Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нианн-Черн Ли, Мин-Хсиень Ту, Замечание о расширенной бездисперсионной иерархии Тоды, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 1, 35–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:43:33

© 2013 г.

Нианн-Черн Ли*, Мин-Хсиень Ту†

ЗАМЕЧАНИЕ О РАСШИРЕННОЙ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ ТОДЫ

Приведен вывод бездисперсионных уравнений Хироты для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды. Показано, что бездисперсионные уравнения Хироты суть не что иное, как прямое следствие топологического рекурсионного соотношения для топологической CP^1 -модели рода ноль. С использованием бездисперсионных уравнений Хироты вычислены двухточечные функции, а результат выражен в терминах чисел Каталана.

Ключевые слова: расширенная бездисперсионная иерархия Тоды, бездисперсионное уравнение Хироты, число Каталана, топологическая теория поля.

DOI: 10.4213/tmf8430

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе [1] было приведено комбинаторное описание одномерной бездисперсионной иерархии Тоды, которое использовалось для решения задачи двух вертексов на сфере. Основная стратегия заключалась в том, чтобы охарактеризовать свободную энергию $F(t_0, t)$ ($t = (t_1, t_2, \dots)$) бездисперсионной иерархии Тоды с помощью соответствующих бездисперсионных уравнений Хироты. Тогда вторые производные свободной энергии $\partial_{t_n} \partial_{t_m} F \equiv F_{n,m}$ удовлетворяют некоторой системе алгебраических соотношений. Неожиданным образом удалось найти замкнутый вид для рациональных чисел $F_{n,m}$ для общих n и m при условиях $F_{01} = F_{00} = 0$. В частности, формулы для $F_{n,m}$ можно выразить в терминах чисел Каталана, которые обычно возникают в контексте комбинаторики перечислений (см., например, монографию [2]). Результат работы [1] для $F_{n,m}$ придает комбинаторный смысл задаче вычисления связанных ленточных графов с двумя вершинами степени n и m на сфере и является обобщением предыдущих работ, где эта задача была решена только для случая вершин одинаковой степени (т.е. F_{nn}) [3], [4].

В настоящей работе, основываясь на приведенном выше результате, мы обобщили вычисление двухточечных функций $F_{n,m}$ на расширенную бездисперсионную иерархию Тоды [5]–[8], представляющую собой расширение одномерной бездисперсионной

*General Education Center, National Chin-Yi University of Technology, Taichung, Taiwan

†Department of Physics, National Chung Cheng University, Chiayi, Taiwan.

E-mail: phymhtu@ccu.edu.tw

иерархии Тоды путем добавления сохраняющихся плотностей логарифмического типа. Расширенная бездисперсионная иерархия Тоды представляет собой бездисперсионный предел расширенной иерархии Тоды [9], [10], которая использовалась для управления инвариантами Громова–Виттена (ГВ) (см., например, работу [11] и цитируемую там литературу) для многообразия $\mathbb{C}P^1$. Таким образом, расширенная бездисперсионная иерархия Тоды становится мастер-уравнением рода ноль для инвариантов ГВ, производящая функция которых характеризуется свободной энергией расширенной бездисперсионной иерархии Тоды. Основываясь на методе теории твисторов [12], [13], расширенную бездисперсионную иерархию Тоды можно построить путем добавления логарифмического потока к одномерной бездисперсионной иерархии Тоды. Соответствующий оператор Орлова–Шульмана сопряжен оператору Лакса относительно скобки Пуассона, что налагает дополнительное условие (так называемое струнное уравнение) на свободную энергию расширенной бездисперсионной иерархии Тоды. Мы покажем, что потоки всей иерархии можно выразить в терминах вторых производных соответствующей свободной энергии F , поэтому их можно рассматривать как соответствующие бездисперсионные уравнения Хироты. Затем исследуем двухточечные функции расширенной бездисперсионной иерархии Тоды на основе ассоциированных бездисперсионных уравнений Хироты, а результат выразим в терминах чисел Каталана. Чтобы связать это с топологической теорией поля, мы перепишем бездисперсионные уравнения Хироты в терминах $\mathbb{C}P^1$ -временных параметров и покажем, что эти уравнения действительно являются прямым следствием топологического рекурсионного соотношения [14] топологической $\mathbb{C}P^1$ -модели рода ноль.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем формализм Лакса для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды. В разделе 3 выводится бездисперсионное уравнение Хироты для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды, которую можно выразить как систему уравнений для вторых производных свободной энергии. Начальные значения двухточечных функций расширенной бездисперсионной иерархии Тоды вычислены в разделе 4. В разделе 5 бездисперсионные уравнения Хироты интерпретируются с точки зрения топологической теории поля. Раздел 6 посвящен заключительным замечаниям.

2. РАСШИРЕННАЯ БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ ИЕРАРХИЯ ТОДЫ

Одномерная бездисперсионная иерархия Тоды [1], [12], определяется уравнением Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = \{B_n, L\}, \quad B_n = (L^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где L – оператор Лакса от двух переменных, имеющий вид

$$L = p + u_1 + u_2 p^{-1}, \quad (1)$$

а u_1 и u_2 – функции временных переменных $t = (t_1, t_2, \dots)$ и пространственной переменной t_0 . Здесь $(A(p))_{\geq 0}$ обозначает полиномиальную часть $A(p)$, $(A(p))_{\leq -1} = A(p) - (A(p))_{\geq 0}$, а скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ определяется как

$$\{A(p, t_0), B(p, t_0)\} = p \frac{\partial A(p, t_0)}{\partial p} \frac{\partial B(p, t_0)}{\partial t_0} - p \frac{\partial A(p, t_0)}{\partial t_0} \frac{\partial B(p, t_0)}{\partial p}.$$

В частности, фундаментальные переменные u_1 и u_2 можно выразить в терминах вторых производных F как

$$u_1 = F_{01}, \quad u_2 = F_{11} = e^{F_{00}},$$

где второе уравнение представляет собой в точности одномерную редукцию полевого бездисперсионного уравнения Тоды. Следуя твисторному построению из работ [12], [13], расширенную бездисперсионную иерархию Тоды можно построить из одномерной бездисперсионной иерархии Тоды, добавляя $\hat{t}_n$ -поток как

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{t}_n} = \{\hat{B}_n, L\}, \quad \hat{B}_n = (L^n(\ln L - d_n))_{\geq 0}, \quad (2)$$

где $d_n = \sum_{j=1}^n 1/j$, $d_0 \equiv 0$, а $\ln L$ определяется формулой [5]

$$\ln L = \frac{1}{2} \ln u_2 + \frac{1}{2} \ln(1 + u_1 p^{-1} + u_2 p^{-2}) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{u_1}{u_2} p + \frac{1}{u_2} p^2 \right) \quad (3)$$

с дополнительной оговоркой, что мы разлагаем в ряд Тейлора во втором члене по p^{-1} , а в последнем – по p . Более того, ассоциированный ряд Орлова–Шульмана имеет вид

$$N(t_0, t, \hat{t}) = \sum_{n=1} n t_n L^n + t_0 + \sum_{n=1} n \hat{t}_n L^n (\ln L - d_{n-1}) + \sum_{n=1} F_{n0} L^{-n}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\partial_{t_n} N = \{B_n, N\}, \quad \partial_{\hat{t}_n} N = \{\hat{B}_n, N\}, \quad \{L, N\} = L.$$

Симплектическую 2-форму расширенной бездисперсионной иерархии Тоды можно записать как

$$\omega \equiv \frac{dp}{p} \wedge dt_0 + \sum_{n=1}^{\infty} dB_n \wedge dt_n + \sum_{n=1}^{\infty} d\hat{B}_n \wedge d\hat{t}_n = \frac{dL \wedge dN}{L},$$

откуда следует существование такой функции S , что

$$dS(t_0, t, \hat{t}) = N d \ln L + \ln p dt_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n dt_n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_n d\hat{t}_n,$$

или, эквивалентно,

$$N = \frac{\partial S}{\partial \ln L}, \quad \ln p = \frac{\partial S}{\partial t_0}, \quad B_n = \frac{\partial S}{\partial t_n}, \quad \hat{B}_n = \frac{\partial S}{\partial \hat{t}_n}.$$

Можно показать, что функция S имеет вид

$$S = \sum_{n=1} t_n L^n + t_0 \ln L + \sum_{n=1} \hat{t}_n L^n (\ln L - d_n) - \sum_{n=1} \frac{F_{0n}}{n} L^{-n}.$$

Полагая $\hat{t}_n = 0$ при $n \geq 1$, воспроизводим функцию S одномерной бездисперсионной иерархии Тоды. Наконец, твисторное построение [13] позволяет получить струнное уравнение

$$-1 = \sum_{n=2}^{\infty} n t_n \frac{\partial L}{\partial t_{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{t}_n \frac{\partial L}{\partial \hat{t}_{n-1}} \quad (4)$$

для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды, не обращаясь к $\mathbb{CP}^1$ -матричной модели [5].

3. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выполнены следующие соотношения:*

$$F_{n0} = (B_n)_{[0]}, \quad F_{n1} = \text{res}(L^n), \quad n \geq 1, \quad (5)$$

$$F_{\hat{n}0} = (\hat{B}_n)_{[0]}, \quad F_{\hat{n}1} = \text{res}(L^n(\ln L - d_n)), \quad n \geq 0, \quad (6)$$

$$\text{где } \left(\sum_k a_k p^k \right)_{[j]} = a_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\ln p = \partial S / \partial t_0$ имеем

$$\ln p = \ln L - \sum_{n=1} \frac{F_{0n}}{n} L^{-n} \quad (7)$$

или

$$L = p \exp \left(\sum_{n=1} F_{0n} L^{-n} \right) = p + F_{01} + \left(-u_1 F_{01} + \frac{1}{2} F_{02} + \frac{1}{2} (F_{01})^2 \right) p^{-1} + O(p^{-2}),$$

что дает $u_1 = F_{01}$ и $u_2 = F_{02}/2 - (F_{01})^2/2$. Поэтому из p^0 -члена уравнения Лакса получаем $F_{n0} = (B_n)_{[0]}$. С другой стороны, из $B_n = \partial S / \partial t_n$ имеем

$$B_n = L_+^n = L^n - \sum_{m=1} \frac{F_{nm}}{m} L^{-m}.$$

При $n = 1$ имеем $u_2 p^{-1} = \sum_{m=1} F_{1m} L^{-m} / m$, откуда с учетом (7) следует $F_{m1} = m u_2 P_{m-1}(F_{0j}/j)$, где $P_m(t)$ – многочлены Шура, определяемые как $\exp(\sum_{j=1} t_j z^j) = \sum_{j=0} P_j(t) z^j$. В частности, $u_2 = e^{F_{00}} = F_{11}$. Кроме того, для p^{-1} -члена уравнения Лакса имеем $F_{n1} = \text{res}(L^n) = u_2 (B_n)_{[1]}$. Далее, из $\hat{B}_n = \partial S / \partial \hat{t}_n$ получаем

$$\hat{B}_n = [L^n(\ln L - d_n)]_+ = L^n(\ln L - d_n) - \sum_{m=1} \frac{F_{\hat{n}m}}{m} L^{-m}.$$

p^{-1} -Член дает $F_{\hat{n}1} = \text{res}(L^n(\ln L - d_n)) = u_2 (L^n(\ln L - d_n))_{[1]}$, где последнее равенство есть следствие тождества $\text{res}(L^n(\ln L - d_n)dL) = 0$. Наконец, из p^0 -члена уравнения Лакса (2) имеем $F_{\hat{n}0} = (\hat{B}_n)_{[0]}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Двухточечные функции F_{n0} , F_{n1} , $F_{\hat{n}0}$ и $F_{\hat{n}1}$ можно выразить в терминах F_{01} и F_{00} следующим образом:*

$$\begin{aligned} F_{n0} &= \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!}{s!s!(n-2s)!} F_{01}^{n-2s} e^{sF_{00}}, \\ F_{n+1,1} &= \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(n+1)!}{s!(s+1)!(n-2s)!} F_{01}^{n-2s} e^{(s+1)F_{00}}, \\ F_{\hat{n}0} &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!}{s!s!(n-2s)!} F_{01}^{n-2s} e^{sF_{00}} (F_{00} - 2d_s), \\ \widehat{F_{n+1,1}} &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(n+1)!}{s!(s+1)!(n-2s)!} F_{01}^{n-2s} e^{(s+1)F_{00}} \left(F_{00} - 2d_s - \frac{1}{s+1} \right) + \frac{F_{01}^{n+2}}{2(n+2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с использованием биномиального разложения степеней L в (5) и разложения в ряд Тейлора в (6) с учетом формулы (3) для $\ln L$.

Теперь мы подошли к основному результату настоящей работы, а именно к выводу бездисперсионного уравнения Хироты для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды из формулировки Лакса. Результат выражается в терминах вторых производных свободной энергии $F(t_0, t, \hat{t})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Свободная энергия $F(t_0, t, \hat{t})$ расширенной бездисперсионной иерархии Тоды удовлетворяет уравнениям*

$$\frac{F_{n+1,m}}{n+1} + \frac{F_{n,m+1}}{m+1} = F_{m,0}F_{n,1} + F_{m,1}F_{n,0}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

$$\frac{F_{\widehat{n+1},m}}{n+1} + \frac{F_{\widehat{n},m+1}}{m+1} = F_{m,0}F_{\widehat{n},1} + F_{m,1}F_{\widehat{n},0}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

$$\frac{F_{\widehat{n+1},\widehat{m}}}{n+1} + \frac{F_{\widehat{n},\widehat{m+1}}}{m+1} = F_{\widehat{m},0}F_{\widehat{n},1} + F_{\widehat{m},1}F_{\widehat{n},0}, \quad m, n \geq 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства справедливости уравнения (9) заметим, что

$$\begin{aligned} F_{m,n+1,0} &= \frac{\partial F_{n+1,0}}{\partial t_m} = \frac{\partial (L^{n+1})_{[0]}}{\partial t_m} = (n+1) \left(L^n \frac{\partial L}{\partial t_m} \right)_{[0]} = \\ &= (n+1) \left((B_n)_{[0]} \frac{\partial u_1}{\partial t_m} + (B_n)_{[1]} \frac{\partial u_2}{\partial t_m} \right) = \\ &= (n+1)(F_{n,0}F_{m,1,0} + F_{m,0,0}F_{n,1}), \end{aligned}$$

где для получения последнего равенства мы использовали соотношения $u_1 = F_{01}$ и $u_2 = e^{F_{00}}$. Аналогично имеем

$$F_{n,m+1,0} = (m+1)(F_{m,0}F_{n,1,0} + F_{n,0,0}F_{m,1}),$$

откуда получаем

$$\frac{F_{n+1,m}}{n+1} + \frac{F_{n,m+1}}{m+1} = F_{m,0}F_{n,1} + F_{m,1}F_{n,0}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Уравнения (10) и (11) проверяются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все двухточечные функции F_{mn} , $F_{\widehat{m}n}$ и $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ определяются фундаментальными переменными F_{00} и F_{01} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой немедленное следствие предложений 2 и 3.

Ниже мы покажем, что выражения (9)–(11) имеют простую интерпретацию с точки зрения топологической теории поля.

4. ЧИСЛА КАТАЛАНА И ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Из бездисперсионных уравнений Хироты (9)–(11) мы видим, что структурные элементы представляют собой двухточечные функции (5) и (6). Основываясь на результатах работы [1], мы рассмотрим двухточечные функции F_{mn} , $F_{\widehat{m}n}$ и $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ в случае $F_{00} = F_{01} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы равенства*

$$F_{2k,0} = (k+1)C_k, \quad F_{2k+1,0} = 0, \quad (12)$$

$$F_{2k+1,1} = (2k+1)C_k, \quad F_{2k,1} = 0, \quad (13)$$

$$F_{\widehat{2k},0} = -(k+1)d_k C_k, \quad F_{\widehat{2k+1},0} = 0, \quad (14)$$

$$F_{\widehat{2k+1},1} = -(2k+1) \left(d_k + \frac{1}{2(k+1)} \right) C_k, \quad F_{\widehat{2k},1} = 0, \quad (15)$$

где C_k есть k -е число Каталана, определяемое как

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается немедленно, если в уравнениях (8) положить $u_1 = F_{01} = 0$ и $u_2 = F_{11} = e^{F_{00}} = 1$.

Выведем еще раз двухточечные функции $F_{n,m}$ из бездисперсионного уравнения Хироты (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [1]. *Двухточечные функции F_{nm} для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды при $F_{00} = 0$ и $F_{01} = 0$ имеют вид*

$$\begin{aligned} F_{2k,0} &= (k+1)C_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ F_{2k+1,2l+1} &= \frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{l+k+1} C_k C_l, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \\ F_{2k,2l} &= \frac{lk(l+1)(k+1)}{l+k} C_k C_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, \\ F_{nm} &= 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{aligned}$$

где C_k — k -е число Каталана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем вывод $F_{2k,2l}$ из бездисперсионного уравнения Хироты (9). Запишем $F_{2k,2l}$ в виде

$$\begin{aligned} F_{2k,2l} &= \left(F_{2k,2l} + \frac{2l}{2k+1} F_{2k+1,2l-1} \right) - \frac{2l}{2k+1} \left(F_{2k+1,2l-1} + \frac{2l-1}{2k+2} F_{2k+2,2l-2} \right) + \\ &\quad + \frac{2l(2l-1)}{(2k+1)(2k+2)} \left(F_{2k+2,2l-2} + \frac{2l-2}{2k+3} F_{2k+3,2l-3} \right) + \dots + \\ &\quad + \frac{2l(2l-1) \dots 3}{(2k+1)(2k+2) \dots (2k+2l-2)} \left(F_{2k+2l-2,2} + \frac{2}{2k+2l-1} F_{2k+2l-1,1} \right) - \\ &\quad - \frac{2l!}{(2k+1)(2k+2) \dots (2k+2l-1)} F_{2k+2l-1,1}. \end{aligned}$$

Тогда, используя бездисперсионное уравнение Хироты (9), получим

$$\begin{aligned} F_{2k,2l} &= 2l(F_{2k,0}F_{2l-1,1} + F_{2k,1}F_{2l-1,0}) - \frac{2l(2l-1)}{2k+1} (F_{2k+1,0}F_{2l-2,1} + F_{2k+1,1}F_{2l-2,0}) + \\ &\quad + \frac{2l(2l-1)(2l-2)}{(2k+1)(2k+2)} (F_{2k+2,0}F_{2l-3,1} + F_{2k+2,1}F_{2l-3,0}) + \dots - \\ &\quad - \frac{2l!}{(2k+1)(2k+2) \dots (2k+2l-1)} F_{2k+2l-1,1}. \end{aligned}$$

С учетом равенств (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned}
 F_{2k,2l} &= 2l((k+1)C_k(2l-1)C_{l-1}) - \frac{2l(2l-1)}{2k+1}(2k+1)C_k l C_{l-1} + \\
 &+ \frac{2l(2l-1)(2l-2)}{(2k+1)(2k+2)}(k+2)C_{k+1}(2l-3)C_{l-2} + \dots + \\
 &+ \frac{(2l)!}{(2k+1)(2k+2) \dots (2k+2l-2)}(k+l)C_{k+l-1} - \\
 &- \frac{(2l)!}{(2k+1)(2k+2) \dots (2k+2l-1)}(2k+2l-1)C_{k+l-1} = \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(2l)!(2k)!}{(2l-2i-2)!(2k+2i)!} [(k+i+1) - (l-i)] C_{k+i} C_{l-i-1} = \\
 &= \frac{l!k!(l+1)!(k+1)!C_k C_l}{(k+l)!(k+l-1)!} \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k+l-1}{i} \left[\binom{k+l}{i+1} - \binom{k+l}{i} \right],
 \end{aligned}$$

где для чисел Каталана использовалась формула

$$C_{k+p} = 2^p \frac{(2k+2p-1)!!(k+1)!}{(2k-1)!!(k+p+1)!} C_k.$$

Для любого $p > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k+l-1}{i} \left[\binom{k+l}{i+1} - \binom{k+l}{i} \right] &= \sum_{i=1}^p \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1} \right] = \\
 &= \sum_{i=2}^p \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l-1}{i} + \binom{k+l-1}{i-1} - \right. \\
 &\quad \left. - \binom{k+l-1}{i-1} - \binom{k+l-1}{i-2} \right] + (k+l-1) = \\
 &= \binom{k+l-1}{p-1} \binom{k+l-1}{p},
 \end{aligned}$$

где при получении второго равенства использовалось тождество Паскаля $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
 F_{2k,2l} &= \frac{l!k!(l+1)!(k+1)!C_k C_l}{(k+l)!(k+l-1)!} \binom{k+l-1}{l-1} \binom{k+l-1}{l} = \\
 &= \frac{l!k!(l+1)(k+1)}{k+l} C_k C_l.
 \end{aligned}$$

Подставляя $F_{2k,2l}$ в (9) для $n = 2k$ и $m = 2l + 1$, получаем

$$F_{2k+1,2l+1} = \frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{k+l+1} C_k C_l.$$

Это в точности повторяет результат, полученный в работе [1].

СЛЕДСТВИЕ 2. Двухточечные функции F_{mn} при $m, n \geq 0$ являются положительно полуопределенными, т. е. $F_{mn} \geq 0$.

Теперь рассмотрим двухточечную функцию $F_{\hat{n}m}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Двухточечные функции $F_{\hat{n}m}$ для расширенной бездисперсионной иерархии Тогда при $F_{00} = 0$ и $F_{01} = 0$ даются выражениями

$$\begin{aligned} 2\widehat{F_{2k,0}} &= -(k+1)d_k C_k, \quad k=1,2,\dots, \\ \widehat{F_{2k+1,2l+1}} &= -\frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{l+k+1} \times \\ &\quad \times \left(d_k + \frac{1}{2(l+k+1)} \right) C_k C_l, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \\ \widehat{F_{2k,2l}} &= -\frac{lk(l+1)(k+1)}{l+k} \left(d_k - \frac{l}{2k(l+k)} \right) C_k C_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, \\ F_{\hat{n}m} &= 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя аналогично и используя бездисперсионное уравнение Хироты (10) и равенства (12)–(15), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{F_{2k,2l}} &= -\sum_{i=0}^{l-1} \frac{(2l)!(2k)!C_{k+i}C_{l-i-1}}{(2l-2i-2)!(2k+2i)!} \times \\ &\quad \times \left[(k+i+1)d_{k+i} - (l-i) \left(d_{k+i} + \frac{1}{2(k+i+1)} \right) \right] = \\ &= \text{(I)} + \text{(II)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= -k!l!(k+1)!(l+1)!C_k C_l \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(k-l+2i+1)d_k}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}, \\ \text{(II)} &= -k!l!(k+1)!(l+1)!C_k C_l \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(k-l+2i+1)(\frac{1}{k+i} + \dots + \frac{1}{k+1}) - \frac{(l-i)}{2(k+i+1)}}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}. \end{aligned}$$

Составляющую (I) можно вычислить, как и ранее, что дает

$$\text{(I)} = -\frac{lk(l+1)(k+1)}{k+l} d_k C_k C_l,$$

а часть (II) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= -\frac{lk(l+1)(k+1)}{k+l} C_k C_l \times \\ &\quad \times \left[\frac{2(k+l) \sum_{i=1}^{l-1} \binom{k+l-1}{i-1} ((\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1})) (\frac{1}{k+l-i} + \dots + \frac{1}{k+1}) - \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k+l}{i}^2}{2(k+l) \binom{k+l-1}{l} \binom{k+l-1}{k}} \right], \end{aligned}$$

где первую сумму в числителе в квадратных скобках можно упростить:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{l-1} \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1} \right] \left(\frac{1}{k+l-i} + \cdots + \frac{1}{k+1} \right) = \\
& = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{l-1} \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1} \right] + \\
& + \frac{1}{k+2} \sum_{i=1}^{l-2} \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1} \right] + \cdots + \\
& + \frac{1}{k+l-1} \sum_{i=1}^1 \binom{k+l-1}{i-1} \left[\binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i-1} \right] = \\
& = \frac{1}{k+1} \binom{k+l-1}{l-1} \binom{k+l-1}{l-2} + \frac{1}{k+2} \binom{k+l-1}{l-2} \binom{k+l-1}{l-3} + \cdots + \\
& + \frac{1}{k+l-1} \binom{k+l-1}{1} \binom{k+l-1}{0} = \\
& = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{k+l-i} \binom{k+l-1}{i-1} \binom{k+l-1}{i}.
\end{aligned}$$

Тогда числитель в квадратных скобках принимает вид

$$\begin{aligned}
& 2(k+l) \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{k+l-i} \binom{k+l-1}{i-1} \binom{k+l-1}{i} - \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k+l}{i}^2 = \\
& = \sum_{i=1}^{l-1} \left[2 \binom{k+l-1}{i-1} \binom{k+l}{i} - \binom{k+l}{i}^2 \right] - \binom{k+l}{0}^2 = \\
& = \sum_{i=1}^{l-1} \binom{k+l}{i} \left[2 \binom{k+l-1}{i-1} - \binom{k+l-1}{i} - \binom{k+l-1}{i-1} \right] + 1 = \\
& = \sum_{i=1}^{l-1} \left[\binom{k+l-1}{i} + \binom{k+l-1}{i-1} \right] \left[\binom{k+l-1}{i-1} - \binom{k+l-1}{i} \right] + 1 = \\
& = - \binom{k+l-1}{l-1}^2,
\end{aligned}$$

откуда

$$F_{\widehat{2k,2l}} = - \frac{lk(l+1)(k+1)}{l+k} \left(d_k - \frac{l}{2k(l+k)} \right) C_k C_j.$$

Подставляя $F_{\widehat{2k,2l}}$ в (10) при $n = 2k$ и $m = 2l + 1$ получаем

$$F_{\widehat{2k+1,2l+1}} = - \frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{k+l+1} \left(d_k + \frac{1}{2(l+k+1)} \right) C_k C_l.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Двухточечные функции $F_{\widehat{mn}}$ при $mn \neq 0$ являются отрицательно-определенными, т. е. $F_{\widehat{mn}} < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственный случай, который нужно рассмотреть, – случай $F_{2k,2l}$, в котором

$$d_k - \frac{l}{2k(l+k)} = \left(d_k - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2(k+l)} > 0.$$

Наконец, вычислим двухточечную функцию $F_{\hat{n}\hat{m}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Двухточечные функции $F_{\hat{n}\hat{m}}$ для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды при $F_{00} = 0$ и $F_{01} = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_{\widehat{2k},\widehat{0}} &= -\frac{k+1}{2}d_kC_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ F_{\widehat{2k+1},\widehat{2l+1}} &= \frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{l+k+1} \times \\ &\quad \times \left[\left(d_k + \frac{1}{2(l+k+1)}\right) \left(d_l + \frac{1}{2(l+k+1)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(k+l+1)^2} \right] C_kC_l, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \\ F_{\widehat{2k},\widehat{2l}} &= \frac{lk(l+1)(k+1)}{l+k} \left[\left(d_k - \frac{l}{2k(l+k)}\right) \left(d_l - \frac{k}{2l(l+k)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(k+l)^2} \right] C_kC_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, \\ F_{\hat{n}\hat{m}} &= 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя бездисперсионное уравнение Хироты (11) и учитывая равенства (14), (15), получаем

$$\begin{aligned} F_{\widehat{2k},\widehat{2l}} &= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(2l)!(2k)!C_{k+i}C_{l-i-1}}{(2l-2i-2)!(2k+2i)!} \times \\ &\quad \times \left[(k+i+1)d_{k+i} \left(d_{l-i-1} + \frac{1}{2(l-i)}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(d_{k+i} + \frac{1}{2(k+i+1)}\right) (l-i)d_{l-i-1} \right] - \\ &\quad - \frac{2l!2k!}{2(2k+2l)!} (k+l+1)d_{k+l}C_{k+l} = \\ &= \frac{l!k!(l+1)!(k+1)!C_kC_l}{2((k+l)!)^2} [(I) + (II) + (III) + (IV) + (V)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (I) &= 2((k+l)!)^2 \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[(k-l+2i+1)(d_k + (\frac{1}{k+i} + \dots + \frac{1}{k+1})) - \frac{(l-i)}{2(k+i+1)}]d_l}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}, \\ (II) &= 2((k+l)!)^2 \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[-(k-l+2i+1)(\frac{1}{l-i} + \dots + \frac{1}{l}) + \frac{(k+i+1)}{2(l-i)}]d_k}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{III}) &= 2((k+l)!)^2 \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[-(k-l+2i+1)(\frac{1}{k+i} + \dots + \frac{1}{k+1})(\frac{1}{l-i} + \dots + \frac{1}{l})]}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}, \\
(\text{IV}) &= 2((k+l)!)^2 \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[\frac{(k+i+1)}{2(l-i)}(\frac{1}{k+i} + \dots + \frac{1}{k+1}) + \frac{(l-i)}{2(k+i+1)}(\frac{1}{l-i} + \dots + \frac{1}{l})]}{(l-i)!(l-i-1)!(k+i+1)!(k+i)!}, \\
(\text{V}) &= -d_{k+l}.
\end{aligned}$$

Каждый член можно вычислить:

$$\begin{aligned}
(\text{I}) &= 2(k+l) \binom{k+l-1}{k} \binom{k+l-1}{l} \left[d_k - \frac{l}{2k(l+k)} \right] d_l, \\
(\text{II}) &= d_k - 2(k+l) \binom{k+l-1}{k} \binom{k+l-1}{l} \left[\frac{d_k k}{2l(k+l)} \right], \\
(\text{III}) &= - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{k+l}{i}^2 - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k+l-j} \sum_{i=1}^j \binom{k+l}{i}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{k+l} \binom{k+l-1}{l-1} \binom{k+l-1}{l} + \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{k+l-i}, \\
(\text{IV}) &= \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k+l-j} \sum_{i=1}^j \binom{k+l}{i}^2 + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{k+l}{i}^2, \\
(\text{V}) &= -d_k - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{k+l-i}.
\end{aligned}$$

Оказывается, что

$$F_{\widehat{2k}, \widehat{2l}} = \frac{lk(l+1)(k+1)}{l+k} \left[\left(d_k - \frac{l}{2k(l+k)} \right) \left(d_l - \frac{k}{2l(l+k)} \right) + \frac{1}{4(k+l)^2} \right] C_k C_l.$$

Подставляя $F_{\widehat{2k}, \widehat{2l}}$ в (11) при $n = 2k$ и $m = 2l + 1$, получаем

$$\begin{aligned}
F_{\widehat{2k+1}, \widehat{2l+1}} &= \frac{(2l+1)(2k+1)(l+1)(k+1)}{l+k+1} \times \\
&\quad \times \left[\left(d_k + \frac{1}{2(l+k+1)} \right) \left(d_l + \frac{1}{2(l+k+1)} \right) + \frac{1}{4(k+l+1)^2} \right] C_k C_l.
\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Двухточечные функции $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ при $mn \neq 0$ являются положительно-полуопределенными, т. е. $F_{\widehat{m}\widehat{n}} \geq 0$.

5. НАЗАД К ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ $\mathbb{CP}^1$ -МОДЕЛИ

За последние двадцать лет изучение связи между интегрируемыми системами и топологическими теориями поля существенно продвинулось вперед (см., например, работы [14]–[20]). Для расширенной бездисперсионной иерархии Тоды соответствующее топологическое поле описывается двумя примарными полями (или наблюдаемыми) $\{\mathcal{O}_1 = 1 \in H^0(\mathbb{CP}^1), \mathcal{O}_2 = \omega \in H^2(\mathbb{CP}^1)\}$ с параметрами взаимодействия $T^{\alpha,0}$, $\alpha = 1, 2$. При попытке связать теорию с топологической гравитацией

появляется ряд новых переменных таких, как гравитационные потомки $\{\sigma_n(\mathcal{O}_\alpha)\}$ с новыми постоянными взаимодействия $\{T^{\alpha,n}\}$. При этом тождественный оператор становится оператором прокола $\mathcal{O}_1 = P$, и мы можем обозначить $\mathcal{O}_2 = Q$. Пространство, которое линейно порождают постоянные $\{T^{\alpha,n}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, называется полным фазовым пространством, а подпространство, параметризуемое $T^{\alpha,0}$, – малым фазовым пространством. Производящая функция корреляционной функции представляет собой полную свободную энергию, которая определяется как

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{g=0} \mathcal{F}_g = \sum_{g=0} \left\langle \exp \left(\sum_{\alpha,n} T^{\alpha,n} \sigma_n(\mathcal{O}_\alpha) \right) \right\rangle_g.$$

Заметим, что свободная энергия $F(t_0, t, \hat{t})$ расширенной бездисперсионной иерархии Тоды соответствует производящей функции $\mathcal{F}_0$ рода ноль для $\mathbb{CP}^1$ -модели при отождествлении

$$t_{n+1} = \frac{T^{2,n}}{(n+1)!}, \quad \hat{t}_n = \frac{2T^{1,n}}{n!}, \quad n \geq 0,$$

где $\hat{t}_0 = 2t_0 = 2T^{1,0} = 2x$. Поэтому m -точечную корреляционную функцию рода ноль в общем положении можно вычислить следующим образом:

$$\langle \sigma_{n_1}(\mathcal{O}_{\alpha_1}) \sigma_{n_2}(\mathcal{O}_{\alpha_2}) \cdots \sigma_{n_m}(\mathcal{O}_{\alpha_m}) \rangle = \frac{\partial^m F}{\partial T^{\alpha_1, n_1} \partial T^{\alpha_2, n_2} \cdots \partial T^{\alpha_m, n_m}}.$$

В частности, метрика на пространстве примарных полей определяется трехточечной корреляционной функцией $\eta_{\alpha\beta} = \langle P \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_\beta \rangle$, причем $\eta_{11} = \eta_{22} = 0$ и $\eta_{12} = \eta_{21} = 1$, поэтому $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}^1$.

Уравнения Лакса расширенной бездисперсионной иерархии Тоды можно записать в виде

$$\frac{\partial L}{\partial T^{\alpha,n}} = \{B_{\alpha,n}, L\}, \quad \alpha = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$B_{1,n} = \frac{2}{n!} (L^n (\ln L - d_n))_{\geq 0}, \quad B_{2,n} = \frac{1}{(n+1)!} (L^{n+1})_{\geq 0}.$$

Тогда струнное уравнение (13) принимает вид

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T^{2,n} \frac{\partial L}{\partial T^{2,n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} T^{1,n} \frac{\partial L}{\partial T^{1,n-1}}.$$

Сдвигая переменную $T^{1,1} \rightarrow T^{1,1} - 1$, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial T^{1,0}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T^{2,n} \frac{\partial L}{\partial T^{2,n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} T^{1,n} \frac{\partial L}{\partial T^{1,n-1}},$$

что после выделения p^0 -члена дает

$$\begin{aligned} t^1(T) &= T^{1,0} + \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} T^{\alpha,n} \langle \sigma_{n-1}(\mathcal{O}_\alpha) Q \rangle, \\ t^2(T) &= T^{2,0} + \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} T^{\alpha,n} \langle \sigma_{n-1}(\mathcal{O}_\alpha) P \rangle, \end{aligned}$$

где мы отождествили плоскую координату $t^\alpha = \langle P\mathcal{O}^\alpha \rangle$ как

$$t^1 = u_1 = \langle PQ \rangle, \quad t^2 = \ln u_2 = \langle PP \rangle.$$

Поэтому в малом пространстве $t^1 = T^{1,0}$ и $t^2 = T^{2,0}$. Тогда условие $F_{01} = F_{00} = 0$ соответствует $T^{\alpha,n} = 0$ для любых α, n . В формулировке Ландау–Гинзбурга топологической $\mathbb{C}P^1$ -модели можно показать [14], что имеет место следующее топологическое рекурсионное соотношение рода ноль:

$$\langle \sigma_n(\mathcal{O}_\alpha)XY \rangle = \sum_\beta \langle \sigma_{n-1}(\mathcal{O}_\alpha)\mathcal{O}^\beta \rangle \langle \mathcal{O}_\beta XY \rangle. \quad (16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Из топологического рекурсионного соотношения рода ноль (16) следуют бездисперсионные уравнения Хироты (9)–(11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение (16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T^{1,0}} [\langle \sigma_{n+1}(Q)\sigma_m(Q) \rangle + \langle \sigma_n(Q)\sigma_{m+1}(Q) \rangle] &= \\ &= \langle \sigma_{n+1}(Q)\sigma_m(Q)P \rangle + \langle \sigma_n(Q)\sigma_{m+1}(Q)P \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial T^{1,0}} [\langle \sigma_n(Q)Q \rangle \langle \sigma_m(Q)P \rangle + \langle \sigma_n(Q)P \rangle \langle \sigma_m(Q)Q \rangle], \end{aligned}$$

откуда после интегрирования по $T^{1,0}$ получаем

$$\langle \sigma_{n+1}(Q)\sigma_m(Q) \rangle + \langle \sigma_n(Q)\sigma_{m+1}(Q) \rangle = \langle \sigma_n(Q)Q \rangle \langle \sigma_m(Q)P \rangle + \langle \sigma_n(Q)P \rangle \langle \sigma_m(Q)Q \rangle.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{n+1}(P)\sigma_m(Q) \rangle + \langle \sigma_n(P)\sigma_{m+1}(Q) \rangle &= \langle \sigma_n(P)Q \rangle \langle \sigma_m(Q)P \rangle + \langle \sigma_n(P)P \rangle \langle \sigma_m(Q)Q \rangle, \\ \langle \sigma_{n+1}(P)\sigma_m(P) \rangle + \langle \sigma_n(P)\sigma_{m+1}(P) \rangle &= \langle \sigma_n(P)Q \rangle \langle \sigma_m(P)P \rangle + \langle \sigma_n(P)P \rangle \langle \sigma_m(P)Q \rangle. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что имеют место отождествления

$$\begin{aligned} \langle \sigma_m(P)\sigma_n(P) \rangle &= \frac{4F_{\widehat{mn}}}{m!n!}, & m, n \geq 0, \\ \langle \sigma_m(P)\sigma_{n-1}(Q) \rangle &= \frac{2F_{\widehat{mn}}}{m!n!}, & m \geq 0, \quad n \geq 1, \\ \langle \sigma_{m-1}(Q)\sigma_{n-1}(Q) \rangle &= \frac{F_{mn}}{m!n!}, & m, n \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что интегрируемая структура, ассоциированная с топологической $\mathbb{C}P^1$ -моделью рода ноль, является расширенной бездисперсионной иерархией Тоды. Более того, интегрируя двухточечные функции $\langle \sigma_n(P)P \rangle$ и $\langle \sigma_n(Q)P \rangle$ по $T^{1,0}$, мы получаем одноточечные функции

$$\langle \sigma_n(P) \rangle = \frac{2}{(n+1)!} F_{\widehat{n+1,0}}, \quad \langle \sigma_n(Q) \rangle = \frac{1}{(n+2)!} F_{n+2,0}.$$

В частности, их значения в пределе нулевого взаимодействия ($T^{\alpha,n} = 0 \forall \alpha, n$) равны

$$\langle \sigma_{2k-1}(P) \rangle = -\frac{2d_k}{(k!)^2}, \quad \langle \sigma_{2k-2}(Q) \rangle = \frac{1}{(k!)^2}.$$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Расширенную бездисперсионную иерархию Тоды можно вывести из одномерной бездисперсионной иерархии Тоды путем добавления логарифмических потоков. Полные уравнения бездисперсионной иерархии расширенной системы Тоды можно в целом охарактеризовать как систему бездисперсионных уравнений Хироты, в которую входят вторые производные свободной энергии F по временным параметрам t_0 , t_n и $\hat{t}_n$. Исходя из этих бездисперсионных уравнений Хироты мы вычислили двухточечные функции $F_{n,m}$, $F_{\hat{n},m}$ и $F_{\hat{n},\hat{m}}$ для случая $F_{00} = F_{01} = 0$. Наши результаты обобщают предыдущую формулу, полученную в работе [1] для одномерной бездисперсионной системы Тоды, до результатов для расширенной бездисперсионной системы Тоды. Более того, мы показали, что в терминах $\mathbb{C}P^1$ -временных параметров бездисперсионные уравнения Хироты являются не чем иным, как прямым следствием топологических рекурсионных соотношений рода ноль. Это предоставляет еще один способ понять, что интегрируемая структура, связанная с топологической $\mathbb{C}P^1$ -моделью рода ноль, является расширенной бездисперсионной иерархией Тоды.

Уместны два замечания. Во-первых, квадратичные уравнения Хироты, ассоциированные с расширенной иерархией Тоды, изучались в работе [21] с помощью построения некоторых вертексных операторов, принимающих значения в алгебре дифференциальных операторов на аффинной прямой. Необычные свойства этих уравнений Хироты исследовались в недавних работах [22], [23]. Было бы интересно исследовать бездисперсионный предел квадратичных уравнений Хироты. Во-вторых, в работе [1] был исследован комбинаторный смысл двухточечных функций F_{nm} из разложения унитарного ансамбля случайных матриц при больших N . Естественно задаться вопросом, как понять геометрический (топологический) смысл рациональных чисел $F_{\hat{n},m}$ и $F_{\hat{n},\hat{m}}$ исходя из $\mathbb{C}P^1$ -матричного интеграла [5], содержащего дополнительные логарифмические члены.

Благодарности. Авторы благодарны Х. Ф. Шэню за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке National Science Council of Taiwan (гранты № NSC100-2115-M-167-001 (Нианн-Черн Ли), NSC100-2112-M-194-002-MY3 (Мин-Хсиень Ту)).

Список литературы

- [1] Y. Kodama, V. Pierce, *Commun. Math. Phys.*, **292**:2 (2009), 529–568, arXiv:0811.0351.
- [2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, v. 1, 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **49**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [3] D. M. Jackson, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **344**:2 (1994), 755–772.
- [4] J. H. Kwak, J. Lee, *Kyungpook Math. J.*, **33**:1 (1993), 115–125.
- [5] T. Eguchi, S. K. Yang, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:31 (1994), 2893–2902.
- [6] T. Eguchi, K. Hori, S. K. Yang, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:29 (1995), 4203–4224.
- [7] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants*, arXiv:math/0108160.
- [8] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Commun. Math. Phys.*, **250**:1 (2004), 161–193, arXiv:math/0308152.
- [9] Y. Zhang, *J. Geom. Phys.*, **40**:3–4 (2002), 215–232.
- [10] G. Carlet, B. A. Dubrovin, Y. J. Zhang, *Mosc. Math. J.*, **4** (2004), 313–332.

- [11] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, **1**, AMS, Providence, RI, 2003.
- [12] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–808.
- [13] H. Kanno, Y. Ohta, *Nucl. Phys. B*, **442**:1–2 (1995), 179–201, arXiv: hep-th/9502029.
- [14] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [15] S. Aoyama, Y. Kodama, *Commun. Math. Phys.*, **182**:1 (1996), 185–219, arXiv: hep-th/9505122.
- [16] R. Dijkgraaf, “Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory”, *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory* (Cargèse, July 16–27, 1991), NATO Advanced Science Institutes Series B: Physics, **295**, eds. J. Fröhlich, G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. Mitter, R. Stora, Plenum, New York, 1993, 95–158.
- [17] B. A. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Group* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [18] M. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23.
- [19] I. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [20] E. Witten, “Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space”, *Surveys in Differential Geometry*, Supplement to the Journal of Differential Geometry. 1, Proceedings of the Conference on Geometry and Topology (Harvard University, Cambridge, MA, USA, April 27–29, 1990), eds. C.-C. Hsiung, S.-T. Yau, H. B. Lawson jun., Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, 243–310.
- [21] T. E. Milanov, *Duke Math. J.*, **138**:1 (2007), 161–178.
- [22] C. Li, J. He, K. Wu, Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **51**:4 (2010), 043514, 32 pp.
- [23] K. Takasaki, *J. Phys. A*, **43**:43 (2010), 434032, 15 pp., arXiv: 1002.4688.

Поступила в редакцию 22.10.2012