Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Дараби, С. Джалалзаде, Космологическое квантовое туннелирование и голографический принцип, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 313–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:40:33

© 2013 г.

Ф. Дараби^{*†}, С. Джалальзаде[‡]

КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ КВАНТОВОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ И ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Возможная траектория волновой функции основного состояния вселенной возникает путем квантового туннелирования за счет гравитационных инстантонов. Вычислена скорость квантового туннелирования для n -мерной, $n > 2$, замкнутой вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера с положительной космологической постоянной. С использованием голографического принципа получено, что в размерности 4 скорость туннелирования связана с максимальной энтропией ранней вселенной после квантового туннелирования.

Ключевые слова: скорость туннелирования, голографический принцип, максимальная энтропия.

DOI: 10.4213/tmf8419

1. ВВЕДЕНИЕ

Желание объяснить, как и почему пространство-время является четырехмерным многообразием, занимает умы людей с давних пор. Большинство имеющихся к настоящему времени объяснений, как правило, основаны на антропном принципе [1]. Наше существование во Вселенной рассматривается просто как антропная причина того, что наше пространство-время имеет размерность 4. Если бы пространство имело более трех измерений, планеты не могли бы обращаться вокруг Солнца по устойчивым орбитам и, соответственно, не была бы возможна никакая разумная жизнь. Помимо этого, те же аргументы справедливы и на квантово-механическом уровне применительно к существованию устойчивых атомов, из которых построены все материальные объекты.

Возможность объяснить размерность пространства-времени без обращения к антропному принципу представляет собой важную проблему, причем предполагается,

^{*}Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: f.darabi@azaruniv.edu

[†]Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (RIAAM), Maragha, Iran

[‡]Department of Physics, Shahid Beheshti University, Evin, Tehran, Iran.
E-mail: s-jalalzadeh@sbu.ac.ir

что это объяснение обычно дают в рамках таких фундаментальных теорий, как теории струн или суперструн. В этих теориях предполагают, что пространство-время является n -мерным, а затем, налагая некоторые специальные требования непротиворечивости, получают число измерений [2]. Однако обычно предполагают априори, что четыре из n измерений соответствуют большому обыкновенному пространству-времени, а оставшиеся суть компактные пространственные измерения планковского масштаба. Интересная попытка динамически получить четырехмерное пространство-время в теории струн была сделана в непертурбативной М-формулировке теории струн типа IIB [3]. С другой стороны, имеются некоторые интересные подходы к поиску разумных ответов на вопрос и обоснований самого вопроса, почему четырехмерное пространство-время имеет лоренцеву сигнатуру [4], почему природа выбрала одну временную и три пространственные координаты [5] или почему мы живем в размерности $3 + 1$ [6].

В общей теории относительности основное допущение состоит в том, что пространство-время на больших масштабах является четырехмерным дифференцируемым многообразием. С другой стороны, на малых масштабах, таких как планковская длина, важными становятся квантовые эффекты, и пространство-время существенно искривляется со всеми возможными топологиями и произвольными размерностями. Таким образом, основной вопрос заключается в том, как четырехмерное пространство-время выделяется из других квантово-механически возможных конфигураций. Цель настоящей работы – ответить на этот вопрос, рассматривая только размерность, но не топологию пространства-времени. В рамках данного подхода мы рассматриваем n -мерную пустую замкнутую ($k = 1$) вселенную¹⁾ Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ) с космологической постоянной, а затем вычисляем скорость туннелирования при рождении такой вселенной из ничего. Оказывается, что скорость туннелирования в четырехмерном пространстве-времени связана с голографическим принципом и максимальной энтропией младенческой вселенной ФРУ.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим n -мерную пустую замкнутую ($k = 1$) вселенную ФРУ с космологической постоянной Λ . Хотя происхождение космологической постоянной объясняется квантовыми флуктуациями вакуума, в космологии ее обычно вводят руками. Мотивировкой введения Λ -члена является построение вселенной де Ситтера. Это

¹⁾ Тот факт, что наблюдаемая Вселенная является пространственно почти плоской, не означает, что топология пространства точно соответствует $k = 0$. На самом деле с помощью современных наблюдений вообще невозможно определить топологический параметр k . Наблюдения сообщают нам лишь то, что пространственная кривизна k/a^2 обращается в нуль не потому, что $k = 0$, а потому, что масштабный множитель, или радиус a нашей Вселенной, претерпел инфляцию в ранней вселенной, поэтому в уравнении Фридмана пространственная кривизна k/a^2 практически равна нулю. Это так называемая проблема плоской вселенной, которая решается, если применить инфляционные сценарии. В принципе квантовое туннелирование для пространственно плоской вселенной с $k = 0$ невозможно, поскольку при $k = 0$ потенциальный барьер для туннелирования отсутствует. Однако для пространственно замкнутой вселенной с $k = 1$ существует потенциальный барьер, приводящий к квантовому туннелированию. После квантового туннелирования из ничего в замкнутую младенческую вселенную ФРУ инфляция обеспечивает большой масштабный множитель в знаменателе выражения для пространственной кривизны $1/a^2$, поэтому пространственная кривизна практически обращается в нуль, что приводит к пространственно плоской вселенной.

связано с тем, что в квантовой космологии мы заинтересованы, чтобы после квантового туннелирования во вселенной установился режим расширения [7]. Элемент длины имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \right], \quad (1)$$

где $a(t)$ как масштабный множитель является единственной динамической степенью свободы,

$$d\Omega_{n-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} d\theta_{n-2}^2.$$

Пространственная мера на пространственноподобной гиперповерхности $\mathcal{V}$, соответствующая этой метрике, имеет вид

$$\begin{aligned} V &= \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-3} d\theta_{n-2} = \\ &= a^{n-1}(t) \int_0^r \frac{r^{n-2} dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_1 d\theta_1 \dots \int_0^\pi \sin \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-2}. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\int_0^r \frac{r^{n-2} dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)},$$

получаем меру в виде

$$\int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-3} d\theta_{n-2} = a^{n-1}(t) \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Скаляр Риччи, соответствующий метрике (1), имеет вид

$$\mathcal{R} = (n-1) \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + (n-2) \frac{\dot{a}^2}{a^2} + (n-2) \frac{1}{a^2} \right],$$

причем при $n = 4$ воспроизводится стандартный четырехмерный скаляр Риччи

$$\mathcal{R} = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right].$$

Гравитационное действие, соответствующее этой модели, записывается как

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{G_n} \int (\mathcal{R} - 2\Lambda) dt \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-3} d\theta_{n-2} = \\ &= M_{\text{P}}^{n-2} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int a^{n-1} \left[(n-1) \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + (n-2) \frac{\dot{a}^2}{a^2} + (n-2) \frac{1}{a^2} \right) - 2\Lambda \right] dt, \end{aligned}$$

где G_n – n -мерная гравитационная постоянная, масса Планка в размерности $n = 1$ в единицах $\hbar = c = 1$ равна $M_{\text{P}} = G_n^{-1/(n-2)}$. После интегрирования по частям

слагаемого, содержащего $\ddot{a}$, получаем окончательное выражение для действия:

$$S = -(n-1)(n-2)M_{\text{P}}^{n-2} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int \left[a^{n-3}(\dot{a}^2 - 1) + \frac{2\Lambda}{(n-1)(n-2)} a^{n-1} \right] dt.$$

Таким образом, лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\lambda \left[a^{n-3}(\dot{a}^2 - 1) + \frac{2\Lambda}{(n-1)(n-2)} a^{n-1} \right], \quad (2)$$

где

$$\lambda = (n-1)(n-2)M_{\text{P}}^{n-2} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (3)$$

Импульс, сопряженный масштабному множителю, задается как

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -2\lambda \dot{a} a^{n-3}.$$

В результате получаем гамильтониан вида

$$\mathcal{H} = \dot{a}\Pi_a - \mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda a^{n-3}} \pi_a^2 - \lambda a^{n-3} + \frac{2\Lambda\lambda}{(n-1)(n-2)} a^{n-1}.$$

Требование равенства нулю энергии данной гравитационной системы приводит к гамильтоновой связи

$$\Pi_a^2 + 4\lambda^2 a_0^{2n-6} q^{2n-6} [1 - q^2] = 0, \quad (4)$$

где $q = a/a_0$ и

$$a_0^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2\Lambda}. \quad (5)$$

Используя это уравнение, можно оценить значение космологической постоянной как $\Lambda \sim a_0^{-2}$, что оказывается слишком большой величиной, если учесть, сколь мал размер a_0 для вселенной после квантового туннелирования. На самом деле такая большая космологическая постоянная для ранней вселенной нам необходима для установления расширения де Ситтера (см. ниже). Заметим, что при $n > 2$ космологическая постоянная должна быть положительной.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

Используя (5), перепишем лагранжиан (2) в виде

$$\mathcal{L} = -\lambda \left[a^{n-3}(\dot{a}^2 - 1) + \frac{1}{a_0^2} a^{n-1} \right].$$

Запишем уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{n-3}{2} \frac{\dot{a}^2 - 1}{a^2} - \frac{n-1}{2a_0^2} = 0. \quad (6)$$

Гамильтонова связь (4) приводит к уравнению

$$H^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2} = 0, \quad (7)$$

где $H = \dot{a}/a$ – параметр Хаббла. Комбинируя уравнения (6) и (7), получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a_0^2} = 0.$$

Решение этого уравнения, которое удовлетворяет гамильтоновой связи (7), имеет вид [7]

$$a(t) = a_0 \operatorname{ch} \frac{t}{a_0}, \quad (8)$$

где a_0 интерпретируется как минимальный радиус вселенной и мы используем начальные условия $a(0) = a_0$ и $\dot{a}(0) = 0$. Заметим, что параметр n включается в решение (8) через определение a_0 равенством (5). Это решение соответствует обычному пространству-времени де Ситтера, где за фазой сжатия в бесконечно далеком прошлом следует фаза расширения, когда масштабный множитель достигает своего минимума a_0 .

Однако различные космологические сценарии могут давать одно и то же расширение де Ситтера, если рассматривать аналитическое продолжение $\tau = it + \pi a_0/2$. Отсюда можно получить инстантонное решение. Действительно, евклидовы решения уравнений Эйнштейна, которые выводятся путем аналитического продолжения лоренцевых решений, называются инстантонами. Здесь мы получаем их как

$$a_E = a_0 \sin \frac{\tau}{a_0}. \quad (9)$$

Таким образом, если $\tau/a_0 \in \{-\pi/2, \pi/2\}$, инстантон представляет собой n -сферу радиуса a_0 со сферическими трехмерными сечениями, параметризованными азимутальным углом $\theta = a_0 \tau$.

Обе метрики связаны аналитическим продолжением в комплексную плоскость евклидова “времени” τ :

$$\tau = \frac{\pi}{2} a_0 + it, \quad a = a_E \frac{\pi}{2} a_0 + it,$$

что представляет собой поворот Вика по отношению к точке $\tau = \pi a_0/2$ в данной плоскости. Это аналитическое продолжение можно интерпретировать как квантовую нуклеацию лоренцева пространства-времени де Ситтера из евклидовой полусферы в виде сшивки двух многообразий по экваториальному сечению $\tau = \pi a_0/2$, $t = 0$, т.е. поверхность отскока с нулевой внешней кривизной.

4. КВАНТОВАЯ КОСМОЛОГИЯ

Чтобы вычислить скорость квантового туннелирования, нам необходимы “инстантоны”. В разделе 3 мы получили лоренцево решение (8), а затем – его евклидов контрпартнер, а именно инстантонное решение (9). Вычислим скорость туннелирования, используя инстантонное решение (9). Каноническое квантование такой космологической модели в координатном представлении осуществляется с помощью следующих операторных реализаций:

$$a = a, \quad \Pi_a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial a}.$$

Тогда гамильтонова связь (4) принимает вид уравнения Уилера–Девитта для волновой функции вселенной:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + Q^2\psi = 0,$$

где $Q^2 = 4\lambda^2 a_0^{2(n-2)} q^{2(n-3)} [q^2 - 1]$ и мы использовали обозначение $q = a/a_0$, чтобы перейти от динамической переменной a к переменной q . Решения уравнения Уилера–Девитта имеют вид

$$\psi = \begin{cases} \frac{N}{2} |Q|^{-1/2} e^{|w|}, & q < 1, \\ N |Q|^{-1/2} \cos\left(|w| - \frac{\pi}{4}\right), & q > 1, \end{cases} \quad w = \int^q Q dq.$$

Тогда скорость туннелирования в приближении ВКБ имеет вид

$$|T|^2 = \left[1 + \exp\left(2i \int_0^1 Q dq\right) \right]^{-1},$$

где интеграл в показателе экспоненты вычисляется следующим образом:

$$\int_0^1 Q dq = 2\lambda a_0^{n-2} \int_0^1 q^{n-3} \sqrt{q^2 - 1} dq = i \frac{\lambda}{2} a_0^{n-2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n/2 - 1)}{\Gamma(n/2 + 1/2)}.$$

Отсюда находим

$$|T|^2 = \left[1 + \exp\left(-\lambda a_0^{n-2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n/2 - 1)}{\Gamma(n/2 + 1/2)}\right) \right]^{-1}.$$

Подставляя в это выражение соотношение (3), после некоторых вычислений получаем окончательный результат:

$$|T|^2 = [1 + e^{-\alpha}]^{-1}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi^{3/2}}{\Gamma(n/2 - 1/2)} [\pi a_0^2 G_n^{-1}]^{n/2-1}.$$

Полагая $n = 4$, получаем

$$\alpha = 8\pi [\pi a_0^2 G_4^{-1}]. \quad (11)$$

5. ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП И СКОРОСТЬ ТУННЕЛИРОВАНИЯ

Голографический принцип является достоянием теории струн и квантовой гравитации; согласно этому принципу можно считать, что информация о том, что происходит внутри пространственной области, закодирована на границе данной области. Этот принцип впервые предложил 'т Хоофт, а затем Сасскинд дал его точную интерпретацию с точки зрения теории струн [8]. Чисто умозрительно, эта теория утверждает, что всю вселенную можно рассматривать как двумерную информационную структуру, “нарисованную” на космологическом горизонте. С другой стороны, идея голографического принципа была инспирирована термодинамикой черных дыр, из

которой следует, что максимальная энтропия любой области квадратично зависит от ее радиуса. Это связано с тем, что информационное содержание всех объектов, проваливающихся в черную дыру, можно полностью закодировать поверхностными флуктуациями на горизонте событий, тем самым развясняя информационный парадокс черной дыры. Более точно, *максимальная информация о том, что происходит внутри пространственной области, пропорциональна площади поверхности черной дыры, которая заняла бы эту область.*

Справедливость голографического принципа в многомерном случае, что существенно для настоящей работы, исследовалась в статье [9]. В указанной работе утверждается, что только в размерности 4 можно сформулировать принципы неопределенности, которые предсказывают то же число степеней свободы на единицу пространственного объема, что и голографический расчет, и это может служить основанием для того, чтобы задать вопрос о существовании дополнительных размерностей. Согласно этому утверждению, если имеется дополнительная пространственная размерность, голографический скейлинг нарушается. Однако в работе [10] тех же авторов показано, что голографический скейлинг можно восстановить, если допустить нарушение принципа эквивалентности на коротких расстояниях (меньше размера дополнительных измерений) так, чтобы инертная масса отличалась от гравитационной массы вполне определенным нетривиальным способом. Если же мы озабочены точным выполнением принципа эквивалентности, то нам нужно придерживаться той точки зрения, что голографический скейлинг, вообще говоря, нарушается, когда имеются дополнительные пространственные измерения.

Интересно теперь использовать голографический принцип в контексте настоящей работы. С учетом вышеприведенных обсуждений можно заключить, что голографический принцип, справедливый в четырех измерениях, утверждает следующее: максимальная энтропия при любых масштабах области квадратично зависит от ее радиуса, а именно пропорциональна площади поверхности области. Покажем теперь, что член $\pi a_0^2 G_4^{-1}$ в скобках в (11) представляет собой максимальную энтропию S ранней вселенной после квантового туннелирования. Для этого заметим, что площадь поверхности области ранней вселенной с радиусом a_0 равна $A = 4\pi a_0^2$. Таким образом, равенство (11) можно переписать как $\alpha = 8\pi A/4G$ или $\alpha = 8\pi S$, что дает $|T|^2 = [1 + e^{-8\pi S}]^{-1}$. Этот результат означает, что скорость туннелирования в случае четырехмерной младенческой вселенной связана с максимальной энтропией $S = A/4G$ этой вселенной после квантового туннелирования. Используя равенство (10), заключаем, что скорость туннелирования становится больше при больших значениях максимальной энтропии.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя гравитационное инстантонное решение, мы вычислили скорость квантового туннелирования для n -мерной, $n > 2$, замкнутой вселенной ФРУ с положительной космологической постоянной. Для специального случая четырех измерений, используя голографический принцип, мы получили интересный результат, заключающийся в том, что скорость туннелирования связана с максимальной энтропией ранней вселенной после квантового туннелирования. Скорость туннелирования возрастает с ростом значений максимальной энтропии. Разумно полагать,

что это указывает на тенденцию квантового туннелирования производить из *ничего* младенческую вселенную ФРУ с *максимальной энтропией*.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за проясняющие комментарии. Работа выполнена при финансовой поддержке Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (исследовательский проект № 1/2361).

Список литературы

- [1] C. B. Collins, S. W. Hawking, *Astrophys. J.*, **180** (1973), 317–334.
- [2] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987; R. Brandenberger, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **316**:2 (1989), 391–410; A. A. Tseytlin, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **372**:1–2 (1992), 443–466, arXiv: hep-th/9109048.
- [3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B*, **498**:1–2 (1997), 467–491, arXiv: hep-th/9612115.
- [4] J. Greensite, *Phys. Lett. B*, **300**:1–2 (1993), 34–37, arXiv: gr-qc/9210008; A. Carlini, J. Greensite, *Phys. Rev. D*, **49**:2 (1994), 866–878, arXiv: gr-qc/9308012; E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, *Class. Quant. Grav.*, **11**:4 (1994), L61–L68.
- [5] N. Mankoc Borstnik, H. B. Nielsen, *J. Phys. A*, **35**:49 (2002), 10563–10571, arXiv: hep-ph/0108269; *Phys. Lett. B*, **486**:3–4 (2000), 314–321, arXiv: hep-ph/0005327; H. van Dam, Y. J. Ng, *Phys. Lett. B*, **520**:1–2 (2001), 159–162; H. B. Nielsen, S. E. Rugh, *Why do we live in 3 + 1 dimensions*, arXiv: hep-th/9407011.
- [6] G. W. Gibbons, “The dimensionality of spacetime”, *String Theory, Quantum Cosmology and Quantum Gravity, Integrable and Conformal Invariant Theories* (Meudon, September 22–26, 1986), Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sánchez, World Sci., Singapore, 1987, 46–59; K. Maeda, “The Einstein gravity as an attractor in higher-dimensional theories”, *Gravitational Collapse and Relativity* (Kyoto, 7–11 April 1986), eds. H. Sato, T. Nakamura, World Sci., Singapore, 1986, 426–433; A. Chodos, S. Detweiler, *Phys. Rev. D*, **21**:8 (1980), 2167–2170; M. Szydlowski, J. Szczesny, M. Biesiada, *Class. Quant. Grav.*, **4**:6 (1987), 1731–1747; M. Demianski, M. Heller, M. Szydlowski, *Phys. Rev. D*, **36**:10 (1987), 2945–2954.
- [7] A. Vilenkin, *Ann. New York Acad. Sci.*, **688**:4 (1993), 271–280, arXiv: gr-qc/9302016.
- [8] L. Susskind, *J. Math. Phys.*, **36**:11 (1995), 6377–6396.
- [9] F. Scardigli, R. Casadio, *Class. Quant. Grav.*, **20**:18 (2003), 3915–3926, arXiv: hep-th/0307174.
- [10] F. Scardigli, R. Casadio, *Internat. J. Modern Phys. D*, **18**:2 (2009), 319–327, arXiv: 0711.3661.

Поступила в редакцию 28.09.2012,
после доработки 19.12.2012