Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Гонсалес, И. Н. Кондрашук, Четырехточечные лестничные диаграммы в нецелом числе измерений, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 276–305

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:16:18

© 2013 г.

И. Гонсалес^{*†}, И. Н. Кондрашук^{‡§}

ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫЕ ЛЕСТНИЧНЫЕ ДИАГРАММЫ В НЕЦЕЛОМ ЧИСЛЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Построено семейство трехточечных лестничных диаграмм, которые можно вычислить, используя метод петлевой редукции Белокурова–Усюкиной в размерности $d = 4 - 2\varepsilon$. Основная идея подхода состоит в обобщении данного метода петлевой редукции, существующего в размерности $d = 4$. Выведена рекуррентная формула, которая связывает результаты для L -петлевой и $(L - 1)$ -петлевой трехточечных лестничных диаграмм из данного семейства. Поскольку предложенный метод комбинирует аналитическую и размерную регуляризацию, в конце вычислений аналитическая регуляризация снимается путем вычисления двойного равномерного предела, в котором параметры аналитической регуляризации обращаются в нуль. В этом пределе в левой части рекуррентных соотношений в координатном представлении получена диаграмма, в которой индексы перекладин равны 1, а все остальные индексы равны $1 - \varepsilon$. Преобразование Фурье диаграмм такого типа дает диаграммы в импульсном представлении, в которых индексы перекладин равны $1 - \varepsilon$, а все остальные индексы равны 1. С помощью конформного преобразования дуального образа этого импульсного представления данное семейство трехточечных лестничных диаграмм в импульсном представлении связывается с семейством четырехточечных лестничных диаграмм в импульсном представлении, в котором индексы перекладин равны $1 - \varepsilon$, а все остальные индексы равны 1. Поскольку любую диаграмму из данного семейства можно редуцировать к однопетлевой диаграмме, предложенное обобщение метода петлевой редукции Белокурова–Усюкиной на пространство с нецелым числом измерений позволяет явно вычислить такое семейство четырехточечных лестничных диаграмм в импульсном представлении в терминах гипергеометрической функции Аппеля F_4 без разложения по степеням параметра ε в произвольной кинематической области в импульсном представлении.

Ключевые слова: метод петлевой редукции Белокурова–Усюкиной, нецелое число измерений.

DOI: 1010.4231/tmf8436

^{*}Universidad de Valparaíso, Departamento de Física y Astronomía, Avenida Gran Bretaña 1111, Valparaíso, Chile

[†]Universidad Técnica Federico Santa María, and Centro Científico-Tecnológico de Valparaíso, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile

[‡]Grupo de Matemática Aplicada, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile E-mail: igor.kondrashuk@gmail.com

[§]Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld, Germany

1. ВВЕДЕНИЕ

Четырехточечные лестничные безмассовые диаграммы, в которых все индексы равны единице в импульсном представлении, играют важную роль в физике высоких энергий: например, их сумма представляет частное решение уравнения Бете–Солпитера [1]. Кроме того, это семейство диаграмм дает вклад в анзац Берна–Диксона–Смирнова (БДС) для четырехточечных глюонных амплитуд всех порядков в максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса [2], [3]. В настоящее время ситуации для данного семейства диаграмм в случае $d = 4$ и в случае $d = 4 - 2\epsilon$ различны. В работе [1] был использован результат, полученный в работах [4], [5] для четырехточечных лестничных диаграмм произвольного количества петель в размерности $d = 4$ вне массовой оболочки. Однако результат для этих диаграмм с произвольным количеством петель в размерности $d = 4 - 2\epsilon$ вне массовой оболочки неизвестен. Результаты для четырехточечных лестничных диаграмм для произвольного количества петель в нецелом числе измерений на массовой оболочке также неизвестны, тогда как в рамках анзаца БДС размерно регуляризованные амплитуды в случае $d = 4 - 2\epsilon$, в которые значения этих лестничных диаграмм на массовой оболочке дают вклад, были вычислены до трехпетлевого порядка в работах [2], [3]. Результаты работ [4], [5] нельзя использовать для вычисления амплитуд, поскольку появляются инфракрасные расходимости на массовой оболочке, которые требуется регуляризовать с помощью размерной регуляризации. Более того, известные в настоящее время результаты для четырехточечных лестничных диаграмм на массовой оболочке существуют в виде разложений по ϵ до некоторой степени [3]. Что же касается результатов для размерно регуляризованных диаграмм вне массовой оболочки, известных во всех порядках по ϵ , трехточечная безмассовая однопетлевая диаграмма вне массовой оболочки является единственным примером, который можно вычислить для произвольных индексов; она выражается в терминах гипергеометрической функции Апшеля F_4 [6], [7].

Вычисление трехточечной лестничной диаграммы с произвольным количеством петель в размерности $d = 4$ было основано на рекуррентной процедуре, полученной в работах [8]–[10]. Этот прием позволил авторам указанных работ связать L -петлевой результат для скалярной безмассовой трехточечной лестничной диаграммы с $(L - 1)$ -петлевым результатом для лестничной диаграммы из того же семейства. Таким образом, трехточечную лестничную диаграмму с произвольным числом перекладин можно редуцировать к однопетлевой трехточечной диаграмме, явно известной для любых индексов [6], [7]. Трехточечные и четырехточечные лестничные диаграммы в размерности $d = 4$ связаны конформной заменой дуальных координат [4], [5], [11], [12], поэтому результат для трехточечной лестничной диаграммы эквивалентен результату для четырехточечной лестничной диаграммы. Это было первое семейство четырехточечных безмассовых диаграмм, вычисленное при произвольном числе петель. Однако в работах [8]–[10] процедура была построена только в размерности $d = 4$, поэтому результат для четырехточечных лестничных диаграмм с произвольным количеством петель существует, только когда $d = 4$. В работе [13] формула из работы [10] для редукции трехточечной лестничной диаграммы с двумя перекладинами к скалярной однопетлевой трехточечной диаграмме (первая строка на рис. 1 из работы [14]) была обобщена на случай нецелого числа измерений

$d = 4 - 2\varepsilon$. Полученная в работе [10] формула представляла собой ключевой шаг к более сложной рекуррентной формуле петлевой редукции, приведенной в работе [8] (третья строка на рис. 1 из работы [14]). Третью строку на рис. 1 из работы [14] мы называем методом петлевой редукции Белокурова–Усюкиной [13].

В настоящей работе метод петлевой редукции Белокурова–Усюкиной обобщается на случай нецелого числа измерений $d = 4 - 2\varepsilon$. Идея здесь проста. Мы связываем трехточечную лестничную диаграмму с тремя перекладинами и трехточечную лестничную диаграмму с двумя перекладинами способом, который выглядит как рекуррентная процедура. Каждый шаг предложенного построения повторяет соответствующий шаг построения для целого числа измерений $d = 4$, подробно описанного в работе [14]. Ключевой точкой является формула из работы [13]. Затем мы показываем, как вычислить семейство трехточечных лестничных диаграмм в координатном представлении с произвольным числом перекладин, используя обобщенный метод петлевой редукции Белокурова–Усюкиной.

Следует отметить, что у этого семейства лестничных диаграмм не все индексы в координатном представлении равны $1 - \varepsilon$. Индексы перекладин остаются равными единице. В настоящее время мы не знаем, как обобщить метод петлевой редукции Белокурова–Усюкиной, чтобы получить результат для трехточечной лестничной диаграммы, в которой все индексы равны $1 - \varepsilon$ в координатном представлении в размерности $d = 4 - 2\varepsilon$. После перехода к импульсному представлению получаем трехточечную диаграмму, для которой индексы на перекладинах лестницы равны $1 - \varepsilon$, а все остальные индексы равны единице. Любую четырехточечную лестничную диаграмму в импульсном представлении, у которой индексы на перекладинах равны $1 - \varepsilon$, а все остальные индексы равны единице, можно получить из соответствующей трехточечной лестничной диаграммы путем конформного преобразования в дуальном пространстве. Таким образом, обобщается соответствующий прием для случая $d = 4$ [11], [12].

2. МЕТОД ПЕТЛЕВОЙ РЕДУКЦИИ БЕЛОКУРОВА–УСЮКИНОЙ ДЛЯ РАЗМЕРНОСТИ $D = 4 - 2\varepsilon$

Формула, приведенная на рис. 1 в работе [13], была получена для нецелого числа измерений с использованием метода уникальности с применением соотношений вершина–треугольник и треугольник–вершина [15]–[18]. Переопределение меры, проведенное в работе [19], здесь также применяется для устранения множителей π в правых частях диаграммных соотношений. Таким образом, мера, которая использовалась во внутренних вершинах диаграмм (они обозначены на диаграммах жирными точками), равна

$$Dx \equiv \pi^{-d/2} d^d x.$$

Формулы для интегрирования в случаях цепочки и вершины–треугольника (случай уникальности) представляют собой соответственно уравнение (1) и уравнение (2) из работы [14].

Нашей ключевой отправной точкой является формула из работы [13] для двухпетлевой трехточечной лестничной диаграммы, представленной как сумма трех однопетлевых треугольных диаграмм:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \times \\
 & \times \left[\frac{1}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_3)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \cdot \text{Diagram 2} + \right. \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \Gamma(1-\varepsilon) \cdot \text{Diagram 3} + \\
 & \left. + \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_3} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_3)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \cdot \text{Diagram 4} \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Множитель J из работы [13] определяется как

$$J = \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_3)}{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)}.$$

Аналитическая регуляризация применяется в комбинации с размерной регуляризацией. При аналитической регуляризации имеются три параметра, которые удовлетворяют условию

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Чтобы распространить формулу (1) на высшие петли, нужно изменить индексы внешних концов. Для этого нужно проинтегрировать по внешним правым точкам на каждой диаграмме в (1) с линиями, индекс которых равен $2-2\varepsilon$, как показано в следующей формуле:

$$\frac{1+\varepsilon_1}{2-2\varepsilon} \cdot \text{Diagram 5} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_1)} \cdot \frac{1+\varepsilon_1-\varepsilon}{2-2\varepsilon}. \quad (2)$$

В результате такой свертки (1) преобразуется в

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 2+\varepsilon_3-\varepsilon, (0,0) \rightarrow 1+\varepsilon_2, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1, (1,1) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_2, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1+\varepsilon_3-\varepsilon, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_3. \end{array} = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \times \\
 & \times \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 1, (0,0) \rightarrow 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon, (1,1) \rightarrow 1-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1-\varepsilon_1, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1-\varepsilon. \\ \text{Diagram 3: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 1, (0,0) \rightarrow 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon, (1,1) \rightarrow 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1+\varepsilon_3, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \end{array} \right. + \\
 & + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 4: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 1, (0,0) \rightarrow 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon, (1,1) \rightarrow 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1+\varepsilon_3, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \end{array} + \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1\varepsilon_3} \times \\
 & \times \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 1, (0,0) \rightarrow 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon, (1,1) \rightarrow 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1-\varepsilon, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1-\varepsilon_2, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_2-\varepsilon. \end{array} \right]; \quad (3)
 \end{aligned}$$

здесь внешние точки на диаграмме (1) свернуты с линиями, которые имеют индекс $2-2\varepsilon$. Таким образом, мы доказали интегральное соотношение (3) с коэффициентами в правой части, переписанными в терминах J :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A triangle with vertices } (0,0), (1,0), (1,1). \text{ External lines: } (0,0) \leftarrow 2+\varepsilon_3-\varepsilon, (0,0) \rightarrow 1+\varepsilon_2, (1,0) \rightarrow 1+\varepsilon_1, (1,1) \rightarrow 1+\varepsilon_1-\varepsilon. \text{ Internal lines: } (0,0) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_2, (1,0) \rightarrow (1,1) \text{ is } 1+\varepsilon_3-\varepsilon, (1,1) \rightarrow (1,0) \text{ is } 1+\varepsilon_3. \end{array} = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \times
 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times J \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)} \cdot \text{Diagram 1} + \\
 & + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdot \text{Diagram 2} + \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1\varepsilon_3} \times \\
 & \times J \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_2)} \cdot \text{Diagram 3} \Bigg]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Diagram 1: A vertex with a horizontal line from the left labeled '1'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1-ε₁'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1-ε'.

Diagram 2: A vertex with a horizontal line from the left labeled '1'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1+ε₃'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1+ε₂-ε'.

Diagram 3: A vertex with a horizontal line from the left labeled '1'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1-ε₂'. The upper line continues to the right, labeled '1-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1+ε₂-ε'.

В качестве следующего шага интегрируем правые части каждой диаграммы в (4) с тремя новыми пропагаторами. Результат имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 4} = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \times \right. \\
 & \times J \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)} \cdot \text{Diagram 5} + \\
 & \left. \text{Diagram 6} \right]
 \end{aligned}$$

Diagram 4: A vertex with a horizontal line from the left labeled '2+ε₃-ε'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1+ε₁' and a lower line labeled '1+ε₂'. A vertical line connects these two lines, labeled '1+ε₃-ε'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₂-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. A second vertex is connected to the first by a vertical line labeled '1+ε₃'. From this second vertex, two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1+ε₂-ε'.

Diagram 5: A vertex with a horizontal line from the left labeled '1'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1-ε₁'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1-ε'.

Diagram 6: A vertex with a horizontal line from the left labeled '1'. Two lines branch out to the right: an upper line labeled '1-ε' and a lower line labeled '1-ε'. A vertical line connects these two lines, labeled '1'. The upper line continues to the right, labeled '1+ε₁-ε'. The lower line continues to the right, labeled '1-ε'.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \text{Diagram 1} + \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \times \\
 & \times \left[J \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_2)} \cdot \text{Diagram 2} \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Diagram 1: A triangle with vertices at the top, bottom-left, and bottom-right. The left side is labeled $1-\varepsilon$, the right side $1-\varepsilon$, and the bottom side 1 . The top vertex is labeled $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, the bottom-left vertex $1+\varepsilon_3$, and the bottom-right vertex $1+\varepsilon_2-\varepsilon$. The top side is labeled $1-\varepsilon$, the right side $1-\varepsilon$, and the bottom side 1 .

Diagram 2: A triangle with vertices at the top, bottom-left, and bottom-right. The left side is labeled $1-\varepsilon$, the right side $1-\varepsilon$, and the bottom side 1 . The top vertex is labeled $1-\varepsilon_2$, the bottom-left vertex $1+\varepsilon_2-\varepsilon$, and the bottom-right vertex $1-\varepsilon$.

Каждую диаграмму в правой части формулы (5) можно преобразовать к другой диаграмме с другим распределением индексов, проведя ряд простых преобразований. Обычно это можно сделать, подставляя точки в пропагаторы и используя соотношения вершина–треугольник и треугольник–вершина. Например, для второй диаграммы в правой части (5) справедливо тождество

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \\
 & = \frac{J^{-1}}{\Gamma^3(1-\varepsilon)} \cdot \text{Diagram 3} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Diagram 3: A triangle with vertices at the top, bottom-left, and bottom-right. The left side is labeled $1+\varepsilon_1$, the right side $1+\varepsilon_3$, and the bottom side $1+\varepsilon_2$. The top vertex is labeled $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, the bottom-left vertex $1+\varepsilon_3-\varepsilon$, and the bottom-right vertex $1+\varepsilon_2-\varepsilon$.

Доказательство этого тождества можно получить с помощью следующей цепочки равенств:

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$\times =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)} \times$$

$$=$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_1)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)} \times$$

$$=$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(2+\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_3)}{\Gamma(-\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_2)\Gamma(\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$= \frac{1}{\Gamma^4(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_2)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \text{Diagram 1} = \\
& = \frac{1}{\Gamma^4(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_2)} \times \\
& \times \frac{\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon_3)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_3)\Gamma(\varepsilon_3-\varepsilon)} \times \\
& \times \text{Diagram 2} .
\end{aligned} \tag{7}$$

Аналогичные преобразования с использованием похожих приемов можно применять для доказательства тождества

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma^2(1-\varepsilon)} \cdot \text{diagram} \quad (8)$$

для первой диаграммы в правой части (5). Доказательство получается следующим образом:

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon_1)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon_1)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2+\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_1)}{\Gamma(-\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)} \cdot 1 \cdot \text{Diagram} = \\
&= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma^2(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(-\varepsilon_1-\varepsilon)} \times \\
&\times \text{Diagram} = \\
&= \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma^2(1-\varepsilon)} \cdot \frac{1-\varepsilon_1-\varepsilon}{1} \cdot \text{Diagram} . \quad (9)
\end{aligned}$$

The diagrams are Feynman diagrams with two external lines and two internal vertices. The first diagram has external lines labeled $1-\varepsilon$ and $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and internal lines labeled $1-\varepsilon_1-\varepsilon$, $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and 1 . The second diagram has external lines labeled $1-\varepsilon$ and $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and internal lines labeled $1-\varepsilon_1-\varepsilon$, $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and 1 . The third diagram has external lines labeled $1-\varepsilon$ and $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and internal lines labeled $1-\varepsilon_1-\varepsilon$, $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, and 1 .

С помощью этих тождеств мы находим петлевую редукцию в размерности $d = 4 - 2\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&\text{Diagram} = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \left[\frac{J}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \times \right. \\
&\left. \text{Diagram} \right]
\end{aligned}$$

The diagram on the left has external lines labeled $2+\varepsilon_3-\varepsilon$ and $1-\varepsilon$, and internal lines labeled $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2-\varepsilon$, $1+\varepsilon_3-\varepsilon$, $1+\varepsilon_3$, $1+\varepsilon_1-\varepsilon$, $1+\varepsilon_2-\varepsilon$, and $1-\varepsilon$.

индексами:

в случае нецелого числа измерений $d = 4 - 2\epsilon$ в виде линейной комбинации однопетлевых треугольных диаграмм с коэффициентами, которые становятся сингулярными в пределе, когда ϵ_1 и ϵ_2 обращаются в нуль.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В разделе 2 все диаграммные соотношения понимаются как соотношения между интегралами, которые можно вывести из координатного представления для диаграмм. Эти интегральные соотношения в координатном представлении можно преобразовать к соответствующим интегральным соотношениям в импульсном представлении. Для этого преобразования мы повторим процедуру, описанную в работе [14]. Нужно заменить каждый множитель в подынтегральном выражении в координатном представлении на интегральное преобразование Фурье соответствующего множителя в импульсном представлении. Затем нужно проинтегрировать по координатам внутренних вершин. Таким образом появятся δ -функции Дирака, соответствующие сохранению импульса в каждой вершине интегрирования в координатном представлении, т. е. во внутренних вершинах. Интегралы по петлевым импульсам в импульсном представлении будут фурье-образами интегралов в координатном представлении.

Интегральная мера в импульсном представлении определяется с тем же множителем, что и в координатном представлении,

$$Dk \equiv \pi^{-d/2} d^d k, \quad (12)$$

чтобы избежать множителей π в соответствующих импульсных интегралах. Трехточечный однопетлевой импульсный скалярный интеграл

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int Dk \frac{1}{[(k + q_1)^2]^{\nu_1} [(k + q_2)^2]^{\nu_2} [(k + q_3)^2]^{\nu_3}}$$

можно представить в терминах преобразования Меллина–Барнса, аналогично тому, как это было сделано в работе [4],

$$\begin{aligned} J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \frac{1}{\prod_i \Gamma(\nu_i) \Gamma(d - \sum_i \nu_i)} \frac{1}{(p_3^2)^{\sum_i \nu_i - d/2}} \oint_C dz_2 dz_3 x^{z_2} y^{z_3} \times \\ &\times \left\{ \Gamma(-z_2) \Gamma(-z_3) \Gamma\left(-z_2 - \nu_2 - \nu_3 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-z_3 - \nu_1 - \nu_3 + \frac{d}{2}\right) \times \right. \\ &\times \left. \Gamma(z_2 + z_3 + \nu_3) \Gamma\left(\sum_i \nu_i - \frac{d}{2} + z_3 + z_2\right) \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(p_3^2)^{\sum_i \nu_i - d/2}} \oint_C dz_2 dz_3 x^{z_2} y^{z_3} D^{(z_2, z_3)}[\nu_1, \nu_2, \nu_3]. \end{aligned}$$

Функция D определяется так же, как и в работе [14]:

$$\begin{aligned} D^{(z_2, z_3)}[\nu_1, \nu_2, \nu_3] &= \frac{\Gamma(-z_2) \Gamma(-z_3) \Gamma(-z_2 - \nu_2 - \nu_3 + d/2) \Gamma(-z_3 - \nu_1 - \nu_3 + d/2)}{\prod_i \Gamma(\nu_i)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(z_2 + z_3 + \nu_3) \Gamma(\sum_i \nu_i - d/2 + z_3 + z_2)}{\Gamma(d - \sum_i \nu_i)}, \\ D^{(z_2, z_3)}[1, 1, 1 + \nu] &\equiv D^{(z_2, z_3)}[1 + \nu]. \end{aligned}$$

Далее будем использовать обозначения из работ [4], [5], [14]: $x \equiv p_1^2/p_3^2$, $y \equiv p_2^2/p_3^2$, где d -мерные импульсы p_1, p_2, p_3 удовлетворяют закону сохранения $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ и связаны с d -мерными импульсами q_1, q_2, q_3 посредством параметризации

$$p_1 = q_3 - q_2, \quad p_2 = q_1 - q_3, \quad p_3 = q_2 - q_1, \quad (13)$$

которая выбирается так, чтобы импульс p_1 входил в однопетлевую трехточечную диаграмму в вершине треугольника, противоположной к линии с индексом ν_1 .

Все обозначения для интегралов Меллина–Барнса взяты из работы [14], т. е. мы включили в определение образа $D^{(z_2, z_3)}[\nu_1, \nu_2, \nu_3]$ трехточечного интеграла все множители, кроме степени квадрата внешнего импульса p_3^2 . Мы не записываем степени i , предполагая, что выполнен виковский поворот. Контур интегрирования C проходит немного слева от мнимой оси, разделяет левые и правые полюсы и при этом должен быть замкнут на левой или на правой бесконечности. Пусть контур интегрирования на комплексной плоскости замкнут на правой бесконечности. Опустим множитель $1/2\pi i$, появляющийся при каждом интегрировании по параметру преобразования Меллина–Барнса. Обратный множитель порождается перед всеми вычетами, его мы также опускаем.

В работе [14] описана процедура действий с трехточечными лестничными диаграммами в импульсном представлении. Следуя этой процедуре, будем использовать обозначение

$$\int_n (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (14)$$

для импульсного интеграла в размерности $d = 4 - 2\varepsilon$ того типа, который приведен в левой части (10), при этом интегральная мера определена в (12), но для n петель.

Все формулы настоящей работы для трехточечных лестничных диаграмм совпадают с формулами из работы [14] в пределе снятия размерной регуляризации, $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что мы изменили знак $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ после преобразования Фурье в обеих частях соотношения (10). Импульсы p_1, p_2, p_3 входят в трехточечную лестничную диаграмму типа диаграммы, представленной в (10), таким образом, что p_3 входит в самый левый пропагатор, p_1 – в самый верхний правый пропагатор, а p_2 – в самый нижний правый пропагатор. Внешние концы ампутируются. Переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ появляются в индексах линий для первых девяти пропагаторов в левой части диаграммы в импульсном представлении, так же как и в координатном представлении. Например, после преобразования Фурье диаграммы в левой части (10) у самого левого пропагатора стоит индекс $-\varepsilon_3$, у верхнего края диаграммы – индексы $1 - \varepsilon_1 - \varepsilon$, $1 - \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_1$, у нижнего края диаграммы – индексы $1 - \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2$, а у первых двух перекладин – индексы $1 - \varepsilon_3, 1 - \varepsilon_3 - \varepsilon$. У остальных линий стоят индексы, равные $1 - \varepsilon$ на перекладинах и единице на верхнем и нижнем краях. Это индексы в импульсном представлении. Интеграл, полученный после всех этих преобразований, – это интеграл (14).

Применим преобразование Фурье к обеим частям интегрального соотношения (4), и в соответствии с описанными выше правилами получим соотношение

$$\begin{aligned} \int_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{J}{(p_3^2)^{1-\varepsilon_3-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \frac{1}{(p_2^2)^{-\varepsilon_2}} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)} J(1, 1, 1-\varepsilon_1-\varepsilon) + \right. \\ & + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_3)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_3)} J(1, 1, 1+\varepsilon_3-\varepsilon) + \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \frac{1}{(p_1^2)^{-\varepsilon_1}} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)} J(1, 1, 1-\varepsilon_2-\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{J}{(p_3^2)^{2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)} \left(\frac{p_2^2}{p_3^2}\right)^{\varepsilon_2} \oint_C du dv x^u y^v D^{(u,v)}[1-\varepsilon_1-\varepsilon] + \right. \\ & + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_3)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_3)} \oint_C du dv x^u y^v D^{(u,v)}[1+\varepsilon_3-\varepsilon] + \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \frac{\Gamma(1+\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon_2)} \left(\frac{p_1^2}{p_3^2}\right)^{\varepsilon_1} \oint_C du dv x^u y^v D^{(u,v)}[1-\varepsilon_2-\varepsilon] \right], \end{aligned}$$

где $D^{(u,v)}[1-\varepsilon_1]$ – образ скалярной трехточечной лестничной диаграммы в случае нецелого числа измерений $d = 4 - 2\varepsilon$ относительно преобразования Меллина–Барнса. Определим представление Меллина–Барнса M_2 интеграла $\int_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ как

$$\int_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \equiv \frac{1}{(p_3^2)^{2-\varepsilon}} \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3].$$

Для трехточечной лестничной диаграммы с тремя перекладами приведенное в (10) диаграммное соотношение в импульсном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \int_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{(p_1^2)^{\varepsilon_1} (p_3^2)^{1 + \varepsilon_2}} \frac{J}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \int_2(\varepsilon_1) + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{(p_1^2)^{\varepsilon_1} (p_2^2)^{\varepsilon_2} p_3^2} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \\ & + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{(p_2^2)^{\varepsilon_2} (p_3^2)^{1 + \varepsilon_1}} \frac{J}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \int_2(\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Без сдвига переменных интегрирования в контурных интегралах получаем

$$\begin{aligned} \int_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{J}{(p_3^2)^{3 - \varepsilon_3 - \varepsilon}} \left[\frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \left(\frac{p_3^2}{p_1^2} \right)^{\varepsilon_1} \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1) + \right. \\ & + J^{-1} \frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(\frac{p_3^2}{p_1^2} \right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{p_3^2}{p_2^2} \right)^{\varepsilon_2} \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \\ & \left. + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \left(\frac{p_3^2}{p_2^2} \right)^{\varepsilon_2} \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}(\varepsilon_2) \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Образ M_3 интеграла $\int_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ относительно преобразования Меллина–Барнса определен как

$$\int_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \equiv \frac{1}{(p_3^2)^{3 - \varepsilon_3 - \varepsilon}} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3].$$

Чтобы получить $\int_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, следует проинтегрировать левую часть и каждую диаграмму в правой части равенства (10) с тремя новыми пропагаторами с индексами $1 - \varepsilon$, 1 , $1 - \varepsilon$ в координатном представлении и применить преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \int_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{(p_3^2)^{1 + \varepsilon_2}} \frac{J}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \int_3(\varepsilon_1) + \\ & + \frac{1}{p_3^2} \frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \int_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \\ & + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{(p_3^2)^{1 + \varepsilon_1}} \frac{J}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \int_3(\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Эту формулу можно переписать как

$$\begin{aligned} \int_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = & \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{J}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \frac{1}{(p_3^2)^{1 + \varepsilon_2} (p_3^2)^{3 + \varepsilon_1 - \varepsilon}} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1) + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{1}{(p_3^2)^{4 - \varepsilon_3 - \varepsilon}} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{J}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \frac{1}{(p_3^2)^{1+\varepsilon_1} (p_3^2)^{3+\varepsilon_2-\varepsilon}} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_2) = \\
& = \frac{J}{(p_3^2)^{4-\varepsilon_3-\varepsilon}} \left[\frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1) + \right. \\
& + J^{-1} \frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \\
& \left. + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_2) \right].
\end{aligned}$$

Чтобы вычислить предел, когда $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются в нуль, нужно заменить функцию $D[1, 1, 1 - \varepsilon - \delta]$ на линейную комбинацию двух других интегральных образов относительно преобразования Меллина–Барнса:

$$\begin{aligned}
& \oint_C du dv x^u y^v D^{(u,v)}[1, 1, 1 - \delta - \varepsilon] = \\
& = \frac{1}{2} \oint_C du dv x^u y^v (x^\delta D^{(u,v)}[1 - \delta, 1 + \delta, 1 - \varepsilon] + y^\delta D^{(u,v)}[1 + \delta, 1 - \delta, 1 - \varepsilon]) \times \\
& \times \frac{\Gamma(1 - \delta) \Gamma(1 + \delta) \Gamma^2(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \delta - \varepsilon) \Gamma(1 + \delta - \varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Такой прием позволяет найти предел для M_n , когда $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются в нуль. Например, для M_2 имеем

$$\begin{aligned}
& \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \\
& = J \oint_C du dv x^u y^v \left[\frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} y^{\varepsilon_2} D^{(u,v)}[1 - \varepsilon_1 - \varepsilon] + \right. \\
& + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_3 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_3)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_3 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_3)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} D^{(u,v)}[1 + \varepsilon_3 - \varepsilon] + \\
& \left. + \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} x^{\varepsilon_1} D^{(u,v)}[1 - \varepsilon_2 - \varepsilon] \right] = \\
& = \frac{J}{2} \oint_C du dv x^u y^v \left[\frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} y^{\varepsilon_2} \frac{x^{\varepsilon_1} \Gamma(-u - \varepsilon_1) \Gamma(-v + \varepsilon_1) + y^{\varepsilon_1} \Gamma(-u + \varepsilon_1) \Gamma(-v - \varepsilon_1)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon) \Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)} \times \right. \\
& \times \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{x^{-\varepsilon_3} \Gamma(-u + \varepsilon_3) \Gamma(-v - \varepsilon_3) + y^{-\varepsilon_3} \Gamma(-u - \varepsilon_3) \Gamma(-v + \varepsilon_3)}{\Gamma(1 - \varepsilon_3 - \varepsilon) \Gamma(1 + \varepsilon_3 - \varepsilon)} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_3 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_3)} \times \\
& \times \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_3 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_3)} + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} x^{\varepsilon_1} \frac{x^{\varepsilon_2} \Gamma(-u - \varepsilon_2) \Gamma(-v + \varepsilon_2) + y^{\varepsilon_2} \Gamma(-u + \varepsilon_2) \Gamma(-v - \varepsilon_2)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon) \Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)} \times \\
& \times \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \left. \right] \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1 + u + v) \Gamma(1 + u + v - \varepsilon) = \\
& = \frac{J}{2} \oint_C du dv x^u y^v \left[\frac{a(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} y^{\varepsilon_2} [x^{\varepsilon_1} \Gamma(-u - \varepsilon_1) \Gamma(-v + \varepsilon_1) + y^{\varepsilon_1} \Gamma(-u + \varepsilon_1) \Gamma(-v - \varepsilon_1)] + \right. \\
& \left. + \frac{a(\varepsilon_3)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} [x^{-\varepsilon_3} \Gamma(-u + \varepsilon_3) \Gamma(-v - \varepsilon_3) + y^{-\varepsilon_3} \Gamma(-u - \varepsilon_3) \Gamma(-v + \varepsilon_3)] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} x^{\varepsilon_1} [x^{\varepsilon_2} \Gamma(-u - \varepsilon_2) \Gamma(-v + \varepsilon_2) + y^{\varepsilon_2} \Gamma(-u + \varepsilon_2) \Gamma(-v - \varepsilon_2)] \times \\ \times \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1 + u + v) \Gamma(1 + u + v - \varepsilon).$$

Определение $a(\varepsilon_i)$ остается тем же, что и в работе [14]:

$$a(\delta) = [\Gamma(1 - \delta) \Gamma(1 + \delta)]^{-1}.$$

Вычисляя двойной равномерный предел при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \oint_C du dv x^u y^v M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \\ = \frac{1}{\Gamma^3(1 - \varepsilon)} \oint_C du dv x^u y^v \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1 + u + v) \Gamma(1 + u + v - \varepsilon) \times \\ \times \left[\frac{3}{2} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \ln \frac{x}{y} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0' + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{x}{y} \Gamma(-u) \Gamma(-v) \right]. \quad (16)$$

Если в правой части уравнения (15) собрать все члены под один интеграл, то мы получим

$$\oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \\ = \oint_C du dv x^u y^v \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} x^{-\varepsilon_1} y^{-\varepsilon_2} M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \right. \\ + \frac{J}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)} x^{-\varepsilon_1} M_2^{(u,v)}(\varepsilon_1) + \\ \left. + \frac{J}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_2)} y^{-\varepsilon_2} M_2^{(u,v)}(\varepsilon_2) \right].$$

Взяв двойной равномерный предел, в котором $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются в нуль, получим

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \oint_C du dv x^u y^v M_3^{(u,v)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \\ = \frac{1}{\Gamma^4(1 - \varepsilon)} \oint_C du dv x^u y^v \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1 + u + v) \Gamma(1 + u + v - \varepsilon) \times \\ \times \left[\frac{5}{12} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0^{(4)} + \right. \\ + \frac{5}{6} \ln \frac{x}{y} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0^{(3)} + \\ + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x}{y} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0^{(2)} + \\ \left. + \frac{1}{12} \ln^3 \frac{x}{y} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u - \varepsilon) \Gamma(-v + \varepsilon) \right)_0' \right]. \quad (17)$$

4. ИНДЕКС НА ПЕРВОЙ ПЕРЕКЛАДИНЕ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ ЛЕСТНИЧНОЙ ДИАГРАММЫ

В пределе, когда параметры аналитической регуляризации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются в нуль, семейство диаграмм, приведенных в формуле (11), будет несколько асимметричным, поскольку на первой перекладине стоит индекс $1 - \varepsilon$, а на остальных – индексы 1. Для устранения этой асимметрии выполним преобразование семейства диаграмм (11), используя снова прием подстановки точки в пропагатор. Это необходимо для получения условия уникальности на самой левой внутренней вершине диаграммы. Прием поясняется следующим изменением индекса на первой перекладине диаграммы в (11):

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A ladder diagram with 4 rungs. The leftmost vertical line has index } 2 + \varepsilon_3 - \varepsilon. \text{ The top horizontal line has indices } 1 + \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon. \text{ The bottom horizontal line has indices } 1 + \varepsilon_2, 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon. \text{ The rungs have indices } 1 + \varepsilon_3 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_3, 1, 1. \end{array} = \\
 & = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon_3)}{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon_3 + \varepsilon)\Gamma(2 + \varepsilon_3 - \varepsilon)} \times \\
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but the leftmost vertical line has index } 2. \end{array} = \\
 & = \frac{\Gamma(2)\Gamma(-\varepsilon_3)}{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(2 + \varepsilon_3 - \varepsilon)} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 + \varepsilon_1)\Gamma(1 + \varepsilon_2)} \times \\
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Similar to Diagram 2, but the top horizontal line has indices } 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon. \text{ The bottom horizontal line has indices } 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon. \text{ The rungs have indices } 1, 1 + \varepsilon_3, 1, 1. \end{array} . \quad (18)
 \end{aligned}$$

В результате после снятия аналитической регуляризации мы получим диаграмму, в которой на всех перекладинах в координатном представлении стоит индекс 1. Рекуррентное соотношение для модифицированной диаграммы с тремя перекладинами имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \\
 & = -\frac{J}{\varepsilon_3(1+\varepsilon_3-\varepsilon)} \frac{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon_3-\varepsilon)}{\Gamma(2)\Gamma(-\varepsilon_3)} \times \\
 & \times \frac{\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2)}{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon_2-\varepsilon)} \left[\frac{J}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \left[\frac{\Gamma(1-\varepsilon_1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon_1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1)} \right]^2 \times \right. \\
 & \text{Diagram 2} + \\
 & + \frac{J^{-1}}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \frac{1}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \frac{1+\varepsilon_3-\varepsilon}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \text{Diagram 3} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{J}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \left[\frac{\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon) \Gamma(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_2) \Gamma(1 + \varepsilon_2)} \right]^2 \times$$

(19)

После преобразования (18) мы получаем средство для вычисления трехточечных лестничных диаграмм в координатном представлении со следующим распределением индексов в координатном представлении после взятия предела, в котором параметры аналитической регуляризации обращаются в нуль:

(20)

Тогда после применения преобразования Фурье индекс $1 - \varepsilon$ станет равным 1, и наоборот. Приведем пример диаграммы в импульсном представлении с четырьмя перекладами:

(21)

Результат вычисления трехточечных лестничных диаграмм в импульсном представлении в размерности $d = 4$ дается функциями Усюкиной–Давыдычева [4], [5], [1]. Их свойства, в частности инвариантность относительно преобразования Фурье, исследовались в работах [12], [20]–[22], а их образы относительно преобразования

Меллина–Барнса – в работах [22], [14]. В формуле

$$= C^{(3)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{1}{(p_3^2)^3} \phi^3\left(\frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2}\right) \quad (22)$$

введена параметризация $\phi^{(n)}(x, y)$ импульсного интеграла рассматриваемой трехточечной лестничной диаграммы. Это было сделано по аналогии со случаем $d = 4$. Не имеющая размерности функция $\phi^{(3)}(x, y)$, появляющаяся в правой части соотношения (22), – это не функция $\Phi^{(3)}(x, y)$, которая появляется в аналогичной диаграмме в случае целочисленной размерности $d = 4$ со всеми индексами, равными единице, в импульсном представлении. В пределе снятия размерной регуляризации можно записать соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi^{(3)}(x, y) = \Phi^{(3)}(x, y),$$

однако этот предел имеет смысл только вне массовой оболочки, поскольку для импульсов на массовой оболочке этого предела не существует. Все трехточечные лестничные диаграммы связаны интегральным соотношением

$$C^{(n)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \int d^{4-2\varepsilon} r_n \frac{C^{(n-1)}((p_1 + r_n)^2, (p_2 - r_n)^2, p_3^2)}{(p_1 + r_n)^2 (p_2 - r_n)^2 (r_n^2)^{1-\varepsilon}},$$

которое является обобщением четырехмерных соотношений [4], [5], [12] и следствием того, что данное семейство диаграмм имеет структуру лестничного типа.

Для вычисления $\phi^{(n)}(x, y)$ необходимо связать импульсное представление правой и левой частей соотношения (18). Исходя из формулы (18) выпишем уравнение

$$\int_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon_1)\Gamma(1 + \varepsilon_2)\Gamma(1 + \varepsilon_3 - \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon_3)} \frac{1}{(p_3^2)^{-\varepsilon_3 - \varepsilon}} \int_4'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

где интеграл $\int_4'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ соответствует правой части (18) после проведения преобразования Фурье и смены знаков параметров аналитической регуляризации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Внешние концы остаются ампутированными. В пределе, когда параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются в нуль, получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{1}{(p_3^2)^{-\varepsilon}} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_4'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Из этого уравнения и из определения (22), получаем

$$C^{(4)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_4' (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (p_3^2)^{-\varepsilon} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_4 (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Это соотношение можно обобщить на произвольное n :

$$C^{(n)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_1 \rightarrow 0}} \int_n' (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (p_3^2)^{-\varepsilon} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_n (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \quad (23)$$

Из равенств (16) и (17) и равенства (23) получаем

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x, y) = & \frac{1}{\Gamma^3(1-\varepsilon)} \oint_C du dv x^u y^v \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1+u+v) \Gamma(1+u+v-\varepsilon) \times \\ & \times \left[\frac{3}{2} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{x}{y} \right) \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0' + \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{x}{y} \right) \Gamma(-u) \Gamma(-v) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(x, y) = & \frac{1}{\Gamma^4(1-\varepsilon)} \oint_C du dv x^u y^v \Gamma(-u) \Gamma(-v) \Gamma(1+u+v) \Gamma(1+u+v-\varepsilon) \times \\ & \times \left[\frac{5}{12} \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0^{(4)} + \right. \\ & + \frac{5}{6} \ln \left(\frac{x}{y} \right) \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0^{(3)} + \\ & + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{x}{y} \right) \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0^{(2)} + \\ & \left. + \frac{1}{12} \ln^3 \left(\frac{x}{y} \right) \left(a(\varepsilon) \Gamma(-u-\varepsilon) \Gamma(-v+\varepsilon) \right)_0' \right]. \end{aligned}$$

Однако нашей целью являются четырехточечные лестничные диаграммы. Далее мы покажем, как трехточечная лестничная диаграмма, приведенная в (21), преобразуется к соответствующей четырехточечной лестничной диаграмме с тем же распределением индексов в импульсном представлении, а именно к четырехточечным лестничным диаграммам, у которых индексы равны $1-\varepsilon$ на перекладинах и единице на остальных линиях.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ ЛЕСТНИЧНЫХ ДИАГРАММ К ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫМ ЛЕСТНИЧНЫМ ДИАГРАММАМ

Чтобы показать, как трехточечные лестничные диаграммы, приведенные в соотношении (21), можно преобразовать к четырехточечным лестничным диаграммам, будем следовать методам, описанным в работе [12] для случая $d = 4$.

Перейдем к дуальному представлению импульсных интегралов, которое для диаграммы в (22) имеет вид

$$\begin{array}{c}
 -p_1 \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 p_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \\
 r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad 0
 \end{array} . \quad (24)$$

Обзор подобного построения приведен в работе [12], которой мы будем следовать ниже. В формуле (24) приведены только индексы, отличные от единицы. Если индекс равен единице, то во всех дальнейших соотношениях мы будем его опускать. Если у линий нет индексов, то это означает, что в импульсном представлении индексы у этих линий равны единице. Затем выполним переопределение (13). Диаграмма (24) принимает вид, приведенный в левой части соотношения

$$\begin{array}{c}
 q_2 - q_3 \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 q_1 - q_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 r_1 = r'_1 - q_3 \\
 r_2 = r'_2 - q_3 \\
 r_3 = r'_3 - q_3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 q_2 \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 q_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \quad 1 - \varepsilon \\
 q_3
 \end{array} . \quad (25)$$

Теперь выполним сдвиг переменных интегрирования на внутренних вершинах дуального графа. Этот сдвиг переменных написан в центральной части формулы (25). В результате получим диаграмму в правой части (25). Новые переменные интегрирования (после сдвига) r'_1, r'_2, r'_3 связаны с исходными переменными как $r_1 = r'_1 - q_3$, $r_2 = r'_2 - q_3$, $r_3 = r'_3 - q_3$. Левая и правая части равенства (25) равны между собой,

и они совпадают с левой частью следующего равенства:

$$\frac{1}{[12]^3} \phi^{(3)} \left(\frac{[23]}{[12]}, \frac{[31]}{[12]} \right), \quad (26)$$

где $N = 1, 2, 3$ обозначает $q_N = q_1, q_2, q_3$ соответственно.

Диаграмму (26) в дуальном представлении можно рассматривать как диаграмму в координатном представлении, порожденную в другой теории поля, которая определена в пространстве той же размерности $d = 4 - 2\varepsilon$. Величины q_1, q_2, q_3 , соответствующие внешним точкам в дуальном представлении, можно заменить на x_1, x_2, x_3 , соответствующие трем различным точкам в координатном представлении в этой вспомогательной скалярной теории поля. Это соответствие позволяет интерпретировать диаграмму в дуальном представлении как диаграмму в координатном представлении с безмассовыми скалярными пропагаторами. Мы использовали краткие обозначения из работы [19] для пространственно-временных интервалов, а именно $[Nx] = (x_N - x)^2$ и $[12] = (x_1 - x_2)^2$, т.е. $N = 1, 2, 3$ для $x_N = x_1, x_2, x_3$, в полной аналогии со случаем $d = 4$ из работы [12]. В этих обозначениях и в соответствии с определением трехточечной лестничной функции с тремя перекладинами в (22) результат для диаграммы в (26) можно записать как

$$\frac{1}{[12]^3} \phi^{(3)} \left(\frac{[23]}{[12]}, \frac{[31]}{[12]} \right),$$

и мы имеем тождество (26).

Согласно интерпретации, данной в предыдущем абзаце, мы рассматриваем внутренние вершины интегрирования для графа из равенства (26) в дуальном представлении как новые переменные интегрирования y_i . Следующий шаг заключается в выполнении конформной подстановки для каждой переменной интегрирования и для каждого внешнего вектора дуального пространства размерности $d = 4 - 2\varepsilon$:

$$y_\mu = \frac{y'_\mu}{y'^2}, \quad x_{1\mu} = \frac{x'_{1\mu}}{x'^2_1} \Rightarrow [y1] = \frac{[y'1']}{[y'][1']}; \quad [y] \equiv y^2, \quad [1] \equiv x^2_1.$$

Результат этой подстановки имеет вид

$$\frac{1}{[12']^3} \phi^{(3)} \left(\frac{[23']}{[12']}, \frac{[31']}{[12']} \right),$$

$$\times [1']^3 [2']^3 [3']^{1-\varepsilon} = \frac{[1']^3 [2']^3}{[1'2']^3} \phi^{(3)} \left(\frac{[2'3'] [1']}{[1'2'] [3]}, \frac{[3'1'] [2']}{[1'2'] [3]} \right). \quad (27)$$

Опуская штрихи и переупорядочивая множители, получаем результат для ромбической диаграммы в дуальном представлении:

$$= \frac{1}{[12]^3 [3]^{1-\varepsilon}} \phi^{(3)} \left(\frac{[23] [1]}{[12] [3]}, \frac{[31] [2]}{[12] [3]} \right). \quad (28)$$

Теперь сдвинем все переменные интегрирования на некоторый вектор x_4'' :

$$y_i = y_i'' - x_4'', \\ x_1 = x_1'' - x_4'', \quad x_2 = x_2'' - x_4'', \quad x_3 = x_3'' - x_4'',$$

где y_i – переменные интегрирования для внутренних вершин в (28), $i = 1, 2, 3$. Опуская снова штрихи, получаем выражение

$$= \frac{1}{[12]^3 [34]^{1-\varepsilon}} \phi^{(3)} \left(\frac{[23] [14]}{[12] [34]}, \frac{[31] [24]}{[12] [34]} \right). \quad (29)$$

В этой ромбической диаграмме можно узнать дуальный образ импульсного представления четырехточечной лестничной диаграммы, приведенной в следующей формуле:

$$. \quad (30)$$

Действительно, полученный дуальный образ соответствует левой части соотношения

$$= \frac{1}{[p_1 + p_2]^3 [p_2 + p_3]^{1-\varepsilon}} \times$$

$$\times \phi^{(3)} \left(\frac{[p_1]}{[p_1 + p_2]} \frac{[p_3]}{[p_2 + p_3]}, \frac{[p_2]}{[p_1 + p_2]} \frac{[p_4]}{[p_2 + p_3]} \right) = \frac{1}{s^3 t^{1-\varepsilon}} \phi^{(3)} \left(\frac{p_1^2 p_3^2}{st}, \frac{p_2^2 p_4^2}{st} \right), \quad (31)$$

в то время как правую часть последнего равенства можно получить из соотношения (29). Как можно видеть, индекс на перекладинах у полученной четырехточечной лестничной диаграммы равен $1 - \varepsilon$ (см. (30)).

Четырехточечная лестничная диаграмма, приведенная в (30), в некотором смысле эквивалентна трехточечной лестничной диаграмме, приведенной в формуле (22), поскольку представляется той же функцией $\phi^{(3)}$, однако с другими аргументами. Этот результат для четырехточечной лестничной диаграммы из соотношения (30), выписанный в (31), можно обобщить на произвольное число перекладин:

$$\frac{1}{s^n t^{1-\varepsilon}} \phi^{(n)} \left(\frac{p_1^2 p_3^2}{st}, \frac{p_2^2 p_4^2}{st} \right). \quad (32)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что трехточечные лестничные диаграммы из семейства, приведенного в формуле (22), можно вычислить в явном виде для нецелого числа измерений $d = 4 - 2\varepsilon$, не проводя разложения по параметру размерной регуляризации ε . Этот результат можно получить с помощью комбинации аналитической и размерной регуляризации. Используя только размерную регуляризацию, этот результат получить невозможно. Полученные диаграммы вычислены в терминах функций $\phi^{(n)}$ из выражения (32). В работе показано, что некоторое семейство четырехточечных лестничных диаграмм также можно вычислить в терминах этих функций.

Недостаток полученного результата заключается в том, что его нельзя использовать для вычисления амплитуд, поскольку индексы перекладин четырехточечных лестничных диаграмм остаются равными $1 - \varepsilon$ в импульсном представлении. Однако мы полагаем, что этот результат полезен, поскольку он может внести большую ясность в более практический случай, когда все индексы в импульсном представлении равны единице, т. е. для физических четырехточечных лестничных диаграмм.

Что же касается преимуществ, которыми обладают полученные в настоящей работе результаты, отметим, что их можно использовать для изучения значений физических четырехточечных лестничных диаграмм вне массовой оболочки в размерно

регуляризованной теории, поскольку отличие результатов вне массовой оболочки, данных в (31), от физического случая пропорционально ε . Среди других приложений можно рассмотреть и то, что с помощью сдвига $\varepsilon = \varepsilon' + 1/2$, $\varepsilon = \varepsilon' + 1$ или $\varepsilon = \varepsilon' - 1$ можно перенести предложенное обобщение метода петлевой редукции Белокурова–Усюкиной на соответствующие размерно регуляризованные трех-, двух- или шестимерные скалярные теории. Таким образом, данный прием можно обобщить на четырехточечные лестничные диаграммы произвольной размерности, но со специальными значениями индексов. Точные значения индексов, для которых можно использовать данный прием, зависят от d .

Благодарности. Работа И. Кондрашука поддержана со стороны Fondecyt (гранты № 1040368, 1050512, 1121030), DIUBB (гранты № 121909 GI/C-UBB и 102609), а также Universidad del Bío-Bío и Ministerio de Education (Chile) в рамках проекта MECESUP UBB0704-PD018. И. Кондрашук благодарен Physics Faculty of Bielefeld University за гостеприимство и великолепные условия для работы. Рисунки выполнены с помощью программы JaxoDraw [23].

Список литературы

- [1] D. J. Broadhurst, A. I. Davydychev, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **205–206** (2010), 326–330, arXiv: 1007.0237.
- [2] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 085001, 27 pp., arXiv: hep-th/0505205.
- [3] V. A. Smirnov, *Evaluating Feynman Integrals*, Springer Tracts in Modern Physics, **211**, Springer, Berlin, 2004.
- [4] N. I. Ussyukina, A. I. Davydychev, *Phys. Lett. B*, **298**:3–4 (1993), 363–370.
- [5] N. I. Ussyukina, A. I. Davydychev, *Phys. Lett. B*, **305**:1–2 (1993), 136–143.
- [6] Э. Э. Боос, А. И. Давыдычев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 56–72.
- [7] A. I. Davydychev, *J. Phys. A*, **25**:21 (1992), 5587–5596.
- [8] V. V. Belokurov, N. I. Ussyukina, *J. Phys. A*, **16**:12 (1983), 2811–2816.
- [9] Н. И. Усюкина, *ТМФ*, **54**:1 (1983), 124–129.
- [10] N. I. Ussyukina, *Phys. Lett. B*, **267**:3 (1991), 382–388; Н. И. Усюкина, *ТМФ*, **87**:3 (1991), 414–421.
- [11] D. J. Broadhurst, *Phys. Lett. B*, **307**:1–2 (1993), 132–139.
- [12] I. Kondrashuk, A. Vergara, *JHEP*, **03** (2010), 051, 12 pp., arXiv: 0911.1979.
- [13] I. Gonzalez, I. Kondrashuk, *Phys. Part. Nucl.*, **44**:2 (2013), 268–271, arXiv: 1206.4763.
- [14] P. Allendes, B. Kniehl, I. Kondrashuk, E. A. Notte Cuello, M. Rojas Medar, *Nucl. Phys. B*, **870**:1 (2013), 243–277, arXiv: 1205.6257.
- [15] M. D’Eramo, L. Peliti, G. Parisi, *Lett. Nuovo Cimento*, **2**:17 (1971), 878–880.
- [16] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [17] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [18] D. I. Kazakov, *Analytical Methods For Multiloop Calculations: Two Lectures On The Method Of Uniqueness*, JINR-E2-84-410, JINR, Dubna, 1984.
- [19] G. Cvetič, I. Kondrashuk, A. Kotikov, I. Schmidt, *Internat. J. Modern Phys. A*, **22**:10 (2007), 1905–1934, arXiv: hep-th/0604112.

- [20] I. Kondrashuk, A. Kotikov, “Fourier transforms of UD integrals”, *Analysis and Mathematical Physics*, Birkhäuser Book Series Trends in Mathematics, eds. B. Gustafsson, A. Vasiliev, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2009, 337–348, arXiv: 0802.3468.
- [21] I. Kondrashuk, A. Kotikov, *JHEP*, **08** (2008), 106, 9 pp., arXiv: 0803.3420.
- [22] P. Allendes, N. Guerrero, I. Kondrashuk, E. A. Notte Cuello, *J. Math. Phys.*, **51**:5 (2010), 052304, 18 pp., arXiv: 0910.4805.
- [23] D. Binosi, L. Theussl, *Comp. Phys. Comm.*, **161**:1–2 (2004), 76–86, arXiv: hep-ph/0309015.

Поступила в редакцию 28.10.2012,
после доработки 15.05.2013