Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Захаров, Ренормализация в задаче Коши для уравнения Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 173–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:58:00

© 2013 г.

С. В. Захаров*

РЕНОРМАЛИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Рассматривается задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с малым параметром при старшей производной и большим градиентом начальной функции. Методом ренормализации строится асимптотическое решение задачи.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза, задача Коши, асимптотика, ренормализация.

DOI: 10.4213/tmf8437

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \Lambda\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad (2)$$

с ограниченной начальной функцией Λ , которая имеет конечные пределы

$$\Lambda_0^\pm = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \Lambda(s), \quad \Lambda_0^+ < \Lambda_0^-,$$

и обладает производной, достаточно быстро стремящейся к нулю на бесконечности. Это классическая модель распространения нелинейных волн в среде с малой дисперсией. Для случая разрывной начальной функции асимптотическое решение было получено в работе [1]. Для начальных данных типа ступеньки асимптотические формулы найдены методом обратной задачи рассеяния [2]. При определенных ограничениях на начальную функцию можно исследовать асимптотику методом Уизема, как это сделано в работах [3], [4], где также показана связь с методом обратной задачи рассеяния.

В настоящей работе строится асимптотическое по параметрам ε и ρ решение задачи (1), (2) при всех x и конечных значениях t . Ясно, что структура асимптотики

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия.
E-mail: svz@imm.uran.ru

должна существенно зависеть от соотношения параметров ε и ρ . Мы предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\mu = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0.$$

Известно, что в ряде случаев поведение решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной становится в некотором смысле самоподобным. Тогда оказывается эффективным анализ решения с помощью ренормализации [5]. Этот подход имеет то преимущество, что сразу же получается равномерное приближение задачи, избавляющее от необходимости строить асимптотические анзацы в отдельных областях. Например, в работе [6] составная асимптотика решения задачи Коши с условием (2) для квазилинейного параболического уравнения была получена методом согласования [7], а в работе [8] показано, что ренормализационное приближение решения асимптотически близко к составному асимптотическому решению.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Построим асимптотическое решение задачи (1), (2), используя технику, сходную с методом ренормгруппы, в наиболее простом ее варианте. Перейдем к внутренним переменным

$$x = \sqrt{\varepsilon} \eta, \quad t = \sqrt{\varepsilon} \theta, \quad (3)$$

поскольку это позволит учесть все члены уравнения (1). В качестве “затравочной” функции возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} + Z \frac{\partial Z}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \eta^3} = 0 \quad (4)$$

с начальным условием

$$Z(\eta, 0) = \begin{cases} \Lambda_0^-, & \eta < 0, \\ \Lambda_0^+, & \eta > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Будем искать разложение решения в следующем виде:

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = Z(\eta, \theta) + \mu W(\eta, \theta, \mu) + \dots, \quad (6)$$

где добавка $\mu W(\eta, \theta, \mu)$ должна устранить особенность затравочной функции в начальный момент времени. Из уравнений (1) и (4) вытекает, что функция W удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial(ZW)}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя уравнение (4) по переменной η , убеждаемся, что функция

$$G(\eta, \theta) = \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \frac{\partial Z(\eta, \theta)}{\partial \eta}$$

удовлетворяет уравнению (7). Более того, G представляет собой функцию Грина, поскольку

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta, \theta) f(\eta) d\eta = -\frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\eta, 0) f'(\eta) d\eta = f(0)$$

для любой финитной функции f .

Подберем решение W в виде свертки с функцией Грина G так, чтобы асимптотическое приближение удовлетворяло начальному условию (2). Тогда

$$W = \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Z(\eta - \mu s, \theta)}{\partial \eta} [\Lambda(s) - Z(s, 0)] ds.$$

После интегрирования по частям и подстановки в разложение (6) получаем искомое выражение

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx U_0(x, t, \varepsilon, \rho) = \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{x - \rho s}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \Lambda'(s) ds, \quad (8)$$

которое проясняет структуру асимптотического решения по параметрам ε и ρ в главном приближении.

В качестве примера положим $\Lambda_0^+ = 0$ и $\Lambda_0^- = a > 0$. В правую часть соотношения (8) подставим вместо $Z(\eta, \theta)$ асимптотическое решение Гуревича–Питаевского:

$$Z_{\text{GP}}(\eta, \theta) = a \text{ при } \eta < -a\theta, \quad Z_{\text{GP}}(\eta, \theta) = 0 \text{ при } \eta > \frac{2a\theta}{3},$$

$$Z_{\text{GP}}(\eta, \theta) = a \left[2 \operatorname{dn}^2 \left(\frac{a^{3/2}\theta}{\sqrt{6}} \left(\zeta - \frac{1 + \sigma^2(\zeta)}{3} \right), \sigma(\zeta) \right) - 1 + \sigma^2(\zeta) \right]$$

при $-a\theta \leq \eta \leq 2a\theta/3$. Здесь $\zeta = \eta/a\theta$, $\operatorname{dn}(v, \sigma)$ – эллиптическая функция Якоби, а функция $\sigma(\zeta)$ определяется из соотношения

$$1 + \sigma^2 - \frac{2\sigma^2(1 - \sigma^2)K(\sigma)}{E(\sigma) - (1 - \sigma^2)K(\sigma)} = 3\zeta,$$

где $K(\sigma)$ и $E(\sigma)$ – полные эллиптические интегралы (первого и второго рода). В результате получаем

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx & 2\Lambda\left(\frac{x + at}{\rho}\right) - \Lambda\left(\frac{x - 2at/3}{\rho}\right) - \\ & - \int_{(x-2at/3)/\rho}^{(x+at)/\rho} \Lambda'(s) \left[2 \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a}{6\varepsilon}} q(x, t, s, \rho), \sigma\left(\frac{x - \rho s}{at}\right) \right) + \sigma^2\left(\frac{x - \rho s}{at}\right) \right] ds, \end{aligned}$$

где

$$q(x, t, s, \rho) = x - \rho s - \frac{at}{3} \left[1 + \sigma^2\left(\frac{x - \rho s}{at}\right) \right].$$

Рис. 1

После замены $x - \rho s = aty$ приходим к следующей формуле:

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx 2\Lambda\left(\frac{x + at}{\rho}\right) - \Lambda\left(\frac{x - 2at/3}{\rho}\right) - \\ - \frac{at}{\rho} \int_{-1}^{2/3} \Lambda'\left(\frac{x - aty}{\rho}\right) \left[2 \operatorname{dn}^2\left(\frac{a^{3/2}t\omega(y)}{\sqrt{\varepsilon}}, \sigma(y)\right) + \sigma^2(y) \right] dy,$$

где

$$\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ y - \frac{1}{3} \left[1 + \sigma^2(y) \right] \right\}.$$

Таким образом, главное асимптотическое приближение в данном случае представляет собой функцию трех внутренних переменных $x\rho^{-1}$, $t\rho^{-1}$ и $t\varepsilon^{-1/2}$, которая при $t = 0$ совпадает с начальной функцией $\Lambda(x\rho^{-1})$.

На рис. 1 схематично показан график асимптотического решения как функции от x при фиксированном значении времени $t > 0$ на фоне графика монотонно убывающей начальной функции.

Интересно, что для начальной функции, соответствующей волне разрежения, при подстановке в (8) функции

$$Z(\eta, \theta) = \begin{cases} -c/6, & \eta < -c\theta, \\ \eta/6\theta, & -c\theta < \eta < 0, \\ 0, & \eta > 0, \end{cases}$$

где $c > 0$, получается выражение

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx \frac{\rho}{ct} \int_{x/\rho}^{(x+ct)/\rho} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda\left(\frac{x + cty}{\rho}\right) dy,$$

не зависящее от ε .

Благодарности. Автор выражает свою признательность Б. И. Сулейманову за обсуждения и А. Е. Эльберту за помощь в работе. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00679) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт № 02.740.11.0612).

Список литературы

- [1] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ*, **65**:2(8) (1973), 590–604.
- [2] Е. Я. Хруслов, *Матем. сб.*, **99(141)**:2 (1976), 261–281.
- [3] А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, *Письма в ЖЭТФ*, **54**:2 (1991), 104–109.
- [4] А. Л. Крылов, В. В. Ходоровский, Г. А. Эль, *Письма в ЖЭТФ*, **56**:2 (1992), 325–329.
- [5] Э. В. Теодорович, *ПММ*, **68**:2 (2004), 335–367.
- [6] С. В. Захаров, *Докл. РАН*, **422**:6 (2008), 733–734.
- [7] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1992.
- [8] С. В. Захаров, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:4 (2010), 699–706.

Поступила в редакцию 29.10.2012