Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Паньженский, Стационарная модель Вселенной
с кручением, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 151–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:55:19

© 2013 г.

В. И. Паньженский*

СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ С КРУЧЕНИЕМ

На четырехмерном псевдоримановом многообразии с метрикой стационарной модели Вселенной построена структура Римана–Картана с группой автоморфизмов максимальной размерности. Тензор кручения этой структуры является суммой двух частей: полусимметрической, претендующей на геометризацию спиновой плотности материи, и кососимметрической, определяющей кручение пространственного сечения. Дана геометрическая интерпретация кручения пространственного сечения. Доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов структуры Римана–Картана пространственно-временного многообразия с полусимметрической или кососимметрической связностью равна 7.

Ключевые слова: многообразие Римана–Картана, автоморфизмы, тензор кручения.

DOI: 10.4231/tmf8438

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., например, книгу [1]), что причиной включения Λ -члена в уравнения гравитационного поля Эйнштейна–Гильберта явилось желание Эйнштейна построить статическую модель Вселенной. Прямая подстановка статической (не зависящей от времени) метрики g_{ij} в уравнения поля приводит к противоречию. Уравнения поля с Λ -членом

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} + \Lambda g_{ij}$$

уже имеют статические решения, в частности решение с замкнутым пространственным сечением, которое и пытался найти Эйнштейн.

Уравнения гравитационного поля с Λ -членом имеют также достаточно простое решение

$$ds^2 = dx^{02} - e^{2Hx^0}(dx^{12} + dx^{22} + dx^{32}),$$

которое определяет стационарную (не статическую) модель Вселенной. В отличие от решений Фридмана это решение не имеет сингулярности. Тем не менее метрика стационарной модели описывает расширение Вселенной, которое происходит

* Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. E-mail: kaf_geom@mail.ru

неограниченно во времени как в прошлом, так и в будущем. При этом постоянная Хаббла H красного смещения спектральных линий не меняется в ходе эволюции Вселенной, а космологическая постоянная $\Lambda = 3H/c^2$. Пространственным сечением ($x^0 = ct = \text{const}$) является евклидово пространство, т.е. в этой модели мир плоский без материи, и, следовательно, теория стационарной Вселенной неприменима ко Вселенной с материей [1]. Однако, наделяя стационарную модель дополнительными структурами, как это делается, например, в теории компенсаций, возможно, удастся решить некоторые проблемы, существующие в рамках теории стационарной Вселенной.

В настоящей работе мы наделяем стационарную модель Вселенной структурой Римана–Картана, оставляя прежнюю метрику и добавляя связность с кручением такую, что группа автоморфизмов полученной структуры имеет максимальную размерность. Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного, $n \neq 3$, многообразия Римана–Картана $(M, g, \tilde{\nabla})$ меньше $n(n+1)/2$. Если $n = 4$ и метрика g имеет лоренцеву сигнатуру, а связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической или кососимметрической, то максимальная размерность группы равна 7.

2. СТРУКТУРЫ РИМАНА–КАРТАНА И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

2.1. Пусть M – гладкое n -мерное, $n \geq 2$, многообразие, $g(g_{ij})$ – (псевдо)риманова метрика на M , $\tilde{\nabla}(\Gamma_{ij}^k)$ – линейная связность с кручением $S(S_{ij}^k) \neq 0$, согласованная с g : $\tilde{\nabla}g = 0$. Метрика g и связность $\tilde{\nabla}$ задают на M структуру Римана–Картана [2]. Связность $\tilde{\nabla}$ можно представить в виде $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, где $T(T_{ij}^k)$ – тензор деформации связности Леви–Чивиты $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ метрики g . Связность $\tilde{\nabla}$ согласована с g тогда и только тогда, когда ковариантные компоненты $T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}$ тензора деформации кососимметричны по последним двум индексам [3]. Таким образом, структура Римана–Картана определяется заданием метрического тензора $g(g_{ij})$ – симметрического невырожденного тензорного поля, а также тензора деформации $T(T_{ijk})$ – кососимметрического по последним двум индексам тензорного поля. Многообразие M , наделенное структурой Римана–Картана, называется многообразием (пространством) Римана–Картана и часто обозначается через $(M, g, \tilde{\nabla})$ или (M, g, T) .

2.2. Диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ называется автоморфизмом структуры Римана–Картана, если он оставляет инвариантными метрику g и связность $\tilde{\nabla}$. Так как из инвариантности метрики g следует инвариантность связности Леви–Чивиты ∇ [4], диффеоморфизм φ сохраняет также тензор деформации T и, следовательно, тензор кручения S . Таким образом, множество всех автоморфизмов структуры Римана–Картана либо совпадает с группой Ли движений (псевдо)риманова многообразия (M, g) , либо является замкнутой подгруппой Ли группы Ли движений этого пространства, оставляющей инвариантным тензор деформации. Следовательно, размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного многообразия Римана–Картана не превосходит $n(n+1)/2$.

2.3. Пусть $\varphi_t = \exp tX$ – произвольная однопараметрическая подгруппа группы Ли автоморфизмов G^r многообразия Римана–Картана (M, g, T) , тогда $\mathcal{L}_X g = 0$ и $\mathcal{L}_X T = 0$, где L_X – производная Ли вдоль векторного поля $X(\xi^k)$. В локальных

координатах эти уравнения имеют вид

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0, \quad (1)$$

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pjk} + \partial_j \xi^p T_{ipk} + \partial_k \xi^p T_{ijp} = 0. \quad (2)$$

Векторное поле X называется инфинитезимальным автоморфизмом, если порожденная им локальная однопараметрическая группа φ_t состоит из локальных автоморфизмов многообразия Римана–Картана. Если многообразие Римана–Картана допускает r линейно независимых автоморфизмов $X_1, \dots, X_r$, то они порождают алгебру Ли автоморфизмов, которая определяет локальную группу Ли автоморфизмов G^r . Если $X_1, \dots, X_r$ – полные векторные поля, то G^r – группа Ли [5]. В любом случае компоненты этих векторных полей являются решениями уравнений (1) и (2) – уравнений инвариантности структуры Римана–Картана (g, T) .

2.4. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного, $n \neq 3$, многообразия Римана–Картана меньше $n(n+1)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (1) и (2) запишем в ковариантных производных:

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \quad (3)$$

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0, \quad (4)$$

где $\xi_{ij} = \xi_i^p g_{jp}$, $\xi_i^j = \nabla_i \xi^j$. Уравнение (4) перепишем в виде

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq} \{ \delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} \} = 0, \quad (5)$$

где δ_i^j – символ Кронекера, g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора g : $g_{ip} g^{pj} = \delta_i^j$.

Пусть (M, g, T) допускает группу автоморфизмов G^r максимальной размерности $r = n(n+1)/2$. Тогда уравнение (5) должно обращаться в тождество при любых ξ^p и ξ_{rq} , удовлетворяющих уравнениям (3). Поэтому из (5) вытекают уравнения

$$\nabla_p T_{ijk} = 0,$$

$$\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $g_{lr} g_{mq}$ и, учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, получим

$$g_{il} T_{mjk} - g_{jl} T_{ikm} + g_{kl} T_{ijm} - g_{im} T_{ljk} + g_{jm} T_{ikl} - g_{km} T_{ijl} = 0.$$

Перепишем это уравнение, умножив его на $g^{ql} g^{rm}$, как

$$\delta_i^q T^r_{jk} - \delta_j^q T^r_{ik} + \delta_k^q T^r_{ij} - \delta_i^r T^q_{jk} + \delta_j^r T^q_{ik} - \delta_k^r T^q_{ij} = 0, \quad (6)$$

где $T^r_{jk} = T_{sjk} g^{sr}$, $T^r_{ik} = T_{iks} g^{sr}$. В уравнении (6) свернем индексы q и i . В результате получим

$$(n-1)T^r_{jk} - T^r_{jk} + T^r_{kj} + \delta_j^r T^s_{sk} - \delta_k^r T^s_{sj} = 0.$$

Умножив последнее уравнение на g_{ir} , получим

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + g_{ji}T_{sk}{}^s - g_{ki}T_{sj}{}^s = 0. \quad (7)$$

Совершая в этом уравнении циклическую перестановку индексов, получим еще два равенства:

$$\begin{aligned} (n-1)T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + g_{kj}T_{si}{}^s - g_{ij}T_{sk}{}^s &= 0, \\ (n-1)T_{kij} - T_{ijk} + T_{jik} + g_{ik}T_{sj}{}^s - g_{jk}T_{si}{}^s &= 0. \end{aligned}$$

Складывая три последних уравнения и учитывая косую симметрию тензора деформации, имеем

$$(n-3)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) = 0,$$

откуда при $n \neq 3$ получаем

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0. \quad (8)$$

С учетом этого соотношения равенства (7) принимают вид

$$nT_{ijk} + g_{ji}T_{sk}{}^s - g_{ki}T_{sj}{}^s = 0$$

или, после умножения на g^{kl} ,

$$nT_{ij}{}^l + g_{ji}g^{kl}T_{sk}{}^s - \delta_i^l T_{sj}{}^s = 0.$$

Свернем индексы l и i . В результате будем иметь

$$nT_{sj}{}^s + T_{sj}{}^s - nT_{sj}{}^s = 0,$$

откуда $T_{sj}{}^s = 0$, и равенства (7) могут быть переписаны как

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} = 0.$$

Отсюда, учитывая (8), заключаем, что $T_{ijk} = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство этой теоремы в основном повторяет доказательство теоремы о римановом пространстве постоянной кривизны с кручением, приведенное автором в работе [6]. В этой же работе, а также в работе [7] отдельно исследован случай $n = 3$.

3. АВТОМОРФИЗМЫ СТРУКТУРЫ РИМАНА–КАРТАНА НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ МНОГООБРАЗИИ

Четырехмерное псевдориманово многообразие с сигнатурой $(+ - - -)$ назовем пространственно-временным многообразием. В настоящем разделе мы докажем, что размерность группы автоморфизмов структуры Римана–Картана на пространственно-временном многообразии не превосходит 8, а в случае полусимметрической или кососимметрической связности размерность группы не превосходит 7.

3.1. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана–Картана не превосходит 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана–Картана M . Стационарная подгруппа точки x_0 индуцирует группу изотропий G_0 в касательном пространстве $\mathbb{E} = T_{x_0}M$, которая является подгруппой псевдоортогональных преобразований псевдоевклидова векторного пространства $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{1,3}^4$. Так как тензор кручения S инвариантен относительно G , значение тензорного поля S в точке x_0 является ненулевым тензором на $\mathbb{E}$, инвариантным относительно G_0 . Рассмотрим S как кососимметрическое отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$. Пусть ξ – элемент алгебры Ли псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = \exp t\xi$ – однопараметрическая подгруппа преобразований, порожденная ξ . Тогда ξ принадлежит алгебре Ли g_0 группы Ли G_0 тогда и только тогда, когда φ_t оставляет инвариантным тензор $\hat{S}$, т. е.

$$S(\varphi_t u, \varphi_t v) = \varphi_t S(u, v), \quad u, v \in \mathbb{E}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя последнее равенство по t при $t = 0$, получаем

$$S(\xi u, v) + S(u, \xi v) = \xi S(u, v). \quad (9)$$

Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) – ортонормированный базис в $\mathbb{E}$, а S_{jk}^i и ξ_j^i – компоненты тензора S и элемента ξ в этом базисе. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$S_{pk}^i \xi_j^p + S_{jp}^i \xi_k^p - S_{jk}^q \xi_q^i = 0$$

или

$$(S_{pk}^i \delta_j^q + S_{jp}^i \delta_k^q - S_{jk}^q \delta_p^i) \xi_q^p = 0. \quad (10)$$

Таким образом, мы имеем систему линейных уравнений (10) относительно неизвестных элементов ξ_q^p алгебры Ли g_0 группы Ли G_0 псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}_{1,3}^4$. Матрица, составленная из элементов этой алгебры, имеет вид

$$(\xi_q^p) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_2^1 & \xi_3^1 & \xi_4^1 \\ \xi_2^1 & 0 & \xi_3^2 & \xi_4^2 \\ \xi_3^1 & -\xi_3^2 & 0 & \xi_4^3 \\ \xi_4^1 & -\xi_4^2 & -\xi_4^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Учитывая косую симметрию по j, k выражения, стоящего в скобках в левой части (10) и вид матрицы (11), мы получаем систему из 24 уравнений относительно шести неизвестных переменных ξ_q^p ($p < q$). Выписывая эту систему, нетрудно убедиться, что ее минимальный ранг равен 2. Действительно, для любой ненулевой компоненты S_{jk}^i мы можем указать два линейно независимых уравнения системы (10). Пусть, например, $S_{23}^1 \neq 0$, тогда уравнения системы (10) с индексами $i = 1$, $j = 2$, $k = 4$ и $i = 1$, $j = 3$, $k = 4$ имеют вид

$$\dots + 0 \cdot \xi_4^2 + S_{23}^1 \xi_4^3 = 0, \quad \dots + S_{32}^1 \xi_4^2 + 0 \cdot \xi_4^3 = 0$$

и, следовательно, являются линейно независимыми. Если $S_{12}^1 \neq 0$, то мы имеем два линейно независимых уравнения с индексами $i = 1, j = 1, k = 3$ и $i = 1, j = 1, k = 4$:

$$\cdots + S_{12}^1 \xi_3^2 + 0 \cdot \xi_4^2 + \cdots = 0, \quad \cdots + 0 \cdot \xi_3^2 + S_{12}^1 \xi_4^2 + \cdots = 0,$$

и т. д. Поскольку ранг системы (10) не меньше 2, размерность группы изотропии G_0 не больше 4, а размерность всей группы автоморфизмов не превосходит 8. Теорема доказана.

3.2. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана–Картана с полусимметрической или кососимметрической связностью не превосходит 7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, если ее тензор кручения S имеет вид [8]

$$S_{jk}^i = \frac{1}{n-1} (\delta_j^i \eta_k - \delta_k^i \eta_j), \quad (12)$$

где $\eta_k = S_{pk}^p$. Подставляя (12) в систему (10), получаем

$$\frac{1}{n-1} (\delta_p^i \eta_k \delta_j^q - \delta_k^i \eta_p \delta_j^q + \delta_j^i \eta_p \delta_k^q - \delta_p^i \eta_j \delta_k^q - \delta_j^q \eta_k \delta_p^i + \delta_k^q \eta_j \delta_p^i) \xi_q^p = 0$$

или

$$(-\delta_k^i \delta_j^q + \delta_j^i \delta_k^q) \eta_p \xi_q^p = 0. \quad (13)$$

Докажем, что ранг системы (13) не меньше 3. Действительно, для каждой ненулевой компоненты η_p мы можем указать три линейно независимых уравнения системы (13). Пусть, например, $\eta_1 \neq 0$. Тогда уравнения системы (13) с индексами $i = j = 1, k = 2, 3, 4$ имеют вид

$$(-\delta_k^1 \delta_1^q + \delta_k^q) \eta_1 \xi_q^1 + (-\delta_k^1 + \delta_k^1) \eta_p \xi_1^p + \cdots = 0$$

или

$$\delta_k^q \eta_1 \xi_q^1 + \cdots = 0$$

и, очевидно, линейно независимы. Если $\eta_2 \neq 0$, то уравнения при $i = j = 2, k = 1, 3, 4$ записываются как

$$\cdots + (-\delta_k^2 \delta_2^q + \delta_k^q) \eta_2 \xi_q^2 + (-\delta_k^2 + \delta_k^2) \eta_p \xi_2^p + \cdots = 0$$

или как

$$\cdots + \delta_k^q \eta_2 \xi_q^2 + \cdots = 0$$

и являются линейно независимыми, и т. д. Так как ранг системы (13) не меньше 3, размерность группы изотропии G_0 не больше 3, а размерность группы автоморфизмов не превосходит 7.

Связность $\tilde{\nabla}$ называется кососимметрической, если ее ковариантный тензор деформации T кососимметричен по своим аргументам. Условие кососимметричности тензора T является необходимым и достаточным условием совпадения симметрической части связности $\tilde{\nabla}$ со связностью Леви-Чивиты ∇ метрики g [3]. В этом случае $T_{ijk} = S_{ijk}/2$ и ковариантный тензор кручения также кососимметричен по всем индексам. Поэтому те компоненты S_{ijk} , которые содержат два одинаковых индекса, равны нулю, как и компоненты S_{jk}^i , вычисленные в точке x_0 . Учитывая этот факт, мы можем для любой ненулевой компоненты S_{jk}^i , $i \neq j \neq k$, указать три линейно независимых уравнения системы (10). Пусть, например, $S_{23}^1 \neq 0$. Рассмотрим подсистему системы (10), уравнения которой занумерованы индексами $i = 4$, $j = 1$, $k = 2, 3$ и $i = 4$, $j = 2$, $k = 3$. Матрица, состоящая из столбцов при неизвестных ξ_q^p с индексами $p = 1$, $q = 4$, и $p = 2$, $q = 3$, и $p = 3$, $q = 4$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{12}^3 \\ 0 & S_{13}^2 & 0 \\ -S_{23}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, является невырожденной. Следовательно, эти уравнения линейно независимы. Таким образом, и в этом случае размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия не превосходит 7. Теорема доказана.

4. СТРУКТУРА РИМАНА–КАРТАНА СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ

4.1. Целью данного пункта является построение такой структуры Римана–Картана на пространственно-временном многообразии M^4 с метрикой стационарной модели Вселенной, чтобы группа автоморфизмов этой структуры имела максимальную размерность. Вычисляя тензор кривизны пространства M^4 , убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$R_{ijkl} = -H^2(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

откуда следует (см., например, статью [6]), что M^4 является пространством постоянной секционной кривизны $k = -H^2$. Это означает, что группа изометрий псевдориманова пространства M^4 имеет максимальную размерность $10 = n(n+1)/2$.

Найдем базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных движений псевдориманова пространства M^4 с метрикой стационарной модели Вселенной. Для этой метрики уравнения инвариантности (уравнения Киллинга) (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_0 \xi^0 &= 0, & H \xi^0 + \partial_1 \xi^1 &= 0, & H \xi^0 + \partial_2 \xi^2 &= 0, & H \xi^0 + \partial_3 \xi^3 &= 0, \\ -e^{2Hx^0} \partial_0 \xi^1 + \partial_1 \xi^0 &= 0, & -e^{2Hx^0} \partial_0 \xi^2 + \partial_2 \xi^0 &= 0, & -e^{2Hx^0} \partial_0 \xi^3 + \partial_3 \xi^0 &= 0, \\ \partial_1 \xi^2 + \partial_2 \xi^1 &= 0, & \partial_1 \xi^3 + \partial_3 \xi^1 &= 0, & \partial_2 \xi^3 + \partial_3 \xi^2 &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя данную систему относительно неизвестных функций $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ (компонент общего вектора инфинитезимального движения), находим

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -\frac{c_0}{H} + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3, \\ \xi^1 &= -\frac{c_1}{2H}e^{-2Hx^0} + c_0x^1 + \frac{H}{2}c_1(-x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) - \\ &\quad - Hc_2x^1x^2 - Hc_3x^1x^3 - c_2^1x^2 - c_3^1x^3 + c^1, \\ \xi^2 &= -\frac{c_2}{2H}e^{-2Hx^0} + c_0x^2 - Hc_1x^2x^1 + \frac{H}{2}c_2(x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2}) - \\ &\quad - Hx^2x^3 + c_2^1x^1 - c_3^2x^3 + c^2, \\ \xi^3 &= -\frac{c_3}{2H}e^{-2Hx^0} + c_0x^3 - Hc_1x^3x^1 - Hc_2x^3x^2 + \\ &\quad + \frac{H}{2}c_3(x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2}) + c_3^1x^1 + c_3^2x^2 + c^3,\end{aligned}$$

где десять постоянных $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ являются независимыми параметрами группы $\mathbb{G}^{10}$. Базисные операторы этой группы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}X_0 &= -\frac{1}{H}\partial_0 + x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3, & X_1 &= \partial_1, & X_2 &= \partial_2, & X_3 &= \partial_3, \\ Y_1 &= -x^3\partial_2 + x^2\partial_3, & Y_2 &= -x^3\partial_1 + x^1\partial_3, & Y_3 &= -x^2\partial_1 + x^1\partial_2, \\ Z_1 &= x^1\partial_0 + \left(-\frac{1}{2H}e^{-2Hx^0} + \frac{H}{2}(-x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})\right)\partial_1 - Hx^2x^1\partial_2 - Hx^3x^1\partial_3, \\ Z_2 &= x^2\partial_0 - Hx^1x^2\partial_1 + \left(-\frac{1}{2H}e^{-2Hx^0} + \frac{H}{2}(x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2})\right)\partial_2 - Hx^3x^2\partial_3, \\ Z_3 &= x^3\partial_0 - Hx^1x^3\partial_1 - Hx^2x^3\partial_2 + \left(-\frac{1}{2H}e^{-2Hx^0} + \frac{H}{2}(x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2})\right)\partial_3.\end{aligned}$$

Вычисляя коммутаторы, находим структурные уравнения группы:

$$\begin{aligned}[X_0, X_1] &= -X_1, & [X_0, X_2] &= -X_2, & [X_0, X_3] &= -X_3, \\ [X_1, Y_1] &= 0, & [X_1, Y_2] &= X_3, & [X_1, Y_3] &= X_2, \\ [X_2, Y_1] &= X_3, & [X_2, Y_2] &= 0, & [X_2, Y_3] &= -X_1, \\ [X_3, Y_1] &= -X_2, & [X_3, Y_2] &= -X_1, & [X_3, Y_3] &= 0, \\ [Y_1, Y_2] &= Y_3, & [Y_1, Y_3] &= -Y_2, & [Y_2, Y_3] &= Y_1, \\ [X_0, Z_1] &= Z_1, & [X_0, Z_2] &= Z_2, & [X_0, Z_3] &= Z_3, \\ [X_1, Z_1] &= -HX_0, & [X_1, Z_2] &= HY_3, & [X_1, Z_3] &= HY_2, \\ [X_2, Z_1] &= -HY_3, & [X_2, Z_2] &= -HX_0, & [X_2, Z_3] &= HY_1, \\ [X_3, Z_1] &= -HY_2, & [X_3, Z_2] &= -HY_1, & [X_3, Z_3] &= -HX_0, \\ [Y_1, Z_1] &= 0, & [Y_1, Z_2] &= -Z_3, & [Y_1, Z_3] &= Z_2, \\ [Y_2, Z_1] &= -Z_3, & [Y_2, Z_2] &= 0, & [Y_2, Z_3] &= Z_1, \\ [Y_3, Z_1] &= -Z_2, & [Y_3, Z_2] &= Z_1, & [Y_3, Z_3] &= 0, \\ [X_\alpha, X_\beta] &= [X_0, Y_\alpha] = [Z_\alpha, Z_\beta] = 0, & \alpha, \beta &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

4.2. В соответствии с теоремой 1 размерность группы автоморфизмов многообразия (M^4, g, T) меньше 10, и эта группа является подгруппой группы изометрий G^{10} псевдориманова пространства постоянной отрицательной кривизны с метрикой стационарной модели Вселенной.

Из структурных уравнений следует, что первые семь операторов определяют транзитивную подгруппу $\mathbb{G}^7$ группы $\mathbb{G}^{10}$, причем X_0, X_1, X_2, X_3 являются операторами сдвигов, а Y_1, Y_2, Y_3 – операторами вращений. Таким образом, мы имеем замкнутую подгруппу $\mathbb{G}^7$ группы $\mathbb{G}^{10}$, содержащую все изометрии пространственного сечения E^3 и оставляющую инвариантным единичное векторное поле, ортогональное E^3 . Базисные операторы группы $\mathbb{G}^7$ имеют вид

$$\partial_\alpha, \quad -x^\beta \partial_\alpha + x^\alpha \partial_\beta, \quad -\frac{1}{H} \partial_0 + x^\alpha \partial_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \alpha < \beta. \quad (14)$$

Для каждого векторного поля (14) выписываем уравнения инвариантности тензора деформации (2). Интегрируя полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций T_{ijk} , учитывая их косую симметрию по последним двум индексам, находим компоненты тензора деформации, инвариантного относительно G^7 :

$$\begin{aligned} T_{110} = T_{220} = T_{330} = -T_{101} = -T_{202} = -T_{303} &= ae^{2Hx^0}, \\ T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{132} = -T_{213} = -T_{321} &= be^{3Hx^0}, \end{aligned}$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$; остальные $T_{ijk} = 0$. Таким образом, мы имеем следующую структуру Римана–Картана на M^4 , инвариантную относительно G^7 :

$$\begin{aligned} g &= dx^0 \otimes dx^0 - e^{2Hx^0} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3), \\ T &= ae^{2Hx^0} \sum_\alpha dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^0 + be^{3Hx^0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $a = 0$, то тензор T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, и мы имеем кососимметрическую связность $\tilde{\nabla}$. В этом случае симметрическая часть связности $\tilde{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивиты ∇ , а тензор деформации совпадает с тензором кручения $S(S_{ij}^k)$ связности $\tilde{\nabla}$, точнее $T_{ij}^k = S_{ij}^k/2$ (здесь $S_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ji}^k$).

Если $b = 0$, то связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической. Действительно, для полусимметрической связности

$$T_{ijk} = \frac{1}{n-1} (g_{ik} \eta_j - g_{ij} \eta_k), \quad \eta_j = T_{sj}^s.$$

В нашем случае $\eta_j = (3a, 0, 0, 0)$, и последнее равенство является тождеством. В силу теоремы 3 группа автоморфизмов (14) структуры Римана–Картана (15) является полной и имеет максимальную размерность.

Построенный пример многообразия Римана–Картана позволяет утверждать, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Максимальная размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия с полусимметрической или кососимметрической связностью равна 7.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теории Эйнштейна–Картана кручение вводится для геометризации спиновой плотности материи, при этом спин представлен некоторым ковектором, который и должен определять кручение. В нашем случае на эту роль может претендовать полусимметрическая часть связности. Наличие кососимметрической части говорит о том, что кручение может и не представлять спина.

4.3. В пространственном сечении ($x^0 = \text{const}$), которое является евклидовым пространством E^3 , тензоры деформации и кручения имеют вид

$$T = c_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad S = 2c_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad (16)$$

где c_{ijk} – постоянные, из которых в силу косой симметрии существенной является лишь одна. В работе [5] для трехмерных пространств с кососимметрическим кручением нами введены понятия скалярного кручения и объемного кручения следующим образом. Обозначим через

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \text{и} \quad \Omega_0 = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

фундаментальную форму кручения и форму объема. Пусть D – ограниченная замкнутая область. Тогда определены интегралы

$$v = \int_D \Omega, \quad v_0 = \int_D \Omega_0.$$

Объемным кручением назовем отношение

$$v_k = \frac{v}{v_0},$$

а скалярное кручение определим как отношение плотностей:

$$s_k = \frac{1}{2} \frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}}.$$

Объемное кручение является функционалом, заданным на множестве областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки. Если область интегрирования стягивается в точку, то в пределе объемное кручение совпадает со скалярным кручением в этой точке. Если пространство Римана–Картана имеет постоянное скалярное кручение, то оно имеет постоянное объемное кручение и наоборот. При этом $s_k = v_k = s = \text{const}$. Постоянная s называется кручением пространства. В нашем случае объемное кручение совпадает со скалярным кручением и равно $s = c_{123}$ – кручению пространства E^3 .

4.4. Исследуем закон параллельного переноса вектора в связности $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением (16). Находим коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\Gamma}_{12}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \tilde{\Gamma}_{31}^2 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = -\tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{13}^2 = s;$$

остальные коэффициенты равны нулю. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j = 0$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{dv^1}{dt} + s\left(\frac{dx^2}{dt}v^3 - \frac{dx^3}{dt}v^2\right) &= 0, \\ \frac{dv^2}{dt} + s\left(\frac{dx^3}{dt}v^1 - \frac{dx^1}{dt}v^3\right) &= 0, \\ \frac{dv^3}{dt} + s\left(\frac{dx^1}{dt}v^2 - \frac{dx^2}{dt}v^1\right) &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Исследуем подробнее параллельный перенос, например, вектора $v(1, 0, 0)$ вдоль кривой $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = t$, т. е. вдоль оси x^3 прямоугольной декартовой системы координат в пространстве E^3 . Уравнения (17) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0.$$

Интегрируя систему (17), находим ее общее решение:

$$v^1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(st - \varphi_0), \quad v^2 = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(st - \varphi_0), \quad v^3 = c_3,$$

где $\varphi_0 = \arctg(c_2/c_1)$.

Из начальных условий следует, что $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$. Поэтому при параллельном переносе конец вектора v описывает винтовую линию

$$\vec{r} = \{\cos st, \sin st, t\},$$

лежащую на прямом геликоиде, который заматывается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3 . В этом случае кручение s определяет угловую скорость вращения вектора v при параллельном переносе его вдоль прямой.

4.5. Вычислим тензор кривизны

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^l - \partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \tilde{\Gamma}_{ip}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^p - \tilde{\Gamma}_{jp}^l \tilde{\Gamma}_{ik}^p$$

связности $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением (16).

Так как $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = c_{ij}{}^k$, $c_{ij}{}^k = c_{ijp} \delta^{kp}$, мы имеем

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p - c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p, \quad \tilde{R}_{ijkl} = c_{ipl} c_{jk}{}^p - c_{jpl} c_{ik}{}^p.\tag{18}$$

Нетрудно установить, что тензор $\tilde{R}_{ijk}{}^l = \tilde{R}_{ijk}{}^p \delta_{lp}$ обладает следующими свойствами:

$$\tilde{R}_{jikl} = -\tilde{R}_{ijkl}, \quad \tilde{R}_{ijlk} = -\tilde{R}_{ijkl}, \quad \tilde{R}_{klij} = \tilde{R}_{ijkl}, \quad \tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{jkil} + \tilde{R}_{kijl} = 0.$$

Поэтому в пространстве Римана–Картана $(E^3, \tilde{\nabla})$ можно определить секционную кривизну аналогично тому, как это делается в римановых пространствах. Каждому двумерному подпространству σ , натянутому на неколлинеарные векторы u и v в точке x , поставим в соответствие число

$$\tilde{k}_\sigma(x) = \frac{\tilde{R}_{ijkl} u^i v^j v^k u^l}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) u^i v^j u^k v^l},\tag{19}$$

задающее секционную кривизну пространства Римана–Картана в точке x в двумерном подпространстве σ .

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Секционная кривизна пространства Римана–Картана $(E^3, \tilde{\nabla})$ является постоянной отрицательной величиной и определяется кручением пространства по формуле $\tilde{k} = -s^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя соотношения (18) и равенство $g_{ij} = \delta_{ij}$ в (19) и учитывая косую симметрию постоянных c_{ijk} и $c_{ij}{}^k$, находим

$$\tilde{k} = -\frac{(c_{j1l}c_{ik}{}^1 + c_{j2l}c_{ik}{}^2 + c_{j3l}c_{ik}{}^3)u^i v^j v^k u^l}{(u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2})(v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2}) - (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3)^2}.$$

Вынося в числителе $s^2 = c_{123} c_{12}{}^3$ и сокращая дробь, получаем искомую формулу. Теорема доказана.

Для тензора Риччи $\tilde{R}_{jk} = \tilde{R}_{sjk}{}^s$ и скалярной кривизны $\tilde{R} = g^{jk} \tilde{R}_{jk}$ имеем

$$\tilde{R}_{jk} = c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p, \quad \tilde{R} = \delta^{jk} c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p = -6s^2 = 6\tilde{k},$$

откуда следует, что тензор Риччи симметрический, а квадратичная форма Риччи

$$\tilde{\varphi} = \tilde{R}_{jk} v^j v^k = -2s^2(v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2})$$

является отрицательно определенной.

Список литературы

- [1] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, М., 1975.
- [2] И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов, “Многообразия Римана–Картана”, Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож., **123**, ВИНТИ, М., 2009, 110–141.
- [3] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [4] Л. П. Эйзенхарт, *Непрерывные группы*, ИЛ, М., 1947.
- [5] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
- [6] В. И. Паньженский, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 754–757.
- [7] В. И. Паньженский, “Римановы пространства постоянной кривизны с кручением”, *Геометрия в Одессе – 2008*, т. 6, No. 2, Институт математики НАН Украины, Киев, 2009, 183–194.
- [8] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Наука, М., 1976.

Поступила в редакцию 25.10.2012