Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Панов, Космологическая модель с вращением в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 2, 314–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:21:51

© 1998 г.

В. Ф. Панов*

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ВРАЩЕНИЕМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В рамках релятивистской теории гравитации построена стационарная космологическая модель с вращением для метрики типа метрики Геделя. Гравитационное поле модели создает комбинация источников: анизотропной жидкости, поля излучения, скалярного поля и потока тепла.

Обнаружение Берчем анизотропии поляризации излучения внегалактических радиоисточников [1] и последующее подтверждение результата его наблюдений группой Андреасяна [2] (убедительно не опровергнутые до сих пор) усилили интерес к исследованию возможного вращения Вселенной и построению космологических моделей с вращением [3–9]. Такие модели рассматривались в основном в общей теории относительности или теории Эйнштейна–Картана. Интересно установить возможность построения космологических моделей с вращением в рамках релятивистской теории гравитации (РТГ) [10, 11].

Уравнения РТГ [10, 11] для материи и гравитационного поля возьмем в виде

$$\sqrt{-g} \left(R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \right) + \frac{\mu^2}{2} \left(g_{mn} + \gamma_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} g^{pq} \gamma_{pq} \right) = 8\pi T_{mn}, \quad (1)$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0, \quad (2)$$

где μ – масса гравитона, а D_m – ковариантная производная по метрике Минковского. Найти решение уравнений РТГ – это значит построить эффективное риманово многообразие, т.е. найти метрический тензор $g_{mn}(x)$ пространства. В пространстве-времени Минковского используем галилеевы координаты $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Будем рассматривать стационарную космологическую модель с вращением типа модели Геделя, в которой интервал задан соотношением

$$ds^2 = [dt + H(x) dy]^2 - \mathcal{D}^2(x) dy^2 - dx^2 - dz^2, \quad (3)$$

а ненулевые компоненты метрического тензора имеют вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g_{02} &= H(x), & g_{11} &= -1, & g_{22} &= H^2 - \mathcal{D}^2, & g_{33} &= -1, \\ g^{00} &= 1 - \frac{H^2}{\mathcal{D}^2}, & g^{02} &= \frac{H}{\mathcal{D}^2}, & g^{11} &= -1, & g^{22} &= -\frac{1}{\mathcal{D}^2}, & g^{33} &= -1. \end{aligned}$$

*Пермский государственный университет, Пермь, Россия

Детерминант метрического тензора g_{mn} равен

$$g = \det g_{mn} = -\mathcal{D}^2.$$

Компоненты тензора Риччи находим по формуле

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma + \Gamma_{\delta\sigma}^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \Gamma_{\delta\beta}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta. \quad (4)$$

Метрика (3) удовлетворяет уравнениям (2) при $\mathcal{D} \equiv 1$. Таким образом, для построения космологической модели с вращением в РТГ будем использовать метрику

$$ds^2 = [dt + H(x) dy]^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5)$$

В случае отсутствия материальных источников $H(x) \equiv 0$, т.е. имеем пространство-время Минковского. Далее мы учитываем в уравнениях (1), что $\sqrt{-g} = 1$.

Для метрики (5) с учетом (4) ненулевые компоненты $R_{\alpha\beta}$ равны

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}H'^2, & R_{02} &= \frac{1}{2}(H'' + HH'^2), & R_{11} &= \frac{1}{2}H'^2, \\ R_{22} &= \frac{1}{2}H'^2 + \frac{1}{2}H'^2 H^2 + HH'', \end{aligned}$$

здесь $H' = dH/dx$. Скалярная кривизна $R = -(1/2)H'^2$.

Используя метод работы [12], можно показать, что в пространстве-времени с метрикой (5) отсутствуют замкнутые времениподобные кривые при выполнении условия

$$H^2 - 1 \leq 0. \quad (6)$$

Предполагаем, что гравитационное поле модели создает комбинация источников: анизотропной жидкости, поля излучения, скалярного поля, потока тепла.

Тензор энергии-импульса (ТЭИ) анизотропной жидкости, который уже использовался в космологии с вращением [7], имеет вид

$$T_{mn}^{(1)} = (\rho + \gamma)u_m u_n + (\sigma - \gamma)\chi_m \chi_n - \gamma g_{mn},$$

где σ, γ – компоненты анизотропного давления, ρ – плотность энергии, χ_m – вектор анизотропии, u_n – 4-скорость жидкости,

$$u_\nu u^\nu = 1, \quad \chi_\mu \chi^\mu = -1, \quad \chi^\mu u_\mu = 0, \quad \sigma > \gamma \quad (\nu, \mu = 0, 1, 2, 3).$$

Пусть $u^\mu = \delta_0^\mu$. Вращение жидкости в эффективном римановом пространстве описывается тензором вращения

$$\omega_{\alpha\beta} = \dot{u}_{[\alpha} u_{\beta]} - u_{[\alpha;\beta]}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

При этом скаляр вращения (который можно интерпретировать как угловую скорость вращения модели) для метрики (5) имеет вид

$$\omega = \left(\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} |H^i|.$$

Если считать, что $\chi^\nu = \delta_1^\nu$, то ненулевые компоненты ТЭИ анизотропной жидкости следующие:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{02} = \rho H, \quad T_{11} = \sigma, \quad T_{33} = \gamma, \quad T_{22} = \rho H^2 + \gamma.$$

ТЭИ поля излучения

$$T_{mn}^{(2)} = w k_m k_n, \quad w > 0,$$

причем

$$k_\nu k^\nu = 0. \quad (7)$$

Положим $k^\mu = (k^0, 0, k^2, 0)$. Тогда на основании (7) для метрики (5) можно считать, что

$$k^0 = (1 - H)k^2.$$

Для ненулевых компонент ТЭИ поля излучения в этом случае имеем

$$T_{00}^{(2)} = s, \quad T_{22}^{(2)} = s(H - 1)^2, \quad T_{20}^{(2)} = T_{02}^{(2)} = s(H - 1), \\ s = w k^2{}^2.$$

В работах [4, 5] для космологических моделей с вращением уже учитывался поток тепла. ТЭИ потока тепла имеет вид

$$T_{mn}^{(3)} = q_m u_n + q_n u_m,$$

где q_m – вектор потока тепла. Будем считать, что $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 = 0$, $q_0 = 0$. При этом, как и в других работах, предполагается, что в нашей модели тепло выделяется в ходе некоторых экзотермических процессов (подобно производству тепла в звездах). Согласно [4] вектор потока тепла q_A связан с температурой T в жидкости следующим образом:

$$q_A = k(T, x, y, z, t) h_A^B (T_{1B} - T a_B), \quad (8)$$

где $k(T, x, y, z, t)$ – коэффициент теплопроводности, $k > 0$, $h_{AB} = \eta_{AB} - u_A u_B$ – проекционный тензор, a_B – ускорение в тетрадной форме.

Ненулевые компоненты ТЭИ потока тепла будут

$$T_{02}^{(3)} = q_2, \quad T_{22}^{(3)} = 2q_2 H.$$

ТЭИ безмассового скалярного поля имеет вид

$$T_{mn}^{(4)} = \psi_{,m} \psi_{,n} - \frac{1}{2} g_{mn} (\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha}),$$

причем ψ удовлетворяет уравнению

$$(\sqrt{-g}\psi_{,\alpha}g^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0. \quad (9)$$

Для метрики (5) простейшее решение уравнения (9) выглядит следующим образом:

$$\psi = az, \quad a = \text{const}. \quad (10)$$

В этом случае для (10) имеем ненулевые компоненты ТЭИ скалярного поля

$$T_{00}^{(4)} = \frac{a^2}{2}, \quad T_{02}^{(4)} = \frac{a^2}{2}H, \quad T_{11}^{(4)} = -\frac{a^2}{2}, \quad T_{22}^{(4)} = \frac{a^2}{2}(H^2 - 1), \\ T_{33}^{(4)} = \frac{a^2}{2}.$$

ТЭИ всей материи есть

$$T_{mn} = T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^{(2)} + T_{mn}^{(3)} + T_{mn}^{(4)}.$$

Тогда уравнения (1) для метрики (5) приводят к следующей цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}H'^2 &= 8\pi \left(\rho + s + \frac{a^2}{2} \right), \\ \frac{1}{2}H'' + \frac{3}{4}HH'^2 &= 8\pi \left[\rho H + s(H - 1) + \frac{a^2}{2}H + q_2 \right], \\ \frac{1}{4}H'^2 &= 8\pi \left(\sigma - \frac{a^2}{2} \right), \\ \frac{1}{4}H'^2 + \frac{3}{4}H^2H'^2 + HH'' &= 8\pi \left[\rho H^2 + \gamma + s(H - 1)^2 + \frac{a^2}{2}(H^2 - 1) + 2q_2H \right], \\ -\frac{1}{4}H'^2 &= 8\pi \left(\gamma + \frac{a^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) члены, содержащие массу гравитона, отброшены вследствие их чрезвычайной малости. Решение уравнений (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{32\pi}H'^2 + \frac{a^2}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{32\pi}H'^2 - \frac{a^2}{2} \quad (\sigma > \gamma), \\ s &= \frac{1}{16\pi}H'^2 + a^2, \quad \rho = \frac{1}{32\pi}H'^2 - \frac{3}{2}a^2, \\ q_2 &= \frac{1}{16\pi}(H'^2 + H'') + a^2. \end{aligned}$$

Если положить $w = 1$, то

$$k^2 = \left(\frac{H'^2}{16\pi} + a^2 \right)^{1/2}, \quad k^0 = (1 - H) \left(\frac{H'^2}{16\pi} + a^2 \right)^{1/2}.$$

В качестве $H = H(x)$ можно взять следующие функции:

$$H = \alpha \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad H = \beta \sin(mx),$$

где $m, \alpha, \beta = \text{const}$, причем условие (6) приводит к неравенствам

$$|\alpha| \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq 1, \quad |\beta| \leq 1.$$

К сожалению, в нашем решении не всегда удастся удовлетворить условию $\rho > 0$. Заметим, что в космологических моделях квантовой теории материальных полей во внешнем гравитационном поле плотность энергии поляризованного вакуума может быть отрицательной, а давление вакуума положительным.

Константы α и β выбраны так, что

$$q_2 > 0.$$

Метрику (5) можно записать в виде

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2,$$

где 1-формы $\theta^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + H(x) dy, & \theta^1 &= dx, \\ \theta^2 &= dy, & \theta^3 &= dz. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) найдем

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= e^{(1)}_1 = e^{(3)}_3 = 1, & e^{(0)}_2 &= H, & e^{(2)}_2 &= 1, \\ e^0_{(0)} &= e^1_{(1)} = e^3_{(3)} = 1, & e^0_{(2)} &= -H, & e^2_{(2)} &= 1. \end{aligned}$$

Если считать, что $T = T(y)$, $k = k(x, y)$, то уравнения (8) приводят к уравнению

$$q_{(2)} = q_2 = k(x, y) \frac{dT}{dy}. \tag{13}$$

Уравнение (13) будет выполнено при

$$T = \varepsilon e^{My} > 0, \quad k(x, y) = \frac{q_2(x) e^{-My}}{\varepsilon M} > 0,$$

M, ε – положительные постоянные.

В работах [13, 14] исследовались условия причинности в РТГ. В РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени

эквивалентно свободному движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени. Для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0, \quad (14)$$

а с другой стороны, для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0. \quad (15)$$

Для одновременного выполнения условий (14), (15) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора u^ν , т.е.

$$\gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (16)$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \leq 0. \quad (17)$$

Физический смысл имеют только такие решения уравнений РТГ, которые удовлетворяют этому условию. В нашем случае условия (16), (17) запишутся в виде

$$u^{0^2} - u^{1^2} - u^{2^2} - u^{3^2} = 0, \quad (18)$$

$$u^{0^2} + 2Hu^0 u^2 - u^{1^2} + (H^2 - 1)u^{2^2} - u^{3^2} \leq 0. \quad (19)$$

Введем единичный вектор e^α ($\alpha = 1, 2, 3$) в евклидовом пространстве, где

$$e^1 = \frac{u^1}{u^0}, \quad e^2 = \frac{u^2}{u^0}, \quad e^3 = \frac{u^3}{u^0}. \quad (20)$$

Тогда из (18)–(20) можно получить, что

$$2He^2 + H^2 e^{2^2} \leq 0,$$

откуда

$$-2 \leq He^2 \leq 0. \quad (21)$$

Для произвольного изотропного вектора условию (21) удовлетворить нельзя. Можно сказать, что при очень малых H (21) может выполняться лишь приближенно, что будет согласовываться и с условием (6).

В заключение укажем, что можно ожидать получения более реалистических решений, чем найденное нами, при использовании в качестве источников гравитации электромагнитного поля, а также спиновой жидкости Вейсенхоффа [8]. Представляет интерес изучить перспективу применения для построения космологии с вращением в РТГ нестационарной метрики типа метрики Геделя [6–8], когда интервал задан соотношением

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [dx^2 + \lambda a^2(x) dy^2 + dz^2] - 2R(t)b(x) dy dt.$$

Список литературы

- [1] *P. Birch.* Nature. 1982. V. 298. № 5873. P. 451.
- [2] *P. P. Андреасян, Т. Г. Аршакян, А. Н. Макаров, М. А. Мнацаканян.* В кн.: Тезисы докл. VII Совет. гравит. конф. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1988. С. 398–400.
- [3] *M. J. Reboucas, J. Tiomno.* Phys. Rev. D. 1983. V. 28. № 6. P. 1251.
- [4] *J. M. Bradley, E. Sviestins.* Gen. Rel. Grav. 1984. V. 16. № 12. P. 1119.
- [5] *M. J. Reboucas.* Nuovo Cimento. 1985. V. 90B. № 2. P. 204.
- [6] *Д. Д. Иваненко, В. Г. Кречет, В. Ф. Панов.* В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Под ред. В. Н. Мельникова. М.: Энергоатомиздат, 1986. Вып. 17. С. 8–15.
- [7] *Д. Д. Иваненко, В. Ф. Панов.* В кн.: Проблемы гравитации. Под ред. Д. В. Гальцова. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 168–175.
- [8] *Yu. N. Obukhov, V. A. Korotky.* Class. Quantum Gravit. 1987. V. 4. P. 1633.
- [9] *В. Ф. Панов.* Деп. в ВИНТИ, № 1947-В90. М.: ВИНТИ, 1990.
- [10] *А. А. Логунов.* Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
- [11] *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [12] *S. C. Maitra.* J. Math. Phys. 1966. V. 7. № 6. P. 1025.
- [13] *А. А. Логунов.* ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 191.
- [14] *А. А. Логунов.* УФН. 1995. Т. 165. № 2. С. 187.

Поступила в редакцию 21.VII.1997 г.