Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, О. Н. Хакимов, p -Адические меры Гиббса и марковские случайные поля на счетных графах, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 1, 84–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:06:19

© 2013 г.

У. А. Розиков*, О. Н. Хакимов*

p -АДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА И МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА СЧЕТНЫХ ГРАФАХ

Известно, что в вещественнозначном случае понятия меры Гиббса и марковского случайного поля совпадают. Однако в p -адическом случае класс p -адических марковских случайных полей шире, чем класс p -адических мер Гиббса. Построены p -адические марковские случайные поля (на конечных графах), которые не являются p -адическими мерами Гиббса. Дано определение p -адического марковского случайного поля на счетных графах. Показано, что множество таких полей является непустым замкнутым подпространством на множестве всех p -адических вероятностных мер.

Ключевые слова: граф, конфигурация, p -адическая мера Гиббса, p -адические марковские случайные поля.

DOI: 10.4213/tmf8428

1. ВВЕДЕНИЕ

Вещественнозначные меры Гиббса возникают во многих проблемах теории вероятностей и статистической механики. Эта мера, связанная с распределением Больцмана, обобщает понятие канонического ансамбля. Кроме того, мера Гиббса – уникальная мера, которая максимизирует энтропию для данной ожидаемой энергии; таким образом, мера Гиббса лежит в основе максимальных методов энтропии и соответствующих алгоритмов. Теория меры Гиббса хорошо развита (см. [1]–[3]), но неархимедов (p -адический) аналог меры Гиббса изучен мало.

Известно [4]–[6], что p -адические модели в физике не могут быть описаны с использованием обычной теории вероятностей. В работе [7] абстрактная p -адическая теория вероятностей была развита посредством теории неархимедовых мер [8]. Вероятностные процессы на поле p -адических чисел были изучены многими авторами (см., например, [9]–[11]). В этих работах широкие классы процессов Маркова были построены и изучены на поле p -адических чисел.

В нашем случае вероятностные меры имеют значения в поле p -адических чисел. Это приводит к некоторым трудностям. Например, нет никакой информации

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru, hakimovo@mail.ru

о компактности множества p -адических мер. Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в работе [12]. Такой результат позволяет строить широкие классы p -адических вероятностных мер, используя конечномерные распределения вероятности. Поэтому есть возможность развивать p -адическую статистическую механику.

В настоящей работе мы изучаем p -адические марковские случайные поля и p -адические меры Гиббса на не более чем счетных графах. Структура работы следующая. В разделе 2 даются основные определения и известные факты. Раздел 3 посвящен случаю конечного графа. В разделе 4 мы строим p -адические марковские случайные поля, которые не являются p -адическими мерами Гиббса. В разделе 5 исследуются счетные графы, и мы даем определение p -адического марковского случайного поля на счетных графах. Показано, что множество таких полей является непустым замкнутым подпространством в множестве всех p -адических вероятностных мер.

Конкретные примеры p -адических мер Гиббса для моделей статистической физики были изучены в работах [13]–[16].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^r(n/m)$, где $r, n \in \mathbb{Z}$, m – положительное число, $(n, m) = 1$, причем m и n не делятся на p , а p – фиксированное простое число. p -Адическая норма $|x|_p$ определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Это свойство показывает неархимедовость нормы. Из него непосредственно следуют следующие свойства:

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$.

Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме приводит к полю p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для каждого простого p [17].

Начав с поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, мы можем получить либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо одно из полей p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (теорема Островского).

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

p -Адический логарифм определяется как ряд:

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

он сходится для $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

этот ряд сходится для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

ЛЕММА 1 [17]. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\exp_p(x)|_p &= 1, & |\exp_p(x) - 1|_p &= |x|_p, & |\log_p(1+x)|_p &= |x|_p, \\ \log_p(\exp_p(x)) &= x, & \exp_p(\log_p(1+x)) &= 1+x. \end{aligned}$$

3. СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Пусть Λ – конечное множество, а точки множества Λ являются вершинами некоторого конечного графа $\Gamma = (\Lambda, e)$, где e – множество ребер графа Γ . Через $P(\Lambda)$ обозначим множество всех подмножеств в Λ . Будем предполагать, что Γ не имеет кратных ребер или петель, и используем следующие определения и обозначения. Если $x, y \in \Lambda$ и существует ребро графа, соединяющее x и y , то x и y называются *соседями*. Пусть отображение $c: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \{0, 1\}$ определено формулой

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ и } y \text{ – соседи,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $c(x, x) = 0$ для всех $x \in \Lambda$, поскольку мы предположили, что Γ не имеет петель. Если $A \subset \Lambda$, то *граница* A есть множество $\partial A \in P(\Lambda)$, определяемое равенством $\partial A = \{y \in \Lambda \setminus A: c(x, y) = 1 \text{ для некоторого } x \in A\}$. Для $x \in \Lambda$ мы будем писать ∂x вместо $\partial\{x\}$ (и вообще будем стремиться по возможности писать x вместо $\{x\}$; например, если $A \in P(\Lambda)$, то запись $A \cup x$ предпочтительнее, чем $A \cup \{x\}$). Для любого $A \in P(\Lambda)$ через $|A|$ обозначим число точек в A .

Пусть $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$. Функция $\sigma: \Lambda \rightarrow \Phi$ называется *конфигурацией*. Обозначим через Ω множество всех конфигураций на Λ . Заметим, что при $q = 2$ множество Ω можно отождествить с множеством всех подмножеств множества Λ , т. е. $\Omega = P(\Lambda)$. Для $A \subset \Lambda$ через σ_A обозначим сужения конфигурации σ на A , а через Ω_A – множество всех конфигураций на A .

Пусть $\mathcal{M}_p(\Omega)$ обозначает множество всех p -адических вероятностных мер на (Ω, Σ) (при условии, что на Ω задана алгебра Σ), т. е. измеримыми являются все подмножества из Σ . Элемент $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ обозначает p -адическое распределение конфигураций, когда система находится в состоянии динамического равновесия. Поэтому мы будем называть $\mathcal{M}_p(\Omega)$ *множеством p -адических состояний* на (Ω, Σ) . Поскольку Ω – конечное множество, мы отождествим вероятности, т. е. мы рассматриваем μ как функцию из Ω в $\mathbb{Q}_p$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\mu(\sigma) \neq 0$ для всех $\sigma \in \Omega$;
- 2) $\sum_{\sigma \in \Omega} \mu(\sigma) = 1$.

3.1. p -АДическое марковское случайное поле. Пусть множества $A, B \subset \Lambda$, причем $A \cap B = \emptyset$. Обозначим через

$$\mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_B) = \frac{\sum_{\sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}} \mu(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)})}{\sum_{\sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}, \bar{\sigma}_A} \mu(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)})}$$

условную вероятность того, что конфигурация σ есть $\bar{\sigma}_A = \{\bar{\sigma}(x), x \in A\}$ на множестве A при условии, что на множестве B она равна $\tilde{\sigma}_B = \{\tilde{\sigma}(x), x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. p -Адическая вероятностная мера $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ называется p -адическим марковским случайным полем, если

$$\mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_B) = \mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_{\partial A \cap B}) \quad \text{для всех } A, B \subset \Lambda.$$

Это означает, что вероятность того, что конфигурация σ есть $\bar{\sigma}_A = \{\bar{\sigma}(x), x \in A\}$ на множестве A при условии, что на множестве B она равна $\tilde{\sigma}_B = \{\tilde{\sigma}(x), x \in B\}$, совпадает с вероятностью того, что конфигурация σ равна $\bar{\sigma}_A = \{\bar{\sigma}(x), x \in A\}$ на множестве A при условии, что на множестве $\partial A \cap B$ она равна $\tilde{\sigma}_{\partial A \cap B} = \{\tilde{\sigma}(x), x \in \partial A \cap B\}$.

3.2. p -Адическое гиббсовское состояние. Рассмотрим состояние на (Ω, Σ) , являющееся p -адическим гиббсовским состоянием. Функция $H: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется гамильтонианом на Ω . Для любого гамильтониана H на Ω с условием $|H(\sigma)|_p < p^{-1/(p-1)}$ мы определим p -адическое гиббсовское состояние с гамильтонианом H как состояние $\pi \in \mathcal{M}_p(\Omega)$:

$$\pi(\sigma) = Z^{-1} \exp_p\{-H(\sigma)\},$$

где Z – нормирующая константа, т. е.

$$Z = \sum_{\sigma \in \Omega} \exp_p\{-H(\sigma)\}.$$

Пусть H – гамильтониан на Ω , A – подмножество из Λ . Через $H_A(\sigma_A)$ обозначим сужение гамильтониана $H(\sigma)$ на A . Гамильтониан H называется *гамильтонианом ближайшего соседа*, если

$$H(\sigma) = \sum_{x \in \Lambda} H^{(1)}(\sigma(x)) + \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ c(x, y) = 1}} H^{(2)}(\sigma(x), \sigma(y)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть μ – p -адическое гиббсовское состояние с гамильтонианом ближайшего соседа H . Тогда μ – p -адическое марковское случайное поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \cap B = \emptyset$ и $\partial A \subset B$. Тогда имеем

$$\mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_B) = \frac{\sum_{\sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}} \exp_p\{-H(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)})\}}{\sum_{\sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}, \bar{\sigma}_A} \exp_p\{-H(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)})\}}, \quad (1)$$

где $\sigma = (\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)})$. Далее,

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= H_A(\bar{\sigma}_A) + H_{A, B}^{(2)}(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B) + H_B(\tilde{\sigma}_B) + \\ &+ H_{\Lambda \setminus (A \cup B)}(\sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}) + H_{B, \Lambda \setminus (A \cup B)}^{(2)}(\tilde{\sigma}_B, \sigma_{\Lambda \setminus (A \cup B)}), \end{aligned}$$

где энергия $H_{A, B}^{(2)}$ определяется следующим образом:

$$H_{A, B}^{(2)}(\sigma_A, \sigma_B) = \sum_{\substack{x \in A, y \in B \\ c(x, y) = 1}} H^{(2)}(\sigma_A(x), \sigma_B(y)).$$

Обозначим через $Z_A(\tilde{\sigma}_{\partial A})$ условную статистическую сумму:

$$Z_A(\tilde{\sigma}_{\partial A}) = \sum_{\bar{\sigma}_A} \exp_p \{ -H_A(\bar{\sigma}_A) - H_{A,\partial A}^{(2)}(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_{\partial A}) \}. \quad (2)$$

Отсюда числитель в правой части равенства (1) равен

$$\exp_p \{ -H_A(\bar{\sigma}_A) - H_{A,B}^{(2)}(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B) - H_B(\tilde{\sigma}_B) \} Z_{\Lambda \setminus (A \cup B)}(\tilde{\sigma}_B),$$

а знаменатель равен

$$\exp_p \{ -H_B(\tilde{\sigma}_B) \} Z_{\Lambda \setminus (A \cup B)}(\tilde{\sigma}_B) Z_A(\tilde{\sigma}_B).$$

Подставляя эти выражения в выражение (1) и заметив, что $H_{A,B}^{(2)}(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_B) = H_{A,\partial A}^{(2)}(\bar{\sigma}_A, \tilde{\sigma}_{\partial A})$ и $Z_A(\tilde{\sigma}_B) = Z_A(\tilde{\sigma}_{\partial A})$, мы после очевидных сокращений приходим к равенству

$$\mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_B) = \mu(\bar{\sigma}_A \mid \tilde{\sigma}_{\partial A}).$$

4. ПРИМЕРЫ

Как известно [2], в вещественном случае понятия меры Гиббса и марковского случайного поля совпадают. Но в поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, как это было доказано в работе [18], класс p -адических марковских случайных полей шире, чем класс p -адических мер Гиббса.

Приведем примеры p -адических марковских случайных полей, которые не являются p -адическими мерами Гиббса.

Пусть $\Lambda = \{x, y, z\}$ и $\Phi = \{0, 1\}$. Как отмечалось выше, при $q = 2$ множество конфигураций Ω можно отождествить с множеством всех подмножеств множества Λ .

ПРИМЕР 1. Пусть $c(x, y) = c(y, z) = c(x, z) = 0$. В этом случае p -адическая вероятностная мера μ на $P(\Lambda)$ является марковским случайным полем тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu(x, y)\mu(\emptyset) &= \mu(x)\mu(y), & \mu(x, z)\mu(\emptyset) &= \mu(x)\mu(z), \\ \mu(y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(y)\mu(z), & \mu(x, y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(x)\mu(y, z), \\ \mu(x, y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(y)\mu(x, z), & \mu(x, y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(z)\mu(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

ПРИМЕР 2. Пусть $c(x, y) = 1$, $c(y, z) = c(x, z) = 0$. В этом случае p -адическая вероятностная мера μ на $P(\Lambda)$ является марковским случайным полем тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu(x, z)\mu(\emptyset) &= \mu(x)\mu(z), & \mu(y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(y)\mu(z), \\ \mu(x, y, z)\mu(\emptyset) &= \mu(z)\mu(x, y), & \mu(x, y, z)\mu(x) &= \mu(x, y)\mu(x, z), \\ \mu(x, y, z)\mu(y) &= \mu(x, y)\mu(y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

ПРИМЕР 3. Пусть $c(x, y) = c(y, z) = 1$, $c(x, z) = 0$. В этом случае p -адическая вероятностная мера μ на $P(\Lambda)$ является марковским случайным полем тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu(x, z)\mu(\emptyset) &= \mu(x)\mu(z), & \mu(x, y, z)\mu(x) &= \mu(x, y)\mu(x, z), \\ \mu(x, y, z)\mu(y) &= \mu(x, y)\mu(y, z). \end{aligned} \quad (5)$$

ПРИМЕР 4. Пусть $c(x, y) = c(y, z) = c(x, z) = 1$. В этом случае всякая p -адическая вероятностная мера μ на $P(\Lambda)$ является марковским случайным полем.

Найти общее решение каждой системы уравнений (3)–(5) трудно. Мы хотим найти хотя бы одно решение, не являющееся гиббсовским. Заметим, что множество таких решений имеет мощность континуума. Если p -адическую вероятностную меру μ на $P(\Lambda)$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= p^3, & \mu(x, y) &= \mu(x, z) = \mu(y, z) = p^3 - 2p^2 + p, \\ \mu(x) &= \mu(y) = \mu(z) = p^2 - p^3, & \mu(x, y, z) &= -p^3 + 3p^2 - 3p + 1, \end{aligned} \quad (6)$$

то она является решением систем (3)–(5).

Нетрудно показать, что мера (6) не является p -адическим гиббсовским состоянием с потенциалом ближайшего соседа. Действительно, μ может быть мерой Гиббса с потенциалом (гамильтонианом) H , определяемым по формуле

$$H(A) = \log_p \left[\frac{\mu(A)}{\mu(\emptyset)} \right] \quad \forall A \subset \Lambda. \quad (7)$$

Но для (6) мы имеем

$$\left| \frac{\mu(x)}{\mu(\emptyset)} - 1 \right|_p = \left| \frac{p^2 - p^3}{p^3} - 1 \right|_p = \left| \frac{1}{p} - 2 \right|_p = p > 1. \quad (8)$$

Согласно лемме 1 из (8) следует, что гамильтониан (7) не определен для меры (6).

5. СЛУЧАЙ СЧЕТНЫХ ГРАФОВ

Пусть $\Gamma = (V, e)$ – счетный граф и $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$. Функции $\sigma: V \rightarrow \Phi$ называются конфигурациями. Обозначим через $\Omega = \Phi^V$ множество всех конфигураций на V . Мы будем рассматривать Ω как компактное хаусдорфово пространство, являющееся произведением $|V|$ экземпляров дискретного пространства $\{1, 2, \dots, q\}$. Обозначим множество конечных подмножеств из V через $\mathcal{B}(V)$.

Если $A \subset V$, введем обозначение $\sigma_{[A]} = \{\varphi \in \Omega: \varphi|_A \equiv \sigma_A\}$. Тогда $A \in \mathcal{B}(V)$, $\sigma_{[A]}$ называется конечномерным цилиндром. Конечномерные цилиндры образуют базис открытых множеств топологии в Ω .

Пусть $\mathcal{F}$ – алгебра, порожденная конечномерными цилиндрами. p -Адическая мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$ определяется как аддитивный ограниченный функционал:

- 1) $\mu(\sigma_{[A]} \cup \sigma_{[B]}) = \mu(\sigma_{[A]}) + \mu(\sigma_{[B]})$, если $\sigma_{[A]} \cap \sigma_{[B]} = \emptyset$;
- 2) $\sup\{|\mu(\sigma_{[A]})|_p: \sigma_{[A]} \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_p(\Omega)$ множество p -адических мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, которое рассматривается как топологическое пространство со слабой топологией.

p -Адическая мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется *вероятностной мерой*, если выполняется еще одно условие:

- 3) $\mu(\Omega) = 1$.

Через $\mathcal{V}_p(\Omega)$ обозначим множество всех p -адических вероятностных мер на Ω .

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(V)$. Обозначим через

$$\mu(\bar{\sigma}_{[A]} | \tilde{\sigma}_{[B]}) = \frac{\mu(\bar{\sigma}_{[A]} \cap \tilde{\sigma}_{[B]})}{\mu(\tilde{\sigma}_{[B]})}$$

условную вероятность того, что конфигурация σ есть $\bar{\sigma}_A = \{\bar{\sigma}(x), x \in A\}$ на множестве A при условии, что на множестве B она равна $\tilde{\sigma}_B = \{\tilde{\sigma}(x), x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. p -Адитическая вероятностная мера $\mu \in \mathcal{V}_p(\Omega)$ называется p -адическим марковским случайным полем, если:

- 1) $\mu(\sigma_{[A]}) \neq 0$ для всех конечномерных цилиндров $\sigma_{[A]}$;
- 2) при $A, B \in \mathcal{B}(V)$ справедливо равенство

$$\mu(\bar{\sigma}_{[A]} \mid \tilde{\sigma}_{[B]}) = \mu(\bar{\sigma}_{[A]} \mid \tilde{\sigma}_{[\partial A \cap B]}).$$

Обозначим через $\mathcal{MRF}_p(\Omega)$ множество всех p -адических марковских случайных полей на $(\Omega, \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathcal{MRF}_p(\Omega)$ является непустым замкнутым подмножеством в $\mathcal{M}_p(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множество $\mathcal{MRF}_p(\Omega)$ не пусто.

Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$, где $V_n \in \mathcal{B}(V)$, $n = 1, 2, \dots$.

Определим p -адическую вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на Φ^{V_n} следующим образом:

$$\mu^{(n)}(\sigma_{[A]}) = Z_n^{-1} a_1^{\nu_{\sigma_A}(1)} \times \dots \times a_q^{\nu_{\sigma_A}(q)}, \quad (9)$$

где $a_i \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, $\nu_{\sigma_A}(i)$ – число i в конфигурации σ_A , Z_n – нормирующая константа:

$$Z_n = \sum_{\sigma_{[A]} \in \mathcal{F}_n} a_1^{\nu_{\sigma_A}(1)} \times \dots \times a_q^{\nu_{\sigma_A}(q)}.$$

Нетрудно видеть, что мера $\mu^{(n)}$, определенная формулой (9), является p -адическим марковским случайным полем. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_{[V_{n+1}]}} \mu^{(n+1)}(\bar{\sigma}_{[V_n]} \cap \sigma_{[V_{n+1}]}) &= Z_{n+1}^{-1} \sum_{\sigma_{[V_{n+1}]}} \prod_{k=1}^q a_k^{\nu_{\sigma_{[V_n]}}(k) + \nu_{\sigma_{[V_{n+1}]}}(k)} = \\ &= \mu^{(n)}(\bar{\sigma}_{[V_n]}) \frac{\sum_{\sigma_{[V_{n+1}]}} \prod_{k=1}^q a_k^{\nu_{\sigma_{[V_{n+1}]}}(k)}}{\sum_{\sigma_{[V_{n+1}]}} \prod_{k=1}^q a_k^{\nu_{\sigma_{[V_{n+1}]}}(k)}} = \mu^{(n)}(\bar{\sigma}_{[V_n]}). \end{aligned}$$

Следовательно, меры $\mu^{(n)}$ являются согласованными. Для таких мер согласно p -адическому аналогу теоремы Колмогорова (см. [12]) существует предельная мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Для любых пар множеств $A, B \in \mathcal{B}(V)$ существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $A, B \subset V_n$ при $n \geq n_0$. Так как для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $\mu|_{V_n} = \mu^{(n)}$ и каждая мера $\mu^{(n)}$ является p -адическим марковским случайным полем, то для предельной меры μ выполняется равенство $\mu(\bar{\sigma}_{[A]} \mid \tilde{\sigma}_{[B]}) = \mu(\bar{\sigma}_{[A]} \mid \tilde{\sigma}_{[\partial A \cap B]})$.

Теперь докажем, что множество $\mathcal{MRF}_p(\Omega)$ является замкнутым в пространстве $\mathcal{M}_p(\Omega)$ со слабой топологией. Пусть последовательность $\mu_n \in \mathcal{MRF}_p(\Omega)$ сходится к некоторой мере $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$, т.е. $\mu_n(\sigma_{[A]}) \rightarrow \mu(\sigma_{[A]})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого конечномерного цилиндра $\sigma_{[A]}$.

Далее, для любых $A, B \in \mathcal{B}(V)$ и $\sigma, \bar{\sigma} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} |\mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) - \mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]})|_p &= |\mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) - \mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) + \\ &+ \mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) - \mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]}) + \\ &+ \mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]}) - \mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]})|_p \leq \\ &\leq \max\{|\mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) - \mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]})|_p, |\mu_n(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]}) - \\ &- \mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]})|_p\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $\mu_n \rightarrow \mu$, из (10) следует, что $\mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[B]}) = \mu(\sigma_{[A]} | \bar{\sigma}_{[\partial A \cap B]})$. Это означает, что $\mu \in \mathcal{MR}\mathcal{F}_p(\Omega)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $H: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}_p$ – некоторый гамильтониан на $\Omega = \Phi^V$, удовлетворяющий условию $|H(\sigma)|_p < p^{-1/(p-1)}$. Для двух конфигураций $\sigma, \eta \in \Omega$ определим

$$(\sigma\eta)_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), & x \in A, \\ \eta(x), & x \in V \setminus A. \end{cases}$$

При фиксированном η определим p -адическое гиббсовское состояние на цилиндре $\sigma_{[A]}$:

$$\mu_\eta(\sigma_{[A]}) = Z_{A,\eta}^{-1} \exp_p\{-H((\sigma\eta)_A)\}, \quad (11)$$

где $Z_{A,\eta}$ – нормирующая константа, т. е.

$$Z_{A,\eta} = \sum_{\sigma_A} \exp_p\{-H((\sigma\eta)_A)\}.$$

Однако если гамильтониан не удовлетворяет условию $|H(\sigma)|_p < p^{-1/(p-1)}$, то равенство (11) не определено. Поэтому в p -адическом случае оказывается более эффективным понятие p -адического марковского случайного поля.

Благодарности. У. А. Розиков благодарен Centre de physique théorique (Марсель, Франция) за финансовую поддержку пребывания в сентябре–декабре 2012 г., а также он благодарен CNRS за поддержку.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] C. J. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] A. Yu. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Mathematics and its Applications, **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [5] E. Marinary, G. Parisi, *Phys. Lett. B*, **203**:1–2 (1988), 52–54.
- [6] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [7] A. Yu. Khrennikov, S. Yamada, A. van Rooij, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **6**:1 (1999), 21–32.
- [8] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **51**, M. Dekker, New York, 1978.
- [9] S. Albeverio, W. Karwowski, *Stochastic Process. Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.
- [10] S. Albeverio, X. Zhao, *Ann. Probab.*, **28**:4 (2000), 1680–1710.

- [11] K. Yasuda, *Osaka J. Math.*, **37**:4 (2000), 967–985.
- [12] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, *Узб. матем. журн.*, 1998, № 4, 23–29.
- [13] M. Khamraev, F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **70**:1 (2004), 17–28, [arXiv: math-ph/0510021](#).
- [14] A. Yu. Khrennikov, F. M. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2923–2937, [arXiv: 0705.0244](#).
- [15] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Indag. Math. (N.S.)*, **15**:1 (2004), 85–99.
- [16] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:2 (2005), 277–290.
- [17] Н. Коблиц, *p-Адитческие числа, p-адический анализ и дзета-функции*, М., Мир, 1982.
- [18] У. А. Розиков, Ф. Ф. Тураев, *Докл. АН РУз.*, 2011, № 2, 3–6.

Поступила в редакцию 16.10.2012