Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, РГ-инвариантные кривые в фермионной иерархической модели, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 323–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:28:37

© 1998 г.

М. Д. Миссаров*

РГ-ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Изучается преобразование ренормализационной группы в фермионной иерархической модели, которое задается рациональным отображением в плоскости констант связи. Построены части устойчивых инвариантных кривых для всех неподвижных точек этого преобразования. Эти кривые являются графиками гладких функций, для которых даны верхняя и нижняя оценки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был предложен фермионный вариант иерархической модели Дайсона. Бозонная иерархическая модель была глубоко исследована в ряде работ [2–5] методами ренормализационной группы (РГ). Строгое обоснование положений вильсоновской картины критических явлений наиболее детально было проведено именно в рамках иерархических моделей. Действие РГ, как правило, явно не вычисляется в моделях на обычной решетке. В иерархической модели Дайсона оно сводится к нелинейному интегральному оператору, действующему на плотность распределения единичного спина. В фермионной иерархической модели действие РГ вычисляется явно и, более того, задается рациональным преобразованием в пространстве констант связи.

Напомним основные определения. Иерархическая решетка задана как множество натуральных чисел N с иерархическим расстоянием $d(i, j)$, $i, j \in N$, где $d(i, j) = n^{s(i, j)}$, если $i \neq j$; $s(i, j) = \min\{s: \text{существует } k \text{ такое, что } i \in V_{k, s}, j \in V_{k, s}\}$; $V_{k, s} = \{j: j \in N, (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$; n – некоторое фиксированное натуральное число. В узлах этой решетки находятся четырехкомпонентные спины $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана. Модель задана как гиббсовское состояние на подалгебре, порожденной спинами, находящимися в узлах объема $\Lambda_N \equiv V_{1, N}$, где гауссовская часть задана гамильтонианом гауссовского состояния с корреляционной функцией

$$\langle \bar{\psi}_k(i) \psi_l(j) \rangle = \delta_{kl} \left(\delta_{ij} \frac{1 - n^{-1}}{1 - n^{1-\alpha}} + (1 - \delta_{ij}) d^{\alpha-2}(i, j) \right),$$

$$\langle \bar{\psi}_k(i) \bar{\psi}_l(j) \rangle = \langle \psi_k(i) \psi_l(j) \rangle = 0,$$

*Казанский государственный университет, Казань, Россия

а взаимодействие задано потенциалом

$$r(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + g(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)).$$

РГ-преобразование определяется по формуле

$$r_\alpha \psi^*(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi^*(j).$$

В пространстве констант связи (r, g) РГ-преобразование действует как рациональное отображение

$$r' = n^{\alpha-1} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} (r+1) - 1 \right), \quad g' = n^{2\alpha-3} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g,$$

которое имеет нетривиальные ветви неподвижных точек (НТ) $(r_\pm, g_\pm)$, где

$$r_\pm = \frac{\pm\sqrt{n} - n^{\alpha-1}}{1 \mp \sqrt{n}}, \quad g_\pm = g_\pm(r_\pm), \quad g_\pm(r) = \frac{r(1+r)^2}{1+r \pm 1/\sqrt{n}}.$$

Отметим, что “плюсовая” ветвь (r_+, g_+) бифурцирует от тривиальной гауссовской ветви $r \equiv 0, g \equiv 0$ в точке $\alpha = 3/2$ (подробнее см. [1]).

В этой работе мы дадим частичное описание устойчивых инвариантных кривых. Будет показано, что при $\alpha > 3/2$ компонента связности устойчивой РГ-инвариантной кривой, проходящей через плюсовую (минусовую) НТ, задается графиком гладкой монотонно возрастающей (убывающей) функции $g = h_+(r)$, $r > 0$ ($g = h_-(r)$, $r < -1$). При этом $h_+(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $h_-(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow -1$, $h_+(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ и $h_-(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow -\infty$. Будут даны верхние и нижние оценки для этих функций. При $1 < \alpha \leq 3/2$ эти результаты также остаются справедливыми, но кривая $g = h_+(r)$ уже будет являться устойчивой РГ-инвариантной кривой для нулевой НТ ($r = 0, g = 0$). Кроме того, мы докажем, что нижняя полуплоскость $g < 0$ при $\alpha \geq 3/2$ делится на две части некоторой РГ-инвариантной кривой γ_3 , связывающей нулевую НТ и бесконечно удаленную НТ (которой на самом деле соответствует распределение грасманова спина, отвечающего δ -функции). Эта кривая определяется условием принадлежности области, ограниченной по r .

Все эти результаты были анонсированы в работе [6], в которой исследовалась динамика РГ в областях справа от кривой $g = h_+(r)$, $r > 0$, и слева от кривой $g = h_-(r)$, $r < -1$. Было показано, что эти области РГ-инвариантны, и найдена асимптотика итераций РГ в этих областях. Доказано, что в нижней полуплоскости точки, лежащие справа и слева от γ_3 , РГ-инвариантны. Была также найдена асимптотика этих итераций. Эти результаты были использованы при доказательстве существования термодинамического предела.

Поведение РГ в области между кривыми γ_1 и γ_2 более сложно. Компьютерные эксперименты показывают, что устойчивые инвариантные кривые для нетривиальных НТ

сложным образом размещаются внутри этой области. При $\alpha < 3/2$ плюсовая НТ переходит в нижнюю полуплоскость, и начиная с некоторого α она становится неустойчивым фокусом.

Устойчивые РГ-инвариантные кривые можно рассматривать как зоны притяжения нетривиальных (не гауссовских) предельных законов для фермионных иерархических полей. В терминах статистической физики они называются критическими кривыми и являются ключевым элементом в картине критических явлений. Критическое поведение в фермионной иерархической модели будет описано в следующей статье.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ

Мы сохраняем обозначения работы [6]. Пусть

$$g_1^\pm(r) = \frac{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - n + n^{2-\alpha}}{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - 1 + n^{1-\alpha}}(r+1)^2,$$

$$g_4(r) = \frac{r(1 - n^{\alpha-2})}{r(1 - n^{\alpha-2}) + 1 - n^{-1}}(r+1)^2.$$

Заметим, что кривые $g_\pm(r)$, $g_1^\pm(r)$ проходят через плюсовую и минусовую НТ, соответственно.

Пусть

$$G_1 = \left\{ (r, g) : 0 \leq r \leq r_+, \max\{0, g_4(r), g_1^+(r)\} \leq g \leq g_+(r) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (r, g) : \max\{0, r_+\} \leq r, g_+(r) \leq g \leq g_1^+(r) \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (r, g) : r \leq r_-, g_1^-(r) \leq g \leq g_-(r) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (r, g) : r_- < r < -1, g_-(r) < g < g_1^-(r) \right\}.$$

Справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Существует гладкая возрастающая функция $g = h_+(r; \alpha)$, $0 \leq r < \infty$, график которой лежит в области G_1 и является частью γ_1 устойчивой РГ-инвариантной кривой для плюсовой НТ при $\alpha > 3/2$ и для тривиальной НТ при $3/2 \geq \alpha > 1$. Существует гладкая убывающая функция $g = h_-(r; \alpha)$, $-\infty < r < -1$, график которой лежит в области G_2 и является частью γ_2 устойчивой РГ-инвариантной кривой для минусовой НТ при $\alpha > 1$. Кроме того, все точки из множеств $G_i \setminus \gamma_i$ за конечное число итераций РГ выходят из областей G_i , $i = 1, 2$. В частности, точки из G_1 (G_2), лежащие справа (слева) от γ_1 (γ_2), выходят в область, лежащую справа (слева) от G_1 (G_2).*

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько лемм. Мы будем в дальнейшем использовать обозначения

$$\beta = \beta(r, g) = \frac{g}{(r+1)^2}, \quad \sigma = \sigma(r, g) = \frac{1 - \beta(r, g)}{1 - \beta(r, g)/n}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 1$ и точки (r_1, g_1) , (r_2, g_2) удовлетворяют условиям

$$r_1 \leq r_2, \quad 1 > \beta_1 \geq \beta_2 > 0, \quad r_i > -1, \quad r'_i > -1, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $\beta_i = \beta(r_i, g_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $r'_1 \leq r'_2$ и $\beta'_1 \geq \beta'_2$.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 1$ и точки (r_1, g_1) , (r_2, g_2) удовлетворяют условиям

$$g_1 \geq g_2, \quad n > \beta_1 \geq \beta_2 > 1, \quad r_i < -1, \quad r'_i < -1, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Тогда $g'_1 \geq g'_2$ и $\beta'_1 \geq \beta'_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1 И 2. Легко видеть, что если $n > \beta_1 \geq \beta_2$, то $\sigma_1 \leq \sigma_2$. При этом $\sigma(\beta) > 0$, если $1 > \beta > 0$, и $\sigma(\beta) < 0$, если $n > \beta > 1$. Так как $g' = n^{2\alpha-3}\sigma^2 g$, то при условиях (1) имеет место неравенство $g'_1 \geq g'_2$. Докажем, что любое из условий (1), (2) влечет за собой неравенство

$$|r'_1 + 1| \leq |r'_2 + 1|. \quad (3)$$

В силу того что

$$r'_i + 1 = n^{\alpha-1}\sigma_i(r_i + 1) - n^{\alpha-1} + 1, \quad i = 1, 2,$$

неравенство (3) равносильно неравенству

$$\sigma_1(r_1 + 1) \leq \sigma_2(r_2 + 1), \quad (4)$$

если $r'_i > -1$, $i = 1, 2$, и неравенству

$$\sigma_1(r_1 + 1) \geq \sigma_2(r_2 + 1), \quad (5)$$

если $r'_i < -1$. При выполнении условий (1) справедливость неравенства (4) очевидна. Справедливость неравенства (5) при выполнении условий (2) следует из того, что

$$\sigma^2(r + 1)^2 = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta/n} \right)^2 \frac{g}{\beta},$$

где последняя функция возрастает по β при фиксированном $g > 0$ и $n > \beta > 1$. Заметим, что во всех рассматриваемых случаях

$$r'_i > -n^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2,$$

т.к. $r' + n^{\alpha-1} = n^{\alpha-1}\sigma(r + 1)$. Для завершения доказательств лемм 1 и 2 осталось доказать неравенство $\beta'_1 \geq \beta'_2$. Оно вытекает из неравенства (3) и формул

$$\beta'_i = \frac{1}{n}\beta_i \left(1 + \frac{n^{\alpha-1} - 1}{r'_i + 1} \right)^2, \quad i = 1, 2.$$

ЛЕММА 3. Парабола $g(r) = \beta(r+1)^2$, $\beta = \text{const}$, за одну итерацию РГ переходит в параболу $g'(r') = \beta(r' + n^{\alpha-1})^2/n$, где r' линейно зависит от r , $r' = kr + b$, $k > 0$ при $\beta < 1$ и $\beta > n$, $k < 0$ при $1 < \beta < n$. Точки пересечения парабол $g(r)$ и $g'(r)$ лежат на прямых $r = r_{\pm}$.

Утверждение леммы проверяется простым вычислением.

Заметим также, что кривые вида $g(r) = \beta(r)(r+1)^2$, где функция $\beta(r) = (r+a)/(r+b)$ такова, что $\beta(r_+) = \beta_+$ (или $\beta(r_-) = \beta_-$), преобразованием РГ переводятся в кривую

$$g'(r') = \beta'(r')(r' + n^{\alpha-1})^2, \quad \text{где } \beta'(r') = \frac{r' + a'}{r' + b'},$$

причем $\beta'(r_{\pm}) = \beta_{\pm}/n$ (или $\beta'(r_-) = \beta_-/n$) и r' также дробно-линейно зависит от r . Здесь

$$\beta_{\pm} = \beta(r_{\pm}, g_{\pm}) = \frac{n^{\alpha-1/2} \mp n}{n^{\alpha-1/2} \mp 1}.$$

Кривые $g = g_1^{\pm}(r)$ и $g = g^{\pm}(r)$ принадлежат как раз этому классу кривых.

ЛЕММА 4. Имеет место равенство

$$R(r, g_1^{\pm}(r)) = \left(r_{\pm}, \frac{g_1^{\pm}(r)}{(1+r)^2} (1+r_{\pm})^2 \right).$$

В частности, часть кривой $g = g_1^+(r)$, $r \geq r_+$, отображается на отрезок $r = r_+$, $g_+ \leq g < (1+r_+)^2$, а часть кривой $g = g_1^+(r)$, $0 < r < r_+$, отображается на отрезок $r = r_+$, $0 < g < g_+$. Соответственно часть кривой $g = g_1^-(r)$, $r \leq r_-$, отображается на отрезок $r = r_-$, $(r_- + 1)^2 < g \leq g_-$, а часть $g = g_1^-(r)$, $r_- < r < -1$, — на отрезок $r = r_-$, $g_- < g < n(r_- + 1)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением можно проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta} &= \frac{(r'(r, g) + 1)^2}{g'(r, g)} - \frac{(r+1)^2}{g} = \\ &= \frac{n-1}{g(g-(r+1)^2)^2} \left(r+1 - \frac{1-n^{1-\alpha}}{n-\sqrt{n}} \right) \times \\ &\quad \times \left(r+1 - \frac{1-n^{1-\alpha}}{n+\sqrt{n}} \right) (g - g_1^+(r)) (g - g_1^-(r)). \end{aligned}$$

Таким образом, кривые $g = g_1^+(r)$ и $g = g_1^-(r)$ характеризуются тем свойством, что для них сохраняется значение β : $\beta = \beta'$. Этот факт вместе с леммой 3 показывает, что образы кривых $g = g^{\pm}(r)$ совпадают с прямыми $r = r_{\pm}$. Оставшиеся утверждения леммы легко проверяются.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения: $\lambda_1 = n^{\alpha-1}$, $\lambda_2 = n^{2\alpha-3}$.

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство $R(r, g_{\pm}(r)) = (r', g'_{\pm}(r'))$, где*

$$g'_{\pm}(r') = \frac{r'(r' + \lambda_1)^2}{r' + \lambda_1(1 \pm n^{1/2})},$$

r' в плюсовом и минусовом случаях вычисляется соответственно по формулам

$$r' = \pm \frac{\lambda_1 r}{(n^{1/2} \mp 1)r + n^{1/2}}.$$

В частности, часть кривой $g = g_+(r)$, $r \geq r_+$, отображается на часть кривой $g = g'_+(r)$, $r \geq r_+$, а часть $g = g_+(r)$, $0 \leq r < r_+$, — на часть кривой $g = g'_+(r)$, $0 < r < r_+$. Часть кривой $g = g_-(r)$, $r \leq r_-$, отображается на часть кривой $g = g'_-(r)$, $r_- \leq r \leq -\lambda_1(1 + n^{1/2})^{-1/2}$, а часть $g = g_-(r)$, $r_- < r \leq -1$, — на часть $g = g'_-(r)$, $-\lambda_1 \leq r < r_-$. При этом выполнены следующие неравенства:

$$g'_+(r) < g_+(r) \quad \text{при} \quad r > \max(0, r_+), \quad (6)$$

$$g'_+(r) > g_+(r) \quad \text{при} \quad 0 < r < \max(0, r_+), \quad (7)$$

$$g'_-(r) < g_1^-(r) \quad \text{при} \quad r < r_-, \quad (8)$$

$$g'_-(r) > g_1^-(r) \quad \text{при} \quad r_- < r < -1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы проверяется простым вычислением. Неравенства (6), (7) следуют из разложения

$$\begin{aligned} g_+(r) - g'_+(r) &= \frac{(n^{1/2} - 1)(\lambda_1 + n^{-1/2})}{(r + 1 + n^{-1/2})(r + \lambda_1(1 + n^{1/2}))} \times \\ &\times (r - r_+) \left(r + (1 + n^{-1/2}) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + n^{-1/2}} \right). \end{aligned}$$

Далее, уравнение $g'_-(r) = g_1^-(r)$ имеет три корня, один из которых равняется r_- . Легко видеть, что два других корня лежат правее -1 . Из того, что $r_- < -1$, $g_1^-(-\lambda_1) > g'_-(\lambda_1) = 0$, мы получаем доказательство неравенств (8), (9).

Пусть I_1 обозначает отрезок кривой, заданной в параметрической форме:

$$I_1 = \{ (r_1(t), g_1(t)) : t \in [0, 1] \}.$$

Пусть $\beta_1(t) = \beta(r_1(t), g_1(t))$.

Мы будем говорить, что I_1 удовлетворяет условию А, если

$$t_1 < t_2 \Rightarrow r_1(t_2) \leq r_1(t_1), \quad \beta_1(t_1) \leq \beta_1(t_2), \quad (10)$$

или удовлетворяет условию Б, если

$$t_1 < t_2 \Rightarrow g_1(t_1) \leq g_1(t_2), \quad \beta_1(t_1) \leq \beta_1(t_2), \quad (11)$$

причем одно из двух неравенств в (10), (11) должно быть строгим.

Пусть

$$\begin{aligned} G_2^1 &= G_2 \cap \{(r, g): r_- < r < -1\}, \\ G_2^2 &= G_2 \cap \{(r, g): r < r_-\}. \end{aligned}$$

Пусть функции $F_{\pm}(x)$ определяются формулами

$$F_{\pm}(x) = \frac{n}{c_{\pm}^2} x \left(\frac{n-x}{x-a_{\pm}} \right)^2,$$

где

$$c_{\pm} = 1 + \lambda_1(n \mp n^{1/2}), \quad a_{\pm} = 1 + \frac{n-1}{c_{\pm}}.$$

Обозначим через $x_{\pm}(\beta)$ корни уравнений $\beta = F_{\pm}(x)$, удовлетворяющие условиям $0 < x_+(\beta) < 1$ в плюсовом случае и $1 < x_-(\beta) < n$ в минусовом. Позже мы покажем, что $x_{\pm}(\beta)$ определены однозначно.

ЛЕММА 6. Пусть $I_1 \subset G_2^1 \cup G_2^2$, причем $g_1(0) = g_-(r_1(0))$, $g_1(1) = g_1^-(r_1(1))$ (соответственно $g_1(0) = g_1^-(r_1(0))$, $g_1(1) = g_-(r_1(1))$), I_1 удовлетворяет условию Б. Тогда существует такой интервал $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$, что

$$I_2 = \{(r'_1(t), g'_1(t)): t \in [a_1, b_1]\} = R I_1 \cap G_2^2$$

(соответственно $I_2 = R I_1 \cap G_2^1$). Здесь $(r', g') = R(r, g)$, $R I_1$ — образ I_1 при отображении R . При этом $g'_1(a_1) = g_1^-(r'_1(a_1))$, $g'_1(b_1) = g_-(r'_1(b_1))$ (соответственно $g'_1(a_1) = g_-(r'_1(a_1))$, $g'_1(b_1) = g_1^-(r'_1(b_1))$), I_2 удовлетворяет условию Б. Если $I_1 \subset G_2^1$, то

$$\beta(r'_1(a_1), g'_1(a_1)) > x_-(\beta_1(1)), \quad (12)$$

а если $I_1 \subset G_2^2$, то

$$\beta(r'_1(b_1), g'_1(b_1)) < x(\beta_1(0)). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_1 \subset G_2^1$. Так как для всех точек $(r, g) \in G_2^1$, $1 < \beta(r, g) < n$, то легко видеть, что для этих точек $r'(r, g) < r_-$. В силу лемм 2, 4, 5 и того, что $\beta(r, g)$ монотонно убывает по r для точек кривых $g = g_-(r)$, $g = g_1^-(r)$ при $r < -1$, и из условия Б следует, что $I_2 = R I_1 \cap G_2^2$ является связной частью кривой $R I_1$ и удовлетворяет условию Б. Интервал $[a_1, b_1]$ определяется как

$$[a_1, b_1] = \{t \in [0, 1]: (r'(t), g'(t)) \in I_2\}.$$

Так как кривая I_1 лежит ниже параболы с вершиной в точке $(-1, 0)$, проходящей через точку $(r_1(1), g_1(1))$, то I_2 лежит ниже параболы с вершиной в точке $(-\lambda_1, 0)$, проходящей через точку $(r'_1(1), g'_1(1))$. В соответствии с леммой 3 последняя парабола задается уравнением $g = \beta_1(1)(r + \lambda_1)^2/n$. Обозначим координаты точки пересечения этой параболы с кривой $g = g_1^-(r)$ через (r_0, g_0) .

Делая замену переменных

$$x = \frac{(r+1)(n+\sqrt{n}) - n(1-n^{1-\alpha})}{(r+1)(n+\sqrt{n}) - (1-n^{1-\alpha})},$$

получаем, что $\beta(r_0, g_0)$ является корнем уравнения $\beta_1(1) = F_-(x)$ таким, что $1 < x < n$. Из того, что точки (r_0, g_0) и $(r'_1(a_1), g'_1(a_1))$ лежат на кривой $g = g_1^-(r)$ и $r_0 < r'_1(a_1)$, следует вторая часть леммы.

Случай, когда $I_1 \subset G_2^2$, рассматривается аналогично.

Рассмотрим ситуацию в правом квадранте верхней полуплоскости, в котором находится плюсовая НТ при $\alpha \geq 3/2$ (при $\alpha = 3/2$ плюсовая НТ совпадает с тривиальной НТ). Пусть $G_1^1 = G_1 \cap \{(r, g): r > r_+\}$, $G_1^2 = G_1 \cap \{(r, g): 0 < r < r_+\}$.

ЛЕММА 7. Пусть $I_1 \subset G_1^1$ (G_1^2), причем

$$g_1(0) = g_+(r_1(0)), \quad g_1(1) = g_1^+(r_1(1))$$

(соответственно $g_1(0) = g_1^+(r_1(0))$, $g_1(1) = g_+(r_1(1))$), I_1 удовлетворяет условию А. Тогда существует такой интервал $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$, что

$$I_2 = \{(r'_1(t), g'_1(t)): t \in [a_1, b_1]\} = R I_1 \cap G_2^1$$

(соответственно $I_2 = R I_1 \cap G_2^1$). При этом $g'_1(a_1) = g_+(r'_1(a_1))$, $g'_1(b_1) = g_1^+(r'_1(b_1))$ (соответственно $g'_1(a_1) = g_1^+(r'_1(a_1))$, $g'_1(b_1) = g_+(r'_1(b_1))$), I_2 удовлетворяет условию А. Если $I_1 \subset G_1^1$, то

$$\beta(r'_1(b_1), g'_1(b_1)) < x_+(\beta_1(1)), \quad (14)$$

если $I_1 \subset G_1^2$, то

$$\beta(r'_1(a_1), g'_1(a_1)) > x_+(\beta_1(0)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 6.

В силу леммы 3 парабола $g = \beta(r+1)^2$, $\beta < 1$, при РГ-преобразовании переходит в параболу $g = \beta(r + \lambda_1)^2/n$ и пересечение этих парабол происходит при $r = r_+$. Если конец отрезка $I_1(r_1(1), g_1(1))$ лежит на кривой $g = g_1^+(r)$, а сам отрезок находится в области G_1^1 , то после итерации РГ I_1 растянется так, что $(r'_1(1), g'_1(1))$ будет лежать на прямой $r = r_+$, а $(r'_1(0), g'_1(0))$ — на кривой $g = r(r + \lambda_1)^2(r + \lambda_1(1 + n^{1/2}))^{-1}$ (в силу лемм 4 и 5). Так как $I_2 = R I_1 \cap G_1^1$ будет лежать ниже параболы

$$g = \beta(r_1(1), g_1(1))(r + \lambda_1)^2/n, \quad (16)$$

то для любой точки $(r, g) \in I_2$ будем иметь $\beta(r, g) < \beta(\tilde{r}, \tilde{g})$, где $(\tilde{r}, \tilde{g})$ — точка пересечения параболы (16) с кривой $g = g_1^+(r)$. Нетрудно показать, что $\beta(\tilde{r}, \tilde{g})$ является корнем уравнения $\beta(r_1(1), g_1(1)) = F_+(x)$ таким, что $0 < x < 1$. Тот факт, что I_2 удовлетворяет условию А, следует из леммы 1.

Можно показать, что если $I_1 \subset G_2^2$ и точка $(r_1(0), g_1(0))$ лежит не на кривой $g = g_1^+(r)$, а на кривой $g = g_4(r)$ или на прямой $g = 0$, то через конечное число k итераций РГ можно добиться того, что $R^k I_1 \cap G_1^1 = I_k$ будет представлять собой криволинейный отрезок, удовлетворяющий условию леммы 7.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $1 < \alpha < 3/2$. Здесь плюсовая НТ перейдет в нижнюю полуплоскость, зато тривиальная НТ $(0, 0)$ станет устойчивой по одному направлению. В этом случае множество G_1 задается как множество $\{(r, g): 0 \leq r, g_+(r) \leq g \leq g_1^+(r)\}$. Обозначим через γ кривую, образованную участком вертикальной прямой $\{(r, g): r = 0, 0 \leq g \leq g_1^+(0)\}$ и кривой $g = g_1^+(r), r > 0$.

ЛЕММА 8. Пусть $1 < \alpha < 3/2$, $I_1 \subset G_1$, причем $g_1(0) = g_+(r_1(0))$, $(r_1(1), g_1(1)) \in \gamma$, I_1 удовлетворяет условию А. Тогда существует интервал $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$ такой, что

$$I_2 = \{(r'_1(t), g'_1(t)): t \in [a_1, b_1]\} = R I_1 \cap G_1.$$

При этом $g'_1(a_1) = g_+(r_1(a_1))$, $(r'_1(b_1), g'_1(b_1)) \in \gamma$, I_2 удовлетворяет неравенству (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 6. Отметим только, что отрезок $r = 0, 0 < g < g_1^+(0)$ при одной итерации РГ перейдет в отрезок кривой

$$g = \frac{(r + \lambda_1)^2}{r - \lambda_1(n-1)}, \quad r_+ < r < 0,$$

и тем самым РГ-образ кривой γ будет лежать левее кривой γ . Далее схема доказательства совпадает со схемой доказательства леммы 6.

ЛЕММА 9. Уравнение

$$x_0 = F_-(x), \quad (17)$$

где $1 < x_0 < n$, имеет единственное решение в области $1 < x < n$. Последовательность x_n , задаваемая соотношениями

$$x_{n-1} = F_-(x_n), \quad 1 < x_n < n,$$

при любом $x_0 \in (1, n)$ сходится к β_- .

Уравнение

$$x_0 = F_+(x), \quad (18)$$

где $0 < x_0 < 1$, имеет единственное решение в области $0 < x < 1$. Последовательность x_n , задаваемая соотношениями

$$x_{n-1} = F_+(x_n), \quad 0 < x_n < 1,$$

при любом $x_0 \in (0, 1)$ сходится к β_+ , если $\alpha > 3/2$, и к 0, если $1 < \alpha \leq 3/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $x_0 = F_-(x)$ имеет, вообще говоря, три различных действительных корня при $x_0 > 0$. Анализ функции $F_-(x)$ показывает, что она монотонно возрастает в области $[0, a_-)$, монотонно убывает в области $(a_-, n]$ и монотонно возрастает в области (n, ∞) . Легко заметить, что $F_-(1) = n$. Так как $a_- > 1$, то в силу монотонного возрастания F_- на участке $[1, a_-)$ мы заключаем, что интересующее нас значение корня лежит в области (a_-, n) . В этой области функция F_- имеет обратную функцию.

Пусть F_-^{-1} обозначает отображение $F_-^{-1}: [1, n] \rightarrow [b_1, d_1]$, обратное к F_- на отрезке $[b_1, d_1]$. Здесь b_1 и d_1 однозначно определяются из условий $n = F_-(b_1)$, $a_- < b_1 < n$, $1 = F_-(d_1)$, $a_- < d_1 < n$. Разрешимость этих уравнений следует из того, что $F_-(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a_-$, и того, что $F_-(n) = 0$. Так как F_-^{-1} строго монотонно убывает на $[1, n]$, то F_-^{-2} монотонно возрастает на $[1, n]$, причем очевидно, что $F_-^{-2}(1) > 1$, $F_-^{-2}(n) < n$. Покажем, что уравнение $F_-^{-2}(x) = x$ имеет единственное решение $x = \beta_-$ на интервале $[1, n]$. Эквивалентное утверждение состоит в том, что уравнение $F_-^2(x) = x$ обладает единственным решением β_- на отрезке $(a_-, n]$.

Действительно, пусть $F_-^2(x) = x$. В этом случае $F_-(x)$ должно быть одним из трех корней уравнения $F_-(y) = x$ (y — неизвестное, x — параметр, $1 < x < n$). Но из сказанного выше следует, что один из этих корней меньше 1, а другой больше n . Значит, уравнение $F_-^2(x) = x$ при условии $1 < F_-(x) < n$ сводится к уравнению $F_-(x) = x$, $1 < x < n$, которое имеет единственное решение $x = \beta_-$. Из этого факта и монотонности F_-^{-2} на $[1, n]$ следует утверждение о сходимости последовательности $x_n = F_-^{-1}(x_{n-1})$ к β_- .

Существование и единственность решения уравнения (18) в области $0 < x < 1$ следует из того, что $F_+(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на этом интервале и $F_+(0) = 0$, $F_+(1) = n$. При $\alpha > 3/2$ отображение F_+ на $[0, 1]$ имеет единственную устойчивую НТ $x = \beta_+$, а при $1 < \alpha < 3/2$ устойчивой становится тривиальная НТ $x = 0$. Отсюда и следуют оставшиеся утверждения леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим случай минусовой НТ. Пусть для определенности $I_1 \subset G_2^1$. Рассмотрим последовательность отрезков I_k , определяемых соотношением

$$I_k = R I_{k-1} \cap G_2, \quad k = 2, \dots$$

Тогда последовательность $T_k = R^{-k+1} I_k$ образует последовательность замкнутых, вложенных друг в друга отрезков (подмножеств отрезка I_1). Таким образом, $T = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k$ является замкнутым связным подмножеством отрезка I_1 . Покажем, что для всех точек $(r, g) \in T$

$$R^k(r, g) \rightarrow (r_-, g_-) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Обозначим через x_k последовательность точек, которая определяется из соотношений

$$x_{k-1} = F_-(x_k), \quad 1 < x_k < n, \quad x_0 = \beta(r_1(1), g_1(1)). \quad (20)$$

В силу леммы 6 для любой точки $(r, g) \in I_k$ имеем $\beta_- < \beta(r, g) < x_k$ при нечетных k и $x_k < \beta(r, g) < \beta_-$ для четных k . Если мы докажем, что $x_k \rightarrow \beta_-$ при $k \rightarrow \infty$, то из

соотношений

$$I_k \subset G_2^1 \cap \{(r, g) : \beta_- < \beta(r, g) \leq x_k\}, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (21)$$

$$I_k \subset G_2^2 \cap \{(r, g) : x_k \leq \beta(r, g) < \beta_-\}, \quad k = 2, 4, 6, \dots, \quad (22)$$

и будет следовать (19), поскольку множества из правых частей (21), (22), начиная с некоторого k , попадают в сколь угодно малую окрестность точки (r_-, g_-) .

Случай плюсовой НТ устроен еще проще. Пусть, например, $I_1 = \{(r, g) : r = r_0\} \cap G_1^1$ (считаем, что $r_0 > r_+$, $\alpha \geq 3/2$). Очевидно, что отрезок I_1 удовлетворяет условию леммы 7.

Пусть $I_k = R I_{k-1} \cap G_1^1$, $k = 2, 3, \dots$. Тогда последовательность отрезков $T_k = R^{-k+1} I_k$, $k = 2, 3, \dots$, образует последовательность замкнутых, вложенных друг в друга отрезков (подмножеств I_1). Для любой точки

$$(r, g) \in T = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k$$

имеем $R^k(r, g) \rightarrow (r_+, g_+)$ при $k \rightarrow \infty$.

В самом деле, согласно неравенству (14) для любой точки $(r, g) \in I_k$ верно, что

$$\beta_+ < \beta(r, g) < x_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где последовательность x_k задается соотношением $x_{k-1} = F_+(x_k)$, $0 < x_k < 1$, $x_0 = \beta(r_0, g_1^+(r_0))$. Вследствие того что x_k сходится к β_+ , мы получаем требуемое утверждение. Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Нам осталось доказать, что множество T как в плюсовом, так и в минусовом случаях состоит из единственной точки.

Рассмотрим сначала случай плюсовой НТ. Пусть T является отрезком: $T = \{(r, g) : r = r_0, \tilde{g}_2 < g < \tilde{g}_1\}$, $r_0 > 0$. Легко видеть, что за одну итерацию РГ отрезок T переходит в криволинейный отрезок RT с концами (r_1, g_1) , (r_2, g_2) , где $r_1 < r_2$. Пусть

$$(r_i^{(k)}, g_i^{(k)}) = R^k(r_i, g_i), \quad i = 1, 2.$$

Из определения T и леммы 1 следует, что $r_2^{(k)} > r_1^{(k)} > -1$, $1 > \beta_1^{(k)} > \beta_2^{(k)}$, где $\beta_i^{(k)} = \beta(r_i^{(k)}, g_i^{(k)})$, $i = 1, 2$. Тогда $\sigma_1^{(k)} < \sigma_2^{(k)}$, где $\sigma_i^{(k)} = (1 - \beta_i^{(k)})/(1 - \beta_i^{(k)}/n)$, $i = 1, 2$. При $\beta \rightarrow \beta_+$ получаем $\sigma(\beta) = (1 - \beta)/(1 - \beta/n) \rightarrow n^{3/2-\alpha}$. Поскольку $\beta_2^{(k)} \rightarrow \beta_+$, то из неравенства

$$r_2^{(k+1)} - r_1^{(k+1)} = \lambda_1 \left(\sigma_2^{(k)} (r_2^{(k)} + 1) - \sigma_1^{(k)} (r_1^{(k)} + 1) \right) \geq \lambda_1 \sigma_2^{(k)} (r_2^{(k)} - r_1^{(k)})$$

следует, что начиная с некоторого k

$$r_2^{(k+1)} - r_1^{(k+1)} \geq (r_2^{(k)} - r_1^{(k)}).$$

Это входит в противоречие с тем фактом, что $r_2^{(k)} - r_1^{(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь случай минусовой НТ.

Пусть T является отрезком: $T = \{(r, g): r = r_0, g_2 < g < g_1\}$, $r_0 < -1$. В этом случае мы находимся в условиях леммы 2. Поэтому $n > \beta_1^{(k)} > \beta_2^{(k)} > 1$, $r_i^{(k)} < -1$, $i = 1, 2$, $g_1^{(k)} > g_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $(\sigma_1^{(k)})^2 > (\sigma_2^{(k)})^2$, то мы имеем

$$\begin{aligned} g_1^{(k)} - g_2^{(k)} &= \lambda_2 \left((\sigma_1^{(k-1)})^2 g_1^{(k-1)} - (\sigma_2^{(k-1)})^2 g_2^{(k-1)} \right) \geq \\ &\geq \lambda_2 (\sigma_1^{(k-1)})^2 (g_1^{(k-1)} - g_2^{(k-1)}) \geq \lambda_2^k (\sigma_1^{(k-1)})^2 \sigma_1^{(k-2)} \dots \sigma_1^2 (g_1 - g_2). \end{aligned}$$

Из соотношений (21), (22) следует, что $|\beta_1^{(k)} - \beta_-| < |x_k - \beta_-|$, $k = 1, 2, \dots$, где x_k определяются соотношением (20).

Легко проверить, что в окрестности $x = \beta_-$ отображение F_-^{-1} является сжимающим, поэтому мы можем утверждать, что

$$|\beta_1^{(k)} - \beta_-| < c_1 d^k, \quad d < 1. \quad (23)$$

Из представления

$$\sigma_1^{(k)} = \frac{1 - \beta_-}{1 - \beta_-/n} f(\beta_1^{(k)}) = -\lambda_2^{-1/2} f(\beta_1^{(k)}),$$

где

$$f(\beta_1^{(k)}) = \frac{1 - (\beta_1^{(k)} - \beta_-)/(1 - \beta_-)}{1 - (\beta_1^{(k)} - \beta_-)/(n - \beta_-)},$$

и из того, что бесконечное произведение $\prod_k f(\beta_1^{(k)})$ сходится в силу (23), мы получаем

$$g_1^{(k)} - g_2^{(k)} \geq c_2 (g_1 - g_2), \quad c_2 > 0.$$

Это противоречит тому, что $g_1^{(k)} - g_2^{(k)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Перейдем к рассмотрению инвариантных кривых в нижней полуплоскости $g < 0$ при $\alpha \geq 3/2$. Тривиальная НТ $(0,0)$ является отталкивающей при $\alpha > 3/2$. Бесконечное множество неустойчивых инвариантных кривых, выходящих из нуля, являются устойчивыми инвариантными кривыми для бесконечно удаленной НТ, отвечающей потенциалу, задаваемому грассмановой δ -функцией $\delta(\psi) = \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2$. Из всех этих инвариантных кривых только одна остается в области, ограниченной по r .

Пусть

$$\begin{aligned} g_2(r) &= \frac{(1 - n^{1-\alpha})r}{(1 - n^{-\alpha})r + 1 - n^{-1}} (1 + r)^2, \\ G_3 &= \{(r, g): r_c < r \leq 0, g_2(r) \leq g < 0\}, \end{aligned}$$

где $r_c = -(1 - n^{-1})/(1 - n^{-\alpha})$. Несложно проверить, что

$$r'(r, g) - r = (n^\alpha - 1) \frac{r - r_c}{g - n(r + 1)^2} (g - g_2(r)).$$

Отсюда следует лемма 10.

ЛЕММА 10. Пусть $g < 0$. Для всех точек (r, g) таких, что $r < r_c$ или $(r, g) \in G_3$, имеет место неравенство $r'(r, g) < r$. Для всех точек $(r, g_2(r))$ верно $r'(r, g) = r$. Для всех остальных точек нижней полуплоскости $r'(r, g) > r$.

Очевидно также, что для всех точек нижней полуплоскости $g'(r, g) < g$ при $\alpha \geq 3/2$.

Поскольку конечных НТ в нижней полуплоскости нет, g -координата РГ-итераций любой точки нижней полуплоскости стремится к $-\infty$. Если $R^n(r, g)$ асимптотически стремится к прямой $r = b$, где b – некоторая константа, то из монотонного характера РГ-итераций следует, что b должна удовлетворять уравнению

$$b = n^{\alpha-1}(n(1+b) - 1),$$

т.е. $b = r_c$.

ТЕОРЕМА 2. Существует функция $g = h_3(r)$, $r_c < r \leq 0$, график которой является единственной неустойчивой (для тривиальной НТ) РГ-инвариантной кривой, лежащей в области, ограниченной по r . Функция $h_3(r)$ монотонно возрастает по r , $h_3(r) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow r_c$, $h_3(0) = 0$, $h_3(r) > g_2(r)$ при $r_c < r < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к координатам (r, t) , где $t = g^{-1}$. В этих координатах РГ-преобразование запишется как

$$r' = n^{\alpha-1} \left(\frac{t(r+1)^2 - 1}{t(r+1)^2 - 1/n} (r+1) - 1 \right), \quad (24)$$

$$t' = n^{3-2\alpha} \left(\frac{t(r+1)^2 - 1/n}{t(r+1)^2 - 1} \right)^2 t. \quad (25)$$

Обозначим преобразование (24), (25) через $\tilde{R}$: $\tilde{R}(r, t) = (r', t')$. Точка $(r_c, 0)$ является НТ $\tilde{R}$. Собственные числа дифференциала отображения $\tilde{R}$ в $(r_c, 0)$ равны $\mu_1 = n^\alpha$ и $\mu_2 = n^{1-2\alpha}$, причем первому собственному числу отвечает собственный вектор $e_1 = (0, 1)$, а второму – вектор $e_2 = (1, a)$, где $a = -(n-1)^{-1}(1+r_c)^{-3}(1-n^{1-3\alpha})$.

Поскольку $0 < \mu_2 < 1 < \mu_1$, из общей теории динамических систем (см., например, [7]) следует, что существует единственная устойчивая $\tilde{R}$ -инвариантная кривая для точки $(r_c, 0)$, причем в точке $(r_c, 0)$ эта кривая касается вектора e_2 .

Легко проверить, что производная функции $t = g_2^{-1}(r)$ в точке r_c больше, чем a . С другой стороны, $a < 0$. Отсюда заключаем, что устойчивая $\tilde{R}$ -инвариантная кривая в окрестности точки $(r_c, 0)$ лежит в области $\tilde{G}_3$, ограниченной слева прямой $r = r_c$ и справа кривой $t = g_2^{-1}(r)$. Применяя к этой части инвариантной кривой итерации отображения $\tilde{R}^{-1}$, мы получим всю эту кривую. Из леммы 10 следует, что кривая целиком лежит в области $\tilde{G}_3$ и является графиком монотонно убывающей функции, стремящейся к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$. Единственность этой кривой следует из теоремы о единственности устойчивой инвариантной кривой. Все остальные $\tilde{R}$ -инвариантные кривые являются неустойчивыми для точки $(r_c, 0)$ и касаются в ней прямой $g = 0$.

Возвращаясь к координатам (r, g) , получаем утверждение теоремы.

При $1 < \alpha < 3/2$ единственность РГ-инвариантной кривой, стремящейся к $-\infty$ по g и ограниченной по r , остается в силе, но другим концом эта кривая входит уже в нетривиальную плюсовую НТ, которая при этих значениях α находится в нижней полуплоскости. Анализ спектра дифференциала РГ в плюсовой НТ показывает, что существует $\alpha_0 < 3/2$ такое, что при $\alpha < \alpha_0$ плюсовая НТ становится неустойчивым фокусом.

Компьютерный эксперимент показывает, что при $\alpha < \alpha_0$ устойчивые инвариантные кривые для тривиальной и бесконечно удаленной НТ “наматываются” на плюсовую НТ. При $\alpha_0 \leq \alpha < 3/2$ эти кривые выходят из плюсовой НТ. Таким образом, нижняя полуплоскость делится на две части: в левой части r -координата итераций РГ стремится к $-\infty$, в правой — к $+\infty$.

Отметим, наконец, что гладкость всех перечисленных выше инвариантных кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ следует из локальных теорем о гладкости инвариантных кривых в окрестности НТ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00270) и Международного научного фонда (код гранта RHA300).

Список литературы

- [1] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805.
- [2] *P. M. Bleher, Ya. G. Sinai.* Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. № 1. P. 23.
- [3] *Я. Г. Синай.* Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [4] *P. Collet P., J.-P. Eckmann.* A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics. Lecture Notes in Physics. V. 74. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1978.
- [5] *P. M. Bleher, P. Major.* Ann. Prob. 1987. V. 15. P. 431.
- [6] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 201.
- [7] *Ж. Палис, В. ди Мелу.* Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 22.V.1997 г.,
после переработки 8.XII.1997 г.