Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Поперечная электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы в подходе Мермина, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 1, 132–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:52:27

© 2013 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОДХОДЕ МЕРМИНА

Выведены формулы для поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости в квантовой столкновительной плазме. Используется кинетическое уравнение для матрицы плотности в релаксационном приближении в пространстве импульсов. Показано, что, когда постоянная Планка стремится к нулю, выведенная формула переходит в классическую, а когда стремится к нулю частота столкновений электронов (т. е. плазма переходит в бесстолкновительную), выведенные формулы переходят в полученные ранее Линдхардом. Показано также, что, когда волновое число стремится к нулю, квантовая проводимость переходит в классическую. Проведено сравнение выведенной проводимости с проводимостью по Линдхарду и с классической проводимостью.

Ключевые слова: Линдхард, Мермин, квантовая столкновительная плазма, проводимость, проницаемость, матрица плотности, коммутатор, вырожденная плазма.

DOI: 10.4213/tmf8422

1. ВВЕДЕНИЕ

В хорошо известной работе Мермина [1] на основе анализа неравновесной матрицы плотности в τ -приближении было получено выражение для продольной диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы. Ранее в работе Линдхарда [2] были получены выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей квантовой бесстолкновительной плазмы. Затем Кливер и Фукс показали [3], что прямое обобщение формул Линдхарда на случай столкновительной плазмы (путем замены $\omega \rightarrow \omega + i/\tau$) некорректно. Этот недостаток для продольной диэлектрической проницаемости был преодолен в работе [1]. До настоящего времени не получено корректного выражения для поперечной диэлектрической проницаемости в случае вырожденной квантовой столкновительной плазмы. Цель настоящей работы – восполнить этот пробел.

Свойства электрической проводимости и диэлектрической проницаемости, рассчитанных по формулам Линдхарда [2], подробно изучались в монографии [4].

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

Поперечная диэлектрическая проницаемость необходима для описания оптических свойств металлов, в частности для описания скин-эффекта [5]–[7] и поверхностных плазменных колебаний [8], [9]. Диэлектрическая проницаемость также необходима для описания энергетических потерь заряженных частиц в твердых телах [10]. В настоящее время растет интерес к изучению различных свойств квантовой плазмы (см, например, работы [11]–[17]).

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Пусть векторный потенциал электромагнитного поля является гармоническим, т. е. изменяется как $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Мы рассматриваем поперечную проводимость, поэтому выполняется соотношение $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$. Связь между векторным потенциалом и напряженностью электрического поля дается следующим выражением: $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = -(ic/\omega)\mathbf{E}(\mathbf{q})$. Равновесная матрица плотности имеет вид

$$\tilde{\rho} = (1 + e^{(H-\mu)/k_B T})^{-1}, \quad (2.1)$$

где T – температура плазмы, k_B – постоянная Больцмана, μ – химический потенциал плазмы, H – гамильтониан. В линейном приближении гамильтониан записывается как

$$H = \frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}),$$

где $\mathbf{p}$ – оператор импульса, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, постоянные e и m – заряд и масса электрона, c – скорость света. Мы можем представить этот гамильтониан в виде суммы двух операторов: $H = H_0 + H_1$, где

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad H_1 = -\frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}).$$

Рассмотрим кинетическое уравнение [1] для матрицы плотности Шредингера с интегралом столкновений в форме τ -приближения:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] + \frac{i\hbar}{\tau}(\tilde{\rho} - \rho), \quad (2.2)$$

где $\nu = 1/\tau$ – эффективная частота столкновений частиц плазмы, τ – характерное время между двумя последовательными столкновениями, $\hbar$ – постоянная Планка, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ – коммутатор, $\tilde{\rho}$ – равновесная матрица плотности. В работе [18] показано, что частота столкновений ν может зависеть от частоты колебаний поля ω .

В линейном приближении по внешнему полю мы ищем матрицу плотности в виде

$$\rho = \tilde{\rho}^{(0)} + \rho^{(1)}, \quad (2.3)$$

где $\rho^{(1)}$ – поправка (возмущение) к равновесной матрице плотности, обусловленная наличием электромагнитного поля, $\tilde{\rho}^{(0)}$ – равновесная матрица плотности, отвечающая “равновесному” оператору Гамильтона H_0 . Представим равновесную матрицу плотности $\tilde{\rho}$ (2.1) в виде

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(0)} + \tilde{\rho}^{(1)} \quad (2.4)$$

и рассмотрим коммутатор $[H, \tilde{\rho}]$. В линейном приближении этот коммутатор равен

$$[H, \tilde{\rho}] = [H_0, \tilde{\rho}^{(1)}] + [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] \quad (2.5)$$

и $[H, \tilde{\rho}] = 0$. Для коммутаторов из правой части равенства (2.5) мы находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \tilde{\rho}^{(1)}] | \mathbf{k}_2 \rangle &= (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \\ \langle \mathbf{k}_1 | [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] | \mathbf{k}_2 \rangle &= (f_{\mathbf{k}_1} - f_{\mathbf{k}_2}) \langle \mathbf{k}_1 | H_1 | \mathbf{k}_2 \rangle = \\ &= \frac{e}{2mc} (f_{\mathbf{k}_1} - f_{\mathbf{k}_2}) (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$f_{\mathbf{k}} = (1 + e^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/k_B T})^{-1}, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Из соотношений (2.4)–(2.6) вытекает, что

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = -\frac{e\hbar}{2mc} \frac{f_{\mathbf{k}_1} - f_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (2.7)$$

С помощью соотношений (2.3)–(2.5) мы линеаризуем кинетическое уравнение (2.2). Получаем следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = [H_0, \rho^{(1)}] + [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] + i\hbar \nu (\tilde{\rho}^{(1)} - \rho^{(1)}). \quad (2.8)$$

Заметим, что возмущение $\rho^{(1)} \sim e^{-i\omega t}$, таким образом, уравнение (2.8) принимает вид $(\hbar\omega + i\hbar\nu)\rho^{(1)} = [H_0, \rho^{(1)}] + [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] + i\hbar\nu\tilde{\rho}^{(1)}$. Отсюда следует, что

$$(\hbar\omega + i\hbar\nu) \langle \mathbf{k}_1 | \rho^{(1)} | \mathbf{k}_2 \rangle = \langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \rho^{(1)}] | \mathbf{k}_2 \rangle + \langle \mathbf{k}_1 | [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] | \mathbf{k}_2 \rangle + i\hbar\nu \langle \mathbf{k}_1 | \tilde{\rho}^{(0)} | \mathbf{k}_2 \rangle. \quad (2.9)$$

Здесь

$$\langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \rho^{(1)}] | \mathbf{k}_2 \rangle = (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \langle \mathbf{k}_1 | \rho^{(1)} | \mathbf{k}_2 \rangle = (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \rho^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Преобразуем равенство (2.9) к виду

$$\begin{aligned} (\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2}) \rho^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) &= \\ &= \frac{e\hbar}{2mc} (f_{\mathbf{k}_1} - f_{\mathbf{k}_2}) (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + i\hbar\nu \tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этом равенстве заменим с учетом (2.7). Из полученного уравнения находим

$$\rho^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \frac{e\hbar}{2mc} \Xi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) [f_{\mathbf{k}_1} - f_{\mathbf{k}_2}] (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (2.10)$$

где

$$\Xi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2} - i\hbar\nu}{(E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2})(\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})}.$$

В уравнении (2.10) мы положим $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{q}$, тогда

$$\langle \mathbf{k}_1 | \rho^{(1)} | \mathbf{k}_2 \rangle = \langle \mathbf{k} | \rho^{(1)} | \mathbf{k} - \mathbf{q} \rangle = \rho^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{e\hbar}{mc} \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) [f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}] \mathbf{k} \mathbf{A}(\mathbf{q}), \quad (2.11)$$

где

$$\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})(\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}.$$

3. ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu)$ определяется как

$$\mathbf{j} = \frac{e}{8\pi^3 m} \int \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \rho + \rho \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle d\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Подставим (2.3) в интеграл и заметим, что

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \mathbf{p} \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{p} \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle &= 2\hbar \mathbf{k} \rho^{(0)}(\mathbf{q}), \\ \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \mathbf{A} \tilde{\rho}^{(0)} + \tilde{\rho}^{(0)} \mathbf{A} \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle &= \mathbf{A}(\mathbf{q}) \left[\tilde{\rho}^{(0)} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) + \tilde{\rho}^{(0)} \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \right], \\ \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{\rho}^{(0)} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) d\mathbf{k} &= \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{\rho}^{(0)} \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) d\mathbf{k} = \frac{N}{2}, \end{aligned}$$

где N – числовая плотность (концентрация) плазмы. Следовательно, плотность тока равна

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) + \frac{e\hbar}{4\pi^3 m} \int \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \rho^{(1)} \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle \mathbf{k} d\mathbf{k}; \quad (3.2)$$

здесь первое слагаемое есть не что иное, как калибровочная плотность тока. С помощью очевидной замены переменных в интеграле из (3.2) это соотношение можно преобразовать к виду

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) + \frac{e\hbar}{4\pi^3 m} \int \langle \mathbf{k} | \rho^{(1)} | \mathbf{k} - \mathbf{q} \rangle \mathbf{k} d\mathbf{k}. \quad (3.3)$$

Подставляя (2.11) в подынтегральное выражение в (3.3), получаем следующее выражение для плотности тока:

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c} \frac{1}{4\pi^3} \int [\mathbf{k} \mathbf{A}(\mathbf{q})] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k} d\mathbf{k}. \quad (3.4)$$

Направим ось x вдоль вектора $\mathbf{q}$, а ось y – вдоль вектора $\mathbf{A}$. Тогда предыдущее векторное равенство (3.4) может быть переписано в виде трех скалярных:

$$\begin{aligned} j_y &= -\frac{e^2 N}{mc} A(\mathbf{q}) - \frac{e^2 \hbar^2 A(\mathbf{q})}{m^2 c} \frac{1}{4\pi^3} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) k_y^2 d\mathbf{k}, \\ j_x &= j_z = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что выражение для плотности тока можно представить в следующей инвариантной форме:

$$\mathbf{j} = -\mathbf{A}(\mathbf{q}) \left(\frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 c} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right), \quad \mathbf{k}_{\perp}^2 = \mathbf{k}^2 - \left(\frac{\mathbf{k} \mathbf{q}}{q} \right)^2. \quad (3.5)$$

Разлагая $\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ на дроби, представим плотность тока в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) &= -\mathbf{A}(\mathbf{q}) \left(\frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 c} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2 \hbar^3 \omega}{8\pi^3 m^2 c} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первые два члена в этом соотношении не зависят от частоты ω и определяются диссипативными свойствами материала, которые зависят от частоты столкновений ν . Эти члены являются универсальными параметрами, определяющими диамагнетизм Ландау.

4. ПОПЕРЕЧНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Учитывая связь векторного потенциала с напряженностью электромагнитного поля, а также связь плотности тока с электрическим полем, на основании соотношения (3.5) получаем следующее выражение для поперечной электрической проводимости $\sigma_{\text{tr}}(\mathbf{q}, \omega, \nu)$:

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left(1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})(f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right), \quad (4.1)$$

где $\sigma_0 = e^2 N / m \nu$ – статическая проводимость. С учетом этого равенства напомним выражение для поперечной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{\text{tr}} = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})(f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right), \quad (4.2)$$

где ω_{p} – плазменная (ленгмюровская) частота, $\omega_{\text{p}}^2 = 4\pi e^2 N / m$. Отсюда видно, что выполняется одно из соотношений, называемое правилом f -сумм (см., например, работы [4], [19], [20]) для поперечной диэлектрической проницаемости. Это правило выражается формулой (4.200) из монографии [19]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\text{tr}}(\mathbf{q}, \omega, \nu) \omega d\omega = \pi \omega_{\text{p}}^2.$$

Разлагая $\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ на элементарные дроби, для поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости имеем следующие явные представления:

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left(1 + \frac{\omega J_{\omega} + i\nu J_{\nu}}{\omega + i\nu} \right), \quad \varepsilon_{\text{tr}} = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega J_{\omega} + i\nu J_{\nu}}{\omega + i\nu} \right), \quad (4.3)$$

где

$$J_{\nu} = \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k}, \quad J_{\omega} = \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k}.$$

Вместо вектора $\mathbf{k}$ введем безразмерный вектор $\mathbf{K} = \mathbf{k} / k_{\text{F}}$, где $k_{\text{F}} = p_{\text{F}} / \hbar$ – волновое число Ферми, $p_{\text{F}} = m v_{\text{F}}$ – импульс электрона на поверхности Ферми, v_{F} – скорость электрона на поверхности Ферми. Тогда

$$\mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} = k_{\text{F}}^5 (K^2 - K_x^2) d^3 K = k_{\text{F}}^5 (K_y^2 + K_z^2) d^3 K = k_{\text{F}}^5 K_{\perp}^2 d^3 K,$$

где $K_{\perp}^2 = K^2 - K_x^2 = K_y^2 + K_z^2$. Энергию $E_{\mathbf{k}}$ выразим через энергию Ферми $E_{\text{F}} = m v_{\text{F}}^2 / 2$. Имеем

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{\text{F}}^2}{2m} \mathbf{K}^2 = \frac{p_{\text{F}}^2}{2m} \mathbf{K}^2 = E_{\text{F}} \mathbf{K}^2 \equiv E_{\mathbf{K}}, \quad E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 k_{\text{F}}^2}{2m} \left(\mathbf{K} - \frac{\mathbf{q}}{k_{\text{F}}} \right)^2.$$

Далее обозначим волновой вектор $\mathbf{q}$ через $\mathbf{k}$ и введем безразмерный волновой вектор $\mathbf{q} = \mathbf{k}/k_F$. Тогда

$$E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2 = E_F (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2 = E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}.$$

Следовательно, с учетом последних равенств формулы для интегралов J_ω и J_ν можно переписать в виде

$$J_\nu = \frac{\hbar^2 k_F^5}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{K}} - f_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} K_\perp^2 d^3 K,$$

$$J_\omega = \frac{\hbar^2 k_F^5}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{K}} - f_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} K_\perp^2 d^3 K,$$

где $f_{\mathbf{K}} = (1 + e^{(E_{\mathbf{K}} - \mu)/k_B T})^{-1}$.

5. ВЫРОЖДЕННАЯ ПЛАЗМА

Далее мы будем рассматривать случай вырожденной плазмы. В этом случае

$$f_{\mathbf{K}} = \Theta_{\mathbf{K}} \equiv \Theta(E_F - E_{\mathbf{K}}) = \Theta(1 - \mathbf{K}^2), \quad \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} = \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2),$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда. С учетом этих соотношений выражения для интегралов J_ω и J_ν преобразуются к виду

$$J_\omega = \frac{3E_F}{4\pi} \int \frac{\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} K_\perp^2 d^3 K,$$

$$J_\nu = \frac{3E_F}{4\pi} \int \frac{\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} K_\perp^2 d^3 K. \quad (5.1)$$

Вычисление поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости проведем по формулам (4.3). Вычислим интегралы J_ω и J_ν . Заметим, что

$$E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} = \hbar v_F k \left(K_x - \frac{q}{2} \right), \quad E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu) = \hbar v_F k \left(K_x - \frac{q}{2} - \frac{z}{q} \right),$$

где

$$z = x + iy, \quad x = \frac{\omega}{k_F v_F} = \frac{\hbar\omega}{2E_F}, \quad y = \frac{\nu}{k_F v_F} = \frac{\hbar\nu}{2E_F}, \quad q = \frac{k}{k_F}.$$

С помощью соотношений (5.1) для интегралов J_ω и J_ν получаем следующие выражения:

$$J_\omega = \frac{3}{8\pi q} \int \frac{\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{K_x - q/2 - z/q} K_\perp^2 d^3 K, \quad J_\nu = \frac{3}{8\pi q} \int \frac{\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{K_x - q/2} K_\perp^2 d^3 K.$$

Преобразуем первый интеграл:

$$J_\omega = \frac{3}{8\pi q} \int \frac{\Theta(1 - \mathbf{K}^2) - \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2)}{K_x - z/q - q/2} K_\perp^2 d^3 K = \frac{3}{16} \int_{-1}^1 \frac{(1 - t^2)^2}{(t - z/q)^2 - q^2/4} dt.$$

Аналогично второй интеграл можно представить в виде

$$J_\nu = \frac{3}{8\pi q} \int \frac{\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}}{K_x - q/2} K_\perp^2 d^3 K = \frac{3}{16} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{t^2 - q^2/4} dt = \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{t^2 - q^2/4} dt.$$

Пусть $x_p = \omega_p/k_F v_F = \hbar\omega_p/2E_F$ – безразмерная плазменная частота. Вернемся к формулам (4.3) и представим их в безразмерных параметрах:

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} \left(1 + \frac{xJ_\omega + iyJ_\nu}{x + iy} \right), \quad \varepsilon_{\text{tr}} = 1 - \frac{x_p^2}{x^2} \left(1 + \frac{xJ_\omega + iyJ_\nu}{x + iy} \right).$$

Перепишем эти соотношения как

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} \left(1 + \frac{3xT_1(q, z) + 3iyT_0(q)}{16z} \right), \quad \varepsilon_{\text{tr}} = 1 - \frac{x_p^2}{x^2} \left(1 + \frac{3xT_1(q, z) + 3iyT_0(q)}{16z} \right), \quad (5.2)$$

где $T_0(q) = 2T_1(q, 0)$ и

$$\begin{aligned} T_1(q, z) &= \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{(t - z/q)^2 - q^2/4} dt = \\ &= -\frac{10}{3} + \frac{4z^2}{q^2} + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{q} \left[\left(1 - \frac{z^2}{q^2} \right)^2 + \frac{q^4}{16} - \frac{q^2}{2} + \frac{3z^2}{2} \right] \ln \frac{(1 - q/2)^2 - z^2/q^2}{(1 + q/2)^2 - z^2/q^2} - \\ &\quad - \frac{zq}{2} \left[1 + \frac{4}{q^2} \left(1 - \frac{z^2}{q^2} \right) \right] \ln \frac{(1 - z/q)^2 - q^2/4}{(1 + z/q)^2 - q^2/4}. \end{aligned}$$

Для сравнения представим формулу Линдхарда [2] в наших обозначениях следующим образом:

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}^{\text{Lin}}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} + \frac{3iy}{16x} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{(t - z/q)^2 - q^2/4} dt. \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.2) и (5.3) видно, что мнимые части поперечных электрических проводимостей из настоящей работы и из работы Линдхарда при $y \rightarrow 0$ совпадают.

Представим формулу для поперечной электрической проводимости в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} &= \frac{iy}{x} \left\{ 1 + \frac{3iy}{8x} \left(-\frac{5}{3} + \frac{q^2}{4} + \frac{(q^2 - 4)^2}{16q} \ln \frac{2 - q}{2 + q} \right) + \frac{3x}{16z} \left[-\frac{10}{3} + \frac{4z^2}{q^2} + \frac{q^2}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{q} \left(\left(1 - \frac{z^2}{q^2} \right)^2 + \frac{q^4}{16} - \frac{q^2}{2} + \frac{3z^2}{2} \right) \ln \frac{(1 - q/2)^2 - z^2/q^2}{(1 + q/2)^2 - z^2/q^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{zq}{2} \left(1 + \frac{4}{q^2} \left(1 - \frac{z^2}{q^2} \right) \right) \ln \frac{(1 - z/q)^2 - q^2/4}{(1 + z/q)^2 - q^2/4} \right] \right\}. \end{aligned}$$

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Исследуем частные случаи электрической проводимости. Рассмотрим формулу (4.3) и преобразуем ее к виду

$$\frac{\sigma_{\text{tr}}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[1 + \frac{3}{8\pi(\omega + i\nu)q} \int \left(\frac{i\nu}{K_x - q/2} + \frac{\omega}{K_x - q/2 - z/q} \right) (\Theta_{\mathbf{K}} - \Theta_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}) K_\perp^2 d^3 K \right].$$

Рис. 1. Действительная (а) и мнимая (б) части поперечной электрической проводимости как функции безразмерной частоты колебаний x при $y = 0.01$ и различных значениях безразмерного волнового числа q .

Подынтегральные выражения содержат функцию $\varphi(\mathbf{q}) = \Theta(1 - K^2) - \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2)$. В линейном приближении мы получаем

$$\varphi(\mathbf{q}) = -2\delta(1 - K^2)K_x q = -\delta(1 - K)K_x q.$$

Заметим, что

$$\frac{3}{8\pi} \int \delta(1 - K) K_{\perp}^2 d^3 K = 1, \quad (6.1)$$

Рис. 2. Зависимость модуля отношения σ_{tr}/σ_0 от безразмерной частоты колебаний плазмы (кривая 1) в сравнении с аналогичной зависимостью проводимости по Линдхарду (кривая 2) и классической проводимости (кривая 3) при $y = 0.1$, $q = 1$.

следовательно, выражение для электрической проводимости можно преобразовать к виду

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[\frac{\omega}{\omega + i\nu} - \frac{3i\nu q}{16\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{\delta(1-K)}{K_x - q/2} K_{\perp}^2 d^3 K - \frac{3\omega}{8\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{K_x \delta(1-K)}{K_x - z/q - q/2} K_{\perp}^2 d^3 K \right]. \quad (6.2)$$

Видно, что $\sigma_{tr} \rightarrow \sigma_0 i\nu/(\omega + i\nu)$, при $q \rightarrow 0$ и при $\omega = 0$ мы получаем в точности статическую проводимость: $\sigma_{tr} = \sigma_0$.

Покажем теперь, что при малых q формула (6.2) приводит к известному выражению для проводимости вырожденной фермиевской плазмы. В самом деле, заметим, что при малых q первый интеграл из (6.2) пропорционален q^2 . Отбросим этот интеграл. В знаменателе второго интеграла пренебрежем членом $q/2$, ибо $q/2 \ll |z|/q$. В результате для малых q получаем

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \left[1 - \frac{3}{8\pi} \int \frac{\delta(1-K)K_x}{K_x - z/q} K_{\perp}^2 d^3 K \right]. \quad (6.3)$$

Пользуясь снова равенством (6.1), на основании (6.3) получаем соотношение

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = -\frac{3y}{8\pi q} \int \frac{\delta(1-K)}{K_x - q/2} K_{\perp}^2 d^3 K,$$

которое приводит к известному выражению для электрической проводимости в вырожденной фермиевской плазме:

$$\sigma_{\text{tr}}^{\text{classic}} = -\frac{3iy\sigma_0}{4q} \int_{-1}^1 \frac{1-\mu^2}{\mu-z} d\mu = \frac{3iy\sigma_0}{4q} \left[\frac{2z}{q} + (z^2 - q^2) \ln \frac{z-q}{z+q} \right].$$

На рис. 1 представлены рассчитанные по формулам настоящей работы зависимости действительной и мнимой частей поперечной электрической проводимости от безразмерной частоты колебаний x при $y = 0.01$. Отметим, что, например, для калия [3] $\omega_p = 6.5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $v_F = 8.52 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а значению $y = 0.01$ отвечает частота $\nu = 6.3 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Различные кривые на рис. 1 отвечают значениям безразмерного волнового числа $q = 0.1, 0.25, 0.5$. Видно, что действительная часть является монотонно убывающей функцией, а мнимая часть имеет максимум, величина которого убывает с ростом волнового числа. С ростом частоты колебаний плазмы и действительная, и мнимая части убывают до нуля.

На рис. 2 показана зависимость модуля отношения $\sigma_{\text{tr}}/\sigma_0$ от безразмерной частоты колебаний плазмы, рассчитанная по формулам настоящей работы (кривая 1), в сравнении с аналогичными зависимостями для проводимости по Линдхарду (кривая 2) и классической проводимости (кривая 3); для всех кривых на рис. 2 взяты $y = 0.1, q = 1$. Из рис. 2 видно, что при $x \rightarrow 0$ проводимость по Линдхарду совпадает с проводимостью квантовой плазмы, а при $x \rightarrow \infty$ совпадают все три проводимости.

Рис. 3 позволяет сравнить зависимости действительной части и мнимой части отношения $\sigma_{\text{tr}}/\sigma_0$ от безразмерного волнового числа q : приведены результаты расчета по нашим формулам (кривые 1), по формулам Линдхарда (кривые 2) и по формулам для классической проводимости (кривые 3). Из рис. 3 видно, что при малых значениях частоты столкновений проводимость по Линдхарду практически совпадает с проводимостью квантовой плазмы при малых значениях волнового числа.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена формула для электрической проводимости в квантовой столкновительной плазме. Для этой цели используется кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме релаксационной модели в пространстве импульсов. Исследованы различные частные случаи. Выделен и исследован случай вырожденной фермиевской плазмы. Проведено сравнение графиков проводимости, полученных по формулам из настоящей работы, с проводимостью по Линдхарду и с классической проводимостью.

Список литературы

- [1] N. D. Mermin, *Phys. Rev. B*, **1**:5 (1970), 2362–2363.
- [2] J. Lindhard, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **28**:8 (1954), 1–57.
- [3] K. L. Kliewer, R. Fuchs, *Phys. Rev.*, **181**:2 (1969), 552–558.
- [4] M. Dressel, G. Grüner, *Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [5] A. P. van Gelder, *Phys. Rev.*, **187**:3 (1969), 833–842.
- [6] D. C. Mattis, J. Bardeen, *Phys. Rev.*, **111**:2 (1958), 412–417.
- [7] Н. А. Зимбовская, *УФН*, **181**:8 (2011), 793–826.

- [8] W. E. Jones, K. L. Kliewer, R. Fuchs, *Phys. Rev.*, **178**:3 (1969), 1201–1203.
- [9] J. M. Pitarke, V. M. Silkin, E. V. Chulkov, P. M. Echenique, *Rep. Prog. Phys.*, **70**:1 (2007), 1–87, arXiv:cond-mat/0611257.
- [10] J. E. Valdes, P. Vargas, N. R. Arista, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B*, **174**:1–2 (2001), 9–15.
- [11] D. Anderson, B. Hall, M. Lisak, M. Marklund, *Phys. Rev. E*, **65**:4 (2002), 046417, 5 pp., arXiv:quant-ph/0305102.
- [12] П. К. Шукла, Б. Элиассон, *УФН*, **180**:1 (2010), 55–82.
- [13] B. Eliasson, P. K. Shukla, *J. Plasma Phys.*, **76**:1 (2010), 7–17, arXiv:0911.4594.
- [14] A. Wierling, *Interpolation between static local field corrections and the Drude model by a generalized Mermin approach*, arXiv:0812.3835.
- [15] G. Brodin, M. Marklund, G. Manfredi, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:17 (2008), 175001, 4 pp., arXiv:0802.0169.
- [16] G. Manfredi, F. Haas, *Phys. Rev. B*, **64**:7 (2001), 075316, 7 pp., arXiv:cond-mat/0203394.
- [17] G. Manfredi, “How to model quantum plasmas”, *Topics in Kinetic Theory* (Toronto, Canada, March 24–26, 2004), Fields Institute Communications, **46**, eds. T. Passot, C. Sulem, P. L. Sulem, AMS, Providence, RI, 2005, 263–287, arXiv:quant-ph/0505004.
- [18] H. Reinholz, G. Röpke, *Phys. Rev. E*, **85**:3 (2012), 036401, 16 pp.
- [19] D. Peins, P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids*, v. 1: *Normal Fermi Liquids*, Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.
- [20] P. C. Martin, *Phys. Rev.*, **161**:1 (1967), 143–155.

Поступила в редакцию 8.10.2012,
после доработки 11.11.2012