverdyan, A. Yu. Khrennikov, Th. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 032102, 14 pp., arXiv: quant-ph/0412132.
- [39] L. De la Peña, A. Cetto, *The Quantum Dice: An Introduction to Stochastic Electrodynamics*, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [40] Th. M. Nieuwenhuizen, V. Špička, B. Mehmani, M. J. Aghdami, A. Yu. Khrennikov (eds.), *Beyond the Quantum*, World Sci., Singapore, 2007.
- [41] G. Grössing, J. M. Pascasio, H. Schwabl, *Found. Phys.*, **41**:9 (2011), 1437–1453, arXiv: 0812.3561.
- [42] Th. Nieuwenhuizen, “Classical phase space density for relativistic hydrogen atom”, *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*–3 (Växjö, Sweden, June 6–11, 2005), AIP Conference Proceedings, **810**, eds. G. Adenier, A. Yu. Khrennikov, Th. M. Nieuwenhuizen, AIP, Melville, NY, 2006, 198–210, arXiv: quant-ph/0511144.
- [43] W. A. Hofer, *Found. Phys.*, **41**:4 (2011), 754–791, arXiv: 1002.3468.
- [44] H. De Raedt, K. De Raedt, K. Michielsen, *Europhys. Lett.*, **69**:6 (2005), 861–867.
- [45] K.-E. Eriksson, “Reduction of the wave-packet can be understood within quantum mechanics”, *Foundations of Probability and Physics*–6 (Växjö, Sweden, June 14–16, 2011), AIP Conference Proceedings, **1424**, eds. M. D’Ariano, Sao-Ming Fei, E. Haven, B. Hiesmayr, G. Jaeger, A. Yu. Khrennikov, J.-Å. Larsson, AIP, Melville, NY, 2012, 72–76.