Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 300–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 11:58:44

© 2013 г.

У. А. Розиков*, Р. М. Хакимов†

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучается модель Поттса на дереве Кэли. Показано, что для этой модели с нулевым внешним полем периодические меры Гиббса на некоторых инвариантных множествах являются трансляционно-инвариантными. Кроме того, найдены условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические меры Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель Поттса, мера Гиббса, периодические меры, трансляционно-инвариантные меры.

DOI: 10.4213/tmf8423

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Поттса является обобщением модели Изинга, которая хорошо изучена на решетке $\mathbb{Z}^d$. Понятие меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли вводится обычным образом (см. монографии [1]–[3]).

В работе [4] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантных и несчетное число не трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Результаты работы [4] для модели Поттса с конечным числом состояний в работе [5] обобщены на дерево Кэли произвольного (конечного) порядка.

В работе [6] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [7] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

Для ознакомления с другими свойствами модели Поттса на дереве Кэли см., например, работы [8]–[14]. Несмотря на многочисленность работ, посвященных модели

*Институт математики, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru

†Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: rustam-7102@rambler.ru

Поттса на дереве Кэли, она изучена мало по сравнению с моделью Изинга. Например, нет результатов о периодических и слабопериодических мерах Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.

Настоящая работа посвящена периодическим мерам Гиббса модели Поттса на дереве Кэли. В разделе 2 вводятся основные определения и рекуррентные уравнения. В разделе 3 показано, что модель Поттса (с внешним полем $\alpha \in \mathbb{R}$) имеет только периодические меры Гиббса с периодом два. В разделе 4 рассмотрен случай $\alpha = 0$ и на некоторых инвариантах доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические меры Гиббса, найдены в разделе 5.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин Im графа Γ^k , L – множество его ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями*; мы вводим обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется как минимальное значение d , для которого найдутся $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V$ такие, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – ближайшие соседи.

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \quad (1)$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Мы рассмотрим модель, где спинные переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} \delta_{1\sigma(x)}, \quad (2)$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ – внешнее поле, $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи и δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right\}, \quad (3)$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, Z_n^{-1} – нормирующий множитель; в формуле (3) $\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}$ – совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{1\sigma(x)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (3) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной мерой Гиббса, соответствующей гамильтониану (2) и векторнозначной функции h_x , $x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x , обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1 [6]. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, определенное выражением (3), является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место равенство*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \quad (5)$$

где $F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow F(h, \theta, \alpha) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется как

$$F_i = \alpha \beta \delta_{1i} + \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}, \quad \theta = e^{J\beta},$$

$S(x)$ – множество прямых потомков точки x .

Пусть $\hat{G}_k$ – подгруппа группы G_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для любого $x \in G_k$, $y \in \hat{G}_k$.

G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ -периодической совокупности векторов h .

3. ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\theta \neq 1$. Равенство $F(h, \theta, \alpha) = F(u, \theta, \alpha)$ выполняется тогда и только тогда, когда $h = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из $h = u$ следует $F(h, \theta, \alpha) = F(u, \theta, \alpha)$, очевидно. Докажем обратное, т.е. покажем, что равенство $F(h, \theta, \alpha) = F(u, \theta, \alpha)$ влечет за собой $h = u$.

Введем обозначения $e^{h_i} = z_i$, $e^{u_i} = t_i$, $e^{F_i(h)} = K_i(h)$. Надо показать, что из $K_i(h) - K_i(u) = 0$ следует, что $h - u = 0$. Действительно, рассмотрим разность

$$K_i(h) - K_i(u) = e^{\alpha\beta\delta_{1i}} \times \frac{[(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1](\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j) - [(\theta - 1)t_i + \sum_{j=1}^{q-1} t_j + 1](\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j)}{(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j)(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j)} = 0.$$

Раскрыв скобки в числителе и сделав некоторые преобразования, получаем

$$K_i(h) - K_i(u) = M_i \left[\left(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j \right) (z_i - t_i) + (1 - t_i) \sum_{j=1}^{q-1} (z_j - t_j) \right] = 0,$$

где

$$M_i = \frac{e^{\alpha\beta\delta_{1i}}(\theta - 1)}{(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j)(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j)}.$$

Отсюда, введя обозначения $a_i = z_i - t_i$, $i = \overline{1, q-1}$, получим систему уравнений относительно переменных a_i , $i = \overline{1, q-1}$:

$$K_i(h) - K_i(u) = \left(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j \right) a_i + (1 - t_i)(a_1 + \dots + a_{q-1}) = 0,$$

которая, как известно, имеет нулевое решение, если определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} \theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j + 1 - t_1 & 1 - t_1 & \dots & 1 - t_1 \\ 1 - t_2 & \theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j + 1 - t_2 & \dots & 1 - t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - t_{q-1} & 1 - t_{q-1} & \dots & \theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j + 1 - t_{q-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, где A – матрица данной системы. Воспользовавшись свойствами определителей, получим, что данный определитель равен следующему:

$$\det A = \left(\theta + \sum_{j=1}^{q-1} t_j \right)^{q-2} (\theta + q - 1).$$

Ясно, что $\det A \neq 0$, так как $\theta > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, q-1}$, $q \geq 2$. Это значит, что $a_i = z_i - t_i = 0$, т.е. $h = u$. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть H – нормальный делитель конечного индекса и $G_k^{(2)}$ – подгруппа, состоящая из слов четной длины в G_k . Тогда для модели Поттса все H -периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ -периодическими, либо трансляционно-инвариантными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2 из работы [15] при использовании результата утверждения 1.

4. СЛУЧАЙ $\alpha = 0$

Рассмотрим случай $J > 0$, $\alpha = 0$ и $q = 3$, т.е. $\sigma: V \rightarrow \Phi = \{1, 2, 3\}$. В силу теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1}: x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h^1, & \text{если } |x| \text{ четно,} \\ h^2, & \text{если } |x| \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Здесь $h^1 = (h_1^1, h_2^1)$, $h^2 = (h_1^2, h_2^2)$. Тогда в силу равенства (5)

$$h^1 = kF(h^2, \theta), \quad h^2 = kF(h^1, \theta).$$

Введем следующие обозначения: $e^{h_1^1} = z_1$, $e^{h_2^1} = z_2$, $e^{h_1^2} = z_3$, $e^{h_2^2} = z_4$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^k, & z_2 &= \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^k, \\ z_3 &= \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^k, & z_4 &= \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^k. \end{aligned} \quad (6)$$

ЛЕММА 1. При любом k верны следующие утверждения:

- 1) $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $z_3 = z_4$;
- 2) если $z_1 = z_3$, то $z_1 = z_3 = 1$ или $z_2 = z_4$;
- 3) если $z_2 = z_4$, то $z_2 = z_4 = 1$ или $z_1 = z_3$.

Лемма доказывается с помощью системы уравнений (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, в системе (6)

$$z_1 = 1 \iff z_3 = 1; \quad z_2 = 1 \iff z_4 = 1.$$

Рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^k, & z'_2 &= \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^k, \\ z'_3 &= \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^k, & z'_4 &= \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что система (6) есть уравнение $z = W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (6), надо найти неподвижные точки отображения $z' = W(z)$.

ЛЕММА 2. *Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, & I_2 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_1 = z_2, z_3 = z_4\}, \\ I_3 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_1 = z_3, z_2 = z_4\}, & I_4 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_1 = z_4, z_2 = z_3\}, \\ I_5 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_1 = z_3 = 1\}, & I_6 &= \{z \in \mathbb{R}^4: z_2 = z_4 = 1\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем инвариантность I_2 (инвариантность I_i , $i = 1, 3, 4, 5, 6$, доказывается аналогично). Ясно, что для любого $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_2$ имеет место $z_1^* = z_2^*$, $z_3^* = z_4^*$. Отсюда и из формулы (7) имеем

$$\begin{aligned} z'_1 &= \left(\frac{\theta z_3^* + z_4^* + 1}{z_3^* + z_4^* + \theta} \right)^k = \left(\frac{\theta z_3^* + z_3^* + 1}{2z_3^* + \theta} \right)^k, \\ z'_2 &= \left(\frac{\theta z_4^* + z_3^* + 1}{z_3^* + z_4^* + \theta} \right)^k = \left(\frac{\theta z_3^* + z_3^* + 1}{2z_3^* + \theta} \right)^k, \\ z'_3 &= \left(\frac{\theta z_1^* + z_2^* + 1}{z_1^* + z_2^* + \theta} \right)^k = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{2z_1^* + \theta} \right)^k, \\ z'_4 &= \left(\frac{\theta z_2^* + z_1^* + 1}{z_1^* + z_2^* + \theta} \right)^k = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{2z_1^* + \theta} \right)^k, \end{aligned}$$

т. е. $z'_1 = z'_2$; $z'_3 = z'_4$. Значит, $z' = W(z^*) \in I_2$.

4.1. Случай $q = 3$, $J > 0$. В системе (6) из первого уравнения вычтем третье, из второго – четвертое и в результате получим систему уравнений относительно переменных $(z_1 - z_3)$ и $(z_2 - z_4)$:

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{(\theta - 1)(\theta + z_4 + 1)B}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} \right] (z_1 - z_3) + \\ &\quad + \frac{(\theta - 1)(1 - z_3)B}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} (z_2 - z_4) = 0, \\ &\frac{(\theta - 1)(1 - z_4)B_1}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} (z_1 - z_3) + \\ &\quad + \left[1 + \frac{(\theta - 1)(\theta + z_3 + 1)B_1}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} \right] (z_2 - z_4) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^{k-1} + \dots + \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^{k-1}, \\ B_1 &= \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{z_3 + z_4 + \theta} \right)^{k-1} + \dots + \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{z_1 + z_2 + \theta} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Матрица системы уравнений (8) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\theta - 1)(\theta + z_4 + 1)B}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} & \frac{(\theta - 1)(1 - z_3)B}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} \\ \frac{(\theta - 1)(1 - z_4)B_1}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} & 1 + \frac{(\theta - 1)(\theta + z_3 + 1)B_1}{(\theta + z_1 + z_2)(\theta + z_3 + z_4)} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы:

$$\det A = \frac{X^2 Y^2 + XY(\theta - 1)[(\theta + 1 + z_3)B_1 + (\theta + 1 + z_4)B]}{X^2 Y^2} + \frac{(\theta - 1)^2 B B_1 [\theta^2 + 2\theta + (\theta + 2)(z_3 + z_4)]}{X^2 Y^2},$$

где $X = \theta + z_1 + z_2$, $Y = \theta + z_3 + z_4$. Отсюда ясно, что $\det A \neq 0$, так как X , Y , B , B_1 положительны и $\theta > 1$ ($J > 0$). Следовательно, $z_1 = z_3$ и $z_2 = z_4$, т. е. $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in I_3$.

4.2. Случай $k = 2$, $q = 3$, $J < 0$. Заметим, что меры Гиббса на I_1 и I_3 являются трансляционно-инвариантными.

4.2.1. Случай I_2 . Рассмотрим инвариантное множество I_2 при $J < 0$ ($0 < \theta < 1$) и $k = 2$. Тогда система уравнений (6) имеет вид

$$z_1 = \left(\frac{\theta z_3 + z_3 + 1}{2z_3 + \theta} \right)^2, \quad z_3 = \left(\frac{\theta z_1 + z_1 + 1}{2z_1 + \theta} \right)^2, \quad (9)$$

или

$$z_1 = f(z_3), \quad z_3 = f(z_1), \quad f(z) = \left(\frac{(\theta + 1)z + 1}{(2z + \theta)^2} \right)^2, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$z_1 = f(f(z_1)). \quad (11)$$

Ясно, что корни уравнения $z_1 = f(z_1)$ также являются корнями уравнения (11). Поэтому, чтобы найти корни уравнения (11), отличные от корней уравнения $z_1 = f(z_1)$, рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(z_1)) - z_1}{f(z_1) - z_1} = 0,$$

из которого получим квадратное уравнение

$$(a^4 + 4a^2\theta + 4\theta^2)z_1^2 + (2a^3 + a^2\theta^2 + 8a\theta + 4\theta^3 - 4)z_1 + a^2 + 2a\theta^2 + \theta^4 = 0,$$

где $a = \theta + 1$. Это уравнение имеет два действительных решения, если $D > 0$; кроме того, так как $A = a^4 + 4a^2\theta + 4\theta^2 > 0$, $C = a^2 + 2a\theta^2 + \theta^4 > 0$, то эти решения положительные, если $B < 0$. Здесь

$$\begin{aligned} B &= 2a^3 + a^2\theta^2 + 8a\theta + 4\theta^3 - 4 = \theta^4 + 8\theta^3 + 15\theta^2 + 14\theta - 2, \\ D &= (2a^3 + a^2\theta^2 + 8a\theta + 4\theta^3 - 4)^2 - 4(a^4 + 4a^2\theta + 4\theta^2)(a^2 + 2a\theta^2 + \theta^4) = \\ &= \theta(-3\theta^7 - 24\theta^6 - 54\theta^5 - 12\theta^4 + 93\theta^3 + 108\theta^2 - 12\theta - 96). \end{aligned}$$

Используя программу **MathCAD**, можно найти действительные положительные корни уравнения $B = 0$. Оно имеет два действительных корня, один из которых положительный:

$$\theta_B = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15 + 12\sqrt{3}} \approx 0.124986535794979328.$$

Дискриминант D можно разложить на множители:

$$D = -3\theta(\theta - 1)^2(\theta + 2)^2(\theta^3 + 6\theta^2 + 9\theta + 8).$$

Таким образом, $B < 0$, если $0 < \theta < \theta_B$ и $D < 0$ при любых $0 < \theta < 1$, т.е. на инвариантном множестве I_2 при $J < 0$ и $k = 2$, $q = 3$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса трансляционно-инвариантны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $D = 0$ ($\theta = 1$) получим $z_1 = -B/2A < 0$, т.е. данное квадратное уравнение не имеет положительных действительных корней, так как $B > 0$ при $\theta = 1$.

4.2.2. Случай I_4 . Рассмотрим инвариантное множество I_4 при $J < 0$ ($0 < \theta < 1$) и $k = 2$, т.е. $z_1 = z_4$, $z_2 = z_3$. Тогда система уравнений (6) имеет вид

$$z_1 = \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{z_2 + z_1 + \theta} \right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{z_2 + z_1 + \theta} \right)^2. \quad (12)$$

В этой системе уравнений вычтем из первого уравнения второе:

$$(z_1 - z_2) \left[1 + \frac{(\theta - 1)[(\theta + 1)(z_1 + z_2) + 2]}{(z_1 + z_2 + \theta)^2} \right] = 0.$$

Отсюда $z_1 = z_2$, или

$$(x + \theta)^2 + (\theta^2 - 1)x + 2(\theta - 1) = 0,$$

где $x = z_1 + z_2$. Это уравнение эквивалентно квадратному уравнению

$$x^2 + (\theta^2 + 2\theta - 1)x + \theta^2 + 2\theta - 2 = 0, \quad (13)$$

решение которого имеет вид $D = (\theta - 1)^2(\theta + 3)^2$, $x_1 = 3 - (\theta + 1)^2$, $x_2 = -1$.

Следовательно, квадратное уравнение (13) имеет положительные решения при $0 < \theta < \sqrt{3} - 1$, но $x = z_1 + z_2$. Проверим, будут ли z_1 , z_2 действительными. Для этого найдем их. Из уравнения $z_1 + z_2 = 3 - (\theta + 1)^2$ найдем z_2 и, подставив его в первое из уравнений (12), получим квадратное уравнение для z_1 :

$$z_1^2 + (\theta^2 + 2\theta - 2)z_1 + (\theta^2 + 3\theta + 1)^2 = 0.$$

Его дискриминант

$$\begin{aligned} D &= (\theta^2 + 2\theta - 2)^2 - 4(\theta^2 + 3\theta + 1)^2 = \\ &= [\theta^2 + 2\theta - 2 - 2(\theta^2 + 3\theta + 1)][\theta^2 + 2\theta - 2 + 2(\theta^2 + 3\theta + 1)] = \\ &= -(\theta + 2)^2\theta(3\theta + 8) < 0, \end{aligned}$$

значит, система уравнений (12) не имеет иных действительных решений, кроме решения $z_1 = z_2$ при произвольных θ .

4.2.3. Случай I_5 и I_6 . В случае I_5 перепишем второе и четвертое уравнения (6) при $z_1 = z_3 = 1$:

$$z_2[z_4^2 + 2(\theta + 1)z_4 + (\theta + 1)^2] = (\theta z_4 + 2)^2,$$

$$z_4[z_2^2 + 2(\theta + 1)z_2 + (\theta + 1)^2] = (\theta z_2 + 2)^2.$$

Вычтем в этой системе уравнений из первого уравнения второе и из полученного уравнения при $z_2 \neq z_4$ найдем

$$z_4 = \frac{\theta^2 z_2 + 4\theta + (\theta + 1)^2}{z_2 - \theta^2}.$$

Подставив его во второе уравнение системы, получим квадратное уравнение

$$(\theta^4 + 2\theta^3 + 3\theta^2 + 2\theta + 1)z_2^2 + (\theta^4 + 8\theta^3 + 15\theta^2 + 14\theta - 2)z_2 + [\theta^4 + 8\theta^3 + 18\theta^2 + 8\theta + 1] = 0,$$

дискриминант которого

$$D = -3\theta(\theta - 1)^2(\theta + 2)^2(\theta^3 + 6\theta^2 + 9\theta + 8)$$

отрицателен. Значит, в этом случае все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса трансляционно-инвариантны. Случай I_6 доказывается аналогично.

4.3. Случай $k = 2$ и произвольного q , $J < 0$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} h^1 &= 2F(h^2, \theta, q), \\ h^2 &= 2F(h^1, \theta, q), \end{aligned} \tag{14}$$

где $h^1, h^2 \in \mathbb{R}^{q-1}$, $F(h, \theta, q) = (F_1(h, \theta, q), \dots, F_{q-1}(h, \theta, q)) \in \mathbb{R}^{q-1}$. Здесь

$$F_i(h, \theta, q) = F_i(h_1, \dots, h_{q-1}, \theta, q) = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right),$$

$i = \overline{1, q-1}$ и $\theta = e^{J\beta}$.

Заметим, что множество

$$I = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{q-1} : h_1 = (\ln z_1, 0, \dots, 0), h_2 = (\ln z_2, 0, \dots, 0)\}$$

является инвариантом для системы (14), и на этом инварианте получим

$$z_1 = f(z_2), \quad z_2 = f(z_1), \quad f(z) = \left(\frac{\theta z + q - 1}{z + \theta + q - 2} \right)^2. \tag{15}$$

Первое из уравнений (15) можно переписать следующим образом:

$$(\theta^2 - z_1)z_2^2 + [2\theta(q - 1) - 2(\theta + q - 2)z_1]z_2 - (\theta + q - 2)^2 z_1 + (q - 1)^2 = 0. \tag{16}$$

Если $z_2 = z_1$, то уравнение (16) приводится к уравнению

$$z_1^3 + (2q - (\theta - 1)^2 - 3)z_1^2 + ((\theta - 1)^2 + 3 + q^2 - 4q)z_1 - (q - 1)^2 = 0, \tag{17}$$

которое описывает трансляционно-инвариантные меры Гиббса. После несложных преобразований приходим к

$$\begin{aligned} & (\theta^2 + \theta + q - 2)^2 z_1^2 + [\theta^4 + 4(q - 1)\theta^3 + (q^2 + 6q - 12)\theta^2 + \\ & + 2(5q^2 - 18q + 16)\theta + (2q^3 - 13q^2 + 26q - 17)] z_1 + \\ & + [\theta(q - 1) + (\theta + q - 2)^2]^2 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет два действительных решения, если $D > 0$, и, кроме того, так как коэффициенты $A = (\theta^2 + \theta + q - 2)^2 > 0$, $C = [\theta(q - 1) + (\theta + q - 2)^2]^2 > 0$, то эти решения положительные при $B < 0$. Здесь

$$\begin{aligned} B &= \theta^4 + 4(q - 1)\theta^3 + (q^2 + 6q - 12)\theta^2 + \\ &+ 2(5q^2 - 18q + 16)\theta + (2q^3 - 13q^2 + 26q - 17), \\ D &= (\theta^4 + 4(q - 1)\theta^3 + (q^2 + 6q - 12)\theta^2 + \\ &+ 2(5q^2 - 18q + 16)\theta + (2q^3 - 13q^2 + 26q - 17))^2 - \\ &- 4(\theta^2 + \theta + q - 2)^2 [\theta(q - 1) + (\theta + q - 2)^2]^2. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $q = 2$ модель Поттса совпадает с моделью Изинга. В этом случае, решая систему неравенств

$$\begin{aligned} B &= (\theta + 1)^2(\theta + 1 + \sqrt{2})(\theta - (\sqrt{2} - 1)) < 0, \\ D &= (\theta + 1)^5(\theta - 1)^2 \left(\theta - \frac{1}{3} \right) > 0, \end{aligned}$$

получим $1/3 < \theta < \sqrt{2} - 1$. Заметим, что при $\theta = 1/3$ $D = 0$ и $B < 0$. Таким образом, при $1/3 < \theta < \sqrt{2} - 1$ существуют $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, которые были получены в работе [6].

Случай $q = 3$ уже рассмотрен на множестве I_2 .

Случай $q \geq 4$. В этом случае квадратное уравнение не имеет действительных решений, так как $A, B, C > 0$ и $z_1 > 0$. То, что $A, C > 0$, очевидно. $B > 0$, так как все коэффициенты при θ^k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, положительны. Действительно,

$$B = \theta^4 + 4(q - 1)\theta^3 + (q^2 + 6q - 12)\theta^2 + 2(5q^2 - 18q + 16)\theta + (2q^3 - 13q^2 + 26q - 17).$$

Видно, что в случае $q \geq 4$ коэффициенты при θ^k , $k = 3, 4$, положительны. Коэффициенты при θ^k , $k = 0, 1, 2$, тоже положительны, так как производные от $q^2 + 6q - 12$, $5q^2 - 18q + 16$, $2q^3 - 13q^2 + 26q - 17$ при $q \geq 4$ положительны, т. е. как функции от переменной q возрастают, а значения каждой функции при $q = 4$ положительные.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha = 0$. Тогда для модели Поттса верны следующие утверждения.

1. При $k \geq 1$, $q = 3$, $J > 0$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.
2. При $k = 2$, $q = 3$, $J < 0$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса на I_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, являются трансляционно-инвариантными.

3. При $k = 2$, $q \geq 3$, $J < 0$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса на I являются трансляционно-инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $k = 2$, $q = 2$, $\alpha = 0$, $J < 0$ уравнение $h = 2F(h, \theta)$ имеет единственное решение $h^{(0)} = (0, 0)$. Легко проверить, что эта точка притягивающая (абсолютные собственные значения якобиана в ней меньше 1). Следовательно, в некоторой окрестности U_0 точки $h^{(0)}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)} = h^{(0)}$, где $h^{(1)} \in U_0$ и $h^{(n+1)} = 2F(h^{(n)}, \theta)$, $n = 1, 2, \dots$. Из этого следует, что уравнение $h = 2F(2F(h, \theta), \theta)$ имеет единственное решение $h = h^{(0)}$ на U_0 , т. е. не существует периодических (не трансляционно-инвариантных) решений на U_0 . Можно показать, что все решения уравнений (5) являются ограниченными. Мы считаем, что U_0 и есть это ограниченное множество решений, т. е. $h^{(0)}$ есть глобальная притягивающая точка. Поэтому кажется верной следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. Для модели Поттса при $k \geq 1$, $q \geq 3$, $\alpha = 0$, $J < 0$ множество всех периодических мер Гиббса состоит из единственной меры μ_0 , которая является трансляционно-инвариантной мерой, соответствующей решению $h^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)$ уравнения (5).

5. СЛУЧАЙ $K = 2$, $Q = 3$, $\alpha \neq 0$

Пусть $k = 2$, $q = 3$ и $e^{\alpha\beta} = \lambda$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ – внешнее поле, $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура. Тогда при $(z, t) = ((z_1, 1), (t_1, 1))$ получим следующую систему уравнений:

$$z = f(t), \quad t = f(z), \quad f(z) = \lambda \left(\frac{\theta z + 2}{z + \theta + 1} \right)^2. \quad (18)$$

Введя обозначения $\sqrt{z} = x$, $\sqrt{t} = y$, $\sqrt{\lambda} = \zeta$, приходим к системе уравнений

$$x = \zeta \frac{\theta y^2 + 2}{y^2 + \theta + 1}, \quad y = \zeta \frac{\theta x^2 + 2}{x^2 + \theta + 1}, \quad (19)$$

которая при $x = y$ приводится к уравнению

$$x^3 - \zeta \theta x^2 + (\theta + 1)x - 2\zeta = 0, \quad (20)$$

описывающему трансляционно-инвариантные меры Гиббса. Далее, подставив выражение для y из второго уравнения в первое, получим уравнение пятой степени относительно x . Разделив многочлен пятой степени из полученного уравнения на многочлен третьей степени (20), получим квадратное уравнение

$$(\zeta^2 \theta^2 + \theta + 1)x^2 + (-2\zeta + \zeta \theta(\theta + 1))x + 2\zeta^2 \theta + (\theta + 1)^2 = 0, \quad (21)$$

которое описывает периодические меры Гиббса. Изучим решения этого квадратного уравнения. Для этого вычислим его дискриминант, учитывая, что $\sqrt{\lambda} = \zeta$:

$$D = -8\theta^3 \lambda^2 - [3\theta^2(\theta + 1)^2 + 12\theta(\theta + 1) - 4]\lambda - 4(\theta + 1)^3.$$

Известно, что уравнение (21) имеет два положительных действительных решения, если $D > 0$ и $-2\zeta + \zeta \theta(\theta + 1) = \zeta(\theta^2 + \theta - 2) < 0$. Решив эти неравенства, получим, что

уравнение (21) имеет два действительных решения, если $0 < \theta < (\sqrt{17} - 3)/6 = \theta^*$ и $\lambda_1(\theta) < \lambda < \lambda_2(\theta)$, где $\lambda_1(\theta)$, $\lambda_2(\theta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= \\ &= \frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2 + 12\theta(\theta+1) - 4] - (\theta-1)(\theta+2)\sqrt{(\theta-1)(\theta+2)(9\theta^2 + 9\theta - 2)}}{48\theta^3}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(\theta) &= \\ &= \frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2 + 12\theta(\theta+1) - 4] + (\theta-1)(\theta+2)\sqrt{(\theta-1)(\theta+2)(9\theta^2 + 9\theta - 2)}}{48\theta^3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Легко проверить, что при $0 < \theta < \theta^*$ значения $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ положительны.

Если $\theta^* < \theta < 1$, то квадратное уравнение (21) не имеет действительных решений. Видно, что при $\theta > 1$ уравнение (21) также не имеет действительных решений.

Далее, пусть теперь $\theta = \theta^*$. Тогда при $\lambda = \lambda^*$, где

$$\lambda^* = -\frac{3(\theta^*)^2(\theta^*+1)^2 + 12\theta^*(\theta^*+1) - 4}{16(\theta^*)^3}, \quad (24)$$

дискриминант квадратного уравнения (21) $D = 0$, т. е. в этом случае уравнение (21) имеет одно решение

$$x^* = \frac{\zeta^*(2 - \theta^* - (\theta^*)^2)}{2((\zeta^*)^2(\theta^*)^2 + \theta^* + 1)},$$

где $\zeta^* = \sqrt{\lambda^*}$. Следовательно, система (18) имеет решения вида $((z^*, 1), (t^*, 1))$, где

$$z^* = \frac{\lambda^*}{4} \left[\frac{2 - \theta^* - (\theta^*)^2}{((\zeta^*)^2(\theta^*)^2 + \theta^* + 1)} \right]^2, \quad t^* = \lambda^* \left(\frac{\theta^* z^* + 2}{z^* + \theta^* + 1} \right)^2.$$

В результате мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Для модели Поттса в случае $k = 2$, $q = 3$, $\alpha \neq 0$ на инварианте I_6 верны следующие утверждения.

1. При $\lambda \in (\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta))$ и $\theta \in (0, \theta^*)$, где $\theta^* = (\sqrt{17} - 3)/6$, а λ_1, λ_2 определены формулами (22) и (23), существуют две $G_k^{(2)}$ -периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса.

2. При $\lambda = \lambda^*$ и $\theta = \theta^*$, где λ^* определена формулой (24), существует одна $G_k^{(2)}$ -периодическая (не трансляционно-инвариантная) мера Гиббса.

3. При $\lambda > 0$, $\theta > \theta^*$ и $\theta \neq 1$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Благодарности. У. А. Розиков благодарит Centre de Physique Théorique (CPT), Марсель, Франция, за финансовую поддержку пребывания в CPT в сентябре–декабре 2012 г., а также CNRS за поддержку.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *Докл. АН РУз*, **6–7** (1992), 4–7.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [7] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [8] F. S. de Aguiar, F. A. Bosco, A. S. Martinez, S. Goulart Rosa Jr., *J. Stat. Phys.*, **58**:5–6 (1990), 1231–1238.
- [9] F. S. de Aguiar, L. B. Bernardes, S. Goulart Rosa Jr., *J. Stat. Phys.*, **64**:3–4 (1991), 673–682.
- [10] А. В. Бакаев, А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов, *Докл. АН СССР*, **299**:3 (1988), 603–606.
- [11] F. Peruggi, F. di Liberto, G. Monroy, *Phys. A*, **131**:1 (1985), 300–310.
- [12] F. Peruggi, *J. Math. Phys.*, **25**:11 (1984), 3303–3315.
- [13] F. Peruggi, F. di Liberto, G. Monroy, *J. Phys. A*, **16**:4 (1983), 811–827.
- [14] F. Wagner, D. Gensing, J. Heide, *J. Phys. A*, **34**:50 (2001), 11261–11272, arXiv: cond-mat/0110286.
- [15] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.

Поступила в редакцию 08.10.2012,
после доработки 26.12.2012