Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Крюков, Аналог квантовой гамильтоновой редукции Дринфельда–Соколова для деформированных алгебр ($U_q(\widehat{sl}_2)$ -случай), *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 337–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 08:41:24

© 1998 г.

С. В. Крюков*

АНАЛОГ КВАНТОВОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ РЕДУКЦИИ ДРИНФЕЛЬДА–СОКОЛОВА ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР $(U_q(\widehat{sl}_2)$ -СЛУЧАЙ)

Исследована связь между алгеброй $U_q(\widehat{sl}_2)$ и q -деформацией алгебры Виасоро.
Вычислены БРСТ-оператор для редукции Дринфельда–Соколова и его когомологии.

ВВЕДЕНИЕ

Как было доказано в [1], центр универсальной обертывающей алгебры $U(\hat{g})$ аффинной алгебры Каца–Мули $\hat{g}$ на критическом уровне изоморфен алгебре Гельфанда–Дикого, ассоциированной с дуальной алгеброй (по Леглендсу). Центр отождествляется с классическим пределом W -алгебры, определенной с помощью квантовой редукции Дринфельда–Соколова.

В [2] введены деформации универсальной обертывающей алгебры Каца–Мули $U_q(\hat{g})$, мотивированные квантовым методом обратной задачи рассеяния. Естественно было бы рассмотреть, как изменяются алгебры Гельфанда–Дикого при этих деформациях. Это было сделано в [3], где введены новые пуассоновы алгебры $W_q(g)$, которые являются q -деформациями классических W -алгебр. Пуассонова алгебра $W_q(g)$ – центр квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(\hat{g}^L)$ на критическом уровне, где g^L двойственна (по Леглендсу) к алгебре Ли g . Пуассонова алгебра $W_q(sl_2)$ является q -деформацией классической алгебры Виасоро. Она имеет генераторы t_n , $n \in \mathbb{Z}$, и связи

$$\{t_n, t_m\} = -h \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1 - q^l}{1 + q^l} t_{n-l} t_{m+l} - h(q^n - q^{-n}) \delta_{n, -m},$$

где $h = \log q$. Алгебра Гейзенберга–Пуассона $\mathcal{H}_q(sl_2)$ обладает генераторами λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, и связями

$$\{\lambda_n, \lambda_m\} = -h \frac{1 - q^n}{1 + q^n} \delta_{n, -m}.$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: kryukov@itp.ac.ru

Введем следующие выражения:

$$\Lambda(z) = q^{-1/2} \exp\left(-\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n z^{-n}\right), \quad t(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t_n z^{-n}.$$

Зададим гомоморфизм

$$t(z) \rightarrow \Lambda(zq^{1/2}) + \Lambda(zq^{-1/2})^{-1}.$$

Как было показано в [3], при $q \rightarrow 1$ алгебра $W_q(sl_2)$ становится изоморфной классической алгебре Вирасоро, а вышеприведенная формула переходит в преобразование Миуры.

В [4] построены квантовые аналоги этих пуассоновых алгебр и с помощью представления свободных полей найдены скрининговые операторы.

Существует другая связь между пуассоновыми алгебрами токов и пуассоновыми алгебрами Гельфанда–Дикого. Она обусловлена классической гамильтоновой редукцией Дринфельда–Соколова. Последняя может быть проквантована. В результате возникает процедура, известная как квантовая гамильтонова редукция. Кратко напомним, как делается квантовая гамильтонова редукция Дринфельда–Соколова в недеформированном случае [5, 6]. Введем алгебру Клиффорда, которая генерируется операторами Ψ_m^α , $\Psi_m^{*\beta}$, $m \in \mathbb{Z}$, со стандартными антикоммутационными соотношениями

$$[\Psi_n^\alpha, \Psi_m^{*\beta}] = \delta_{n+m,0} \delta_{\alpha,\beta}.$$

Обозначим через A неприводимое представление, генерируемое вакуумным вектором и аннигилируемое векторами Ψ_m , $m \leq 0$, Ψ_m^* , $m > 0$. A имеет $\mathbb{Z}$ -градуировку, причем $\deg \Psi_m = -1$, $\deg \Psi_m^* = 1$.

Обозначим через M вакуумное представление алгебры $\hat{g}$, генерируемое вакуумным вектором и аннигилируемое векторами из $g \otimes C[t]$. Пусть n – верхняя нильпотентная подалгебра g , $\hat{n} = n \otimes C[t, t^{-1}]$. Пространство $M \otimes A$ имеет структуру комплекса, дифференциал $Q_{\text{БРСТ}}$ (БРСТ – Бекки, Руэ, Стора, Тютин) задается следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} Q_{\text{БРСТ}} &= Q_1 + Q_2, \quad Q_{\text{БРСТ}}^2 = 0, \\ Q_1 &= \int \left(\sum_{\alpha \in \Delta_+} J^\alpha(z) \Psi^{*\alpha}(z) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_+} C_{\alpha\beta}^\gamma \Psi^{*\alpha}(z) \Psi^{*\beta}(z) \Psi^\gamma(z) \right) dz, \\ Q_2 &= \int \sum_j \Psi^{*\alpha_j}(z) dz, \end{aligned}$$

Δ_+ – набор положительных корней алгебры g , $C_{\alpha\beta}^\gamma$ – структурные константы алгебры $\hat{n}$.

Комплекс имеет $\mathbb{Z}$ -градуировку, и когомологии этого комплекса раскладываются согласно этой градуировке: $\bigoplus_j H^j$. Когомология нулевой градуировки H^0 называется W -алгеброй и обозначается $W(g)$. Другие когомологии, как было показано в [6], нулевые (когда уровень алгебры Каца–Мууди нерационален). Теперь возникает вопрос, существует ли какая-то процедура получения $W_q(g)$ -алгебр из $U_q(\hat{g})$, подобная квантовой гамильтоновой редукции в недеформированном случае. Ответу на этот вопрос и посвящена данная работа.

1. ОСЦИЛЛЯТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $U_q(\widehat{sl}_2)$

В [7] впервые было показано, что квантовая группа $U_q(\widehat{sl}_2)$ уровня k может быть представлена операторами $\{J_n^3 \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, $\{J_n^\pm \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и K со следующими перестановочными соотношениями между ними:

$$\begin{aligned} [J_n^3, J_m^3] &= \delta_{n+m,0} \frac{1}{n} [2n][kn], \quad n \neq 0, \\ [J_n^3, K] &= 0, \quad K J_n^\pm K^{-1} = q^{\pm 2} J_n^\pm, \quad [J_n^3, J_m^\pm] = \pm \frac{1}{n} [2n] q^{\mp k|n|/2} J_{n+m}^\pm, \\ J_{n+1}^\pm J_m^\pm - q^{\pm 2} J_m^\pm J_{n+1}^\pm &= q^{\pm 2} J_n^\pm J_{m+1}^\pm - J_{m+1}^\pm J_n^\pm, \\ [J_n^+, J_m^-] &= \frac{1}{q - q^{-1}} (q^{k(n-m)/2} \psi_{n+m} - q^{k(m-n)/2} \varphi_{n+m}). \end{aligned}$$

Для удобства вычислений нам понадобятся производящие функции этих операторов. Определим производящие функции следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^3 z^{-n-1} &= J^3(z), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^\pm z^{-n-1} = J^\pm(z), \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n z^{-n} &= \psi(z), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n z^{-n} = \varphi(z), \\ \varphi(z) &= K^{-1} \exp \left(-(q - q^{-1}) \sum_{n < 0} J_n^3 z^{-n} \right), \\ \psi(z) &= K \exp \left((q - q^{-1}) \sum_{n > 0} J_n^3 z^{-n} \right). \end{aligned}$$

Тогда для производящих функций получим перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(z)\varphi(w) &= \varphi(w)\varphi(z), \quad \psi(z)\psi(w) = \psi(w)\psi(z), \\ \varphi(z)\psi(w) &= \frac{(q^2 z - q^k w)(z - q^{-k+2} w)}{(z - q^{k+2} w)(q^2 z - q^{-k} w)} \psi(w)\varphi(z), \\ \psi(z)J^\pm(w) &= \left(\frac{q^2 z - q^{\mp k/2} w}{z - q^{2 \mp k/2} w} \right)^{\pm 1} J^\pm(w)\psi(z), \\ \varphi(z)J^\pm(w) &= \left(\frac{q^2 w - q^{\mp k/2} z}{w - q^{2 \mp k/2} z} \right)^{\mp 1} J^\pm(w)\varphi(z), \\ J^\pm(z)J^\pm(w) &= \frac{q^{\pm 2} z - w}{z - q^{\pm 2} w} J^\pm(w)J^\pm(z), \\ J^+(z)J^-(w) &\sim \frac{1}{q - q^{-1}} \left(\frac{1}{(z - q^k w)w} \psi(q^{k/2} w) - \frac{1}{(z - q^{-k} w)w} \varphi(q^{-k/2} w) \right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для упрощения вычислений будем пользоваться представлением $U_q(\widehat{sl}_2)$ через свободные поля [8]. В пределе $q \rightarrow 1$ оно переходит в обычное представление Вакимото для

алгебры токов [9]. Пусть $a_n, b_n, c_n, Q_a, Q_b, Q_c$ ($n \in \mathbb{Z}$) – набор операторов, удовлетворяющий коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [a_n, a_m] &= \delta_{n+m,0} \frac{[2n][k+2)n]}{n}, & [\tilde{a}_0, Q_a] &= 2(k+2), \\ [b_n, b_m] &= -\delta_{n+m,0} \frac{[2n][2n]}{n}, & [\tilde{b}_0, Q_b] &= -4, \\ [c_n, c_m] &= \delta_{n+m,0} \frac{[2n][2n]}{n}, & [\tilde{c}_0, Q_c] &= 4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{q - q^{-1}}{2 \log q} a_0, & \tilde{b}_0 &= \frac{q - q^{-1}}{2 \log q} b_0, & \tilde{c}_0 &= \frac{q - q^{-1}}{2 \log q} c_0, \\ [m] &= \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Определим поле $a(N | z, \alpha)$ следующим образом:

$$a(N | z, \alpha) = - \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{[Nn]} z^{-n} q^{|n|\alpha} + \frac{\tilde{a}_0}{N} \log z + \frac{Q_a}{N}.$$

Подобным же образом определим поля $b(N | z, \alpha)$ и $c(N | z, \alpha)$. Тогда необходимые нам в дальнейшем токи $J^\pm(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ могут быть выражены через экспоненты от свободных полей $a(N | z, \alpha)$, $b(N | z, \alpha)$ и $c(N | z, \alpha)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J^+(z) &= - \frac{1}{(q - q^{-1})z} \left[: \exp \{ -b(2 | q^{-k-2}z, 1) - c(2 | q^{-k-1}z, 0) \} : - \right. \\ &\quad \left. - : \exp \{ -b(2 | q^{-k-2}z, 1) - c(2 | q^{-k-3}z, 0) \} : \right], \\ J^-(z) &= \frac{1}{(q - q^{-1})z} \left[: \exp \{ a(k+2 | q^kz, -(k+2)/2) - a(k+2 | q^{-2}z, (k+2)/2) + \right. \\ &\quad \left. + b(2 | z, -1) + c(2 | q^{-1}z, 0) \} : - \right. \\ &\quad \left. - : \exp \{ a(k+2 | q^{-k-4}z, -(k+2)/2) - a(k+2 | q^{-2}z, (k+2)/2) + \right. \\ &\quad \left. + b(2 | q^{-2k-4}z, -1) + c(2 | q^{-2k-3}z, 0) \} : \right], \tag{1.2} \\ \psi(z) &= : \exp \{ a(k+2 | q^{k/2}z, -(k+2)/2) - a(k+2 | q^{-k/2-2}z, (k+2)/2) + \\ &\quad + b(2 | q^{-k/2}z, -1) - b(2 | q^{-k/2-2}z, 1) \} :, \\ \varphi(z) &= : \exp \{ a(k+2 | q^{-k/2-4}z, -(k+2)/2) - a(k+2 | q^{k/2-2}z, (k+2)/2) + \\ &\quad + b(2 | q^{-3k/2-4}z, -1) - b(2 | q^{-3k/2-2}z, 1) \} :. \end{aligned}$$

Легко проверить с помощью выражения для токов, что перестановочные соотношения (1.1) будут выполнены. Точки в формуле (1.2) и далее обозначают нормальное упорядочение.

2. НАЛОЖЕНИЕ СВЯЗИ

Перестановочные соотношения (1.1) для тока $J^+(z)$ не позволяют наложить на него связь $J^+(z) = 1$, как это делалось в недеформированном случае [5, 6]. Чтобы избежать этой трудности, поступим следующим образом. Домножим выражение для тока $J^+(z)$ на некоторую функцию от генераторов квантового оператора $J^3(z)$ таким образом, чтобы полученный в результате ток $I^+(z)$ удовлетворял соотношению

$$I^+(z)I^+(w) = I^+(w)I^+(z). \quad (2.1)$$

Теперь мы уже можем накладывать связь $I^+(z) = 1$ непротиворечивым образом. Легко показать, что соотношению (2.1) удовлетворяет ток

$$I^+(z) = J^+(z)\varphi^{-1/2}(q^{k/2}z). \quad (2.2)$$

Выбор (2.2) не является единственным, возможно также выражение вида

$$I^{+'}(z) = J^+(z)\psi^{-1/2}(q^{-k/2}z). \quad (2.3)$$

3. РЕДУКЦИЯ НА ЯЗЫКЕ СКРИНИНГОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно, что осцилляторное представление (1.2) имеет скрининговый ток [8] вида

$$J^S(z) = - : \left[{}_1\partial_z \exp\{-c(2 \mid q^{-k-2}z, 0)\} \right] \times \\ \times \exp\{-b(2 \mid q^{-k-2}z, -1) - a(k+2 \mid q^{-2}z, -(k+2)/2)\} : .$$

Здесь мы использовали обозначение

$${}_n\partial_z f(z) = \frac{f(q^n z) - f(q^{-n} z)}{(q - q^{-1})z}.$$

Этот ток с использованием формулы для $J(z)$ в (1.2) может быть переписан следующим образом:

$$J^S(z) = J^+(z) \exp\{b(2 \mid q^{-k-2}z, 1) - b(2 \mid q^{-k-2}z, -1) - a(k+2 \mid q^{-2}z, -(k+2)/2)\}.$$

Учитывая связь $I^+(z) = 1$, получим

$$J^S(z) = \varphi^{1/2}(q^{k/2}z) \times \\ \times \exp\left\{b(2 \mid q^{-k-2}z, 1) - b(2 \mid q^{-k-2}z, -1) - a(k+2 \mid q^{-2}z, -(k+2)/2)\right\}.$$

С помощью бозонного представления легко получить перестановочные соотношения для скрининговых токов (после редукции)

$$J^S(z)J^S(w) = - \left(\frac{z}{w}\right)^{\frac{2}{k+2}+1} \frac{\Theta_q\left(q^{-2}\frac{w}{z}\right)}{\Theta_q\left(q^{-2}\frac{z}{w}\right)} J^S(w)J^S(z).$$

Здесь мы ввели Θ -функцию по следующему правилу [8, 10]:

$$\Theta_q(u) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{(2k+4)n} u) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{(2k+4)n} u^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{(2k+4)n}).$$

Используя квазипериодичность функции $\Theta_q(u)$:

$$\Theta_q(q^{-2}u) = uq^{k+2}\Theta_q(q^{2k+2}u),$$

получим, что

$$J^S(z)J^S(w) = -\left(\frac{w}{z}\right)^{-\frac{2}{k+2}+1} \frac{\Theta_q\left(q^{2k+2}\frac{w}{z}\right)}{\Theta_q\left(q^{2k+2}\frac{z}{w}\right)} J^S(w)J^S(z). \quad (3.1)$$

Таким образом, мы видим, что перестановочные соотношения скрининговых операторов (3.1) совпадают с перестановочными соотношениями для скрининговых операторов деформированной алгебры Вирасоро [11].

Аналогичные рассуждения и вычисления можно проделать для связи $I^{+'}(z) = 1$ с током (2.3) и также получить соотношение (3.1).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ БРСТ-ИНВАРИАНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Редукцию, связанную с условием $I^+(z) = 1$, будем проводить, используя БРСТ-процедуру [5]. Следует, однако, заметить, что существует одна особенность выполнения редукции в деформированном случае: алгебра связей не определяется спариванием полей. Рассмотрим это подробнее. Связь в деформированном случае генерируется полем $I^+(z)$, и, для того чтобы вычислить алгебру связей, мы должны просто вычислить коммутатор фурье-компонент тока $I^+(z)$. Однако этот коммутатор не входит в определение квантовой группы и не определяется спариванием в бозонном представлении. Введем

$$I_n^+ = \oint I^+(z)z^{-n-1}dz.$$

Используя правила бозонизации, предложенные в [12] для $U_q(\widehat{sl}_2)$, в случае $k = 1$ мы обнаружим, что $[I_n^+, I_m^+] = 0$. Однако, если мы будем использовать правила бозонизации, предложенные в [8] для произвольного k , то, как можно легко показать, спаривание $I^+(z)I^+(w)$ имеет ветвление и поэтому коммутатор не определяется таким спариванием. Тем не менее можно написать оператор $Q_{\text{БРСТ}}$ и сделать его хорошо определенным и нильпотентным. Для этого необходимо деформировать бозонизацию фермионных полей. Тогда такой хорошо определенный оператор $Q_{\text{БРСТ}}$, действуя на тензорном произведении деформированной алгебры токов и неприводимого представления алгебры Клиффорда (точнее, некоторой ее деформации), будет вырезать в нем q -деформированную алгебру Вирасоро.

Введем систему фермионных духов $\Psi(z)$, $\Psi^*(z)$, фурье-компоненты которых образуют алгебру Клиффорда. Нильпотентный БРСТ-оператор в нашем случае имеет вид

$$Q_{\text{БРСТ}} = \int I^+(z)\Psi^*(z)dz + \int \Psi^*(z)dz. \quad (4.1)$$

БРСТ-оператор является дифференциалом, действующим в тензорном произведении $M \otimes A$ ($M = U_q(\widehat{sl}_2)|0\rangle$ – вакуумное представление со старшим весом, A – неприводимое представление алгебры Клиффорда, более точно, некоторой ее деформации, что будет определено ниже). Когомологии этого БРСТ-оператора являются инвариантами нашей редукции. Технически удобнее искать когомологии с помощью когомологий двойного комплекса с операторами

$$Q_1 = \int I^+(z) \Psi^*(z) dz, \quad Q_2 = \int \Psi^*(z) dz.$$

Вычислим сначала когомологии оператора Q_1 . Используя связи в когомологиях оператора Q_1 , отберем из них когомологии оператора Q_2 . Такая процедура проделывалась в недеформированном случае в статье [5]. Мы будем предполагать, что параметр деформации α ($\alpha = \log q$) является малым. При $\alpha \ll 1$ не происходит изменения структуры когомологий по сравнению с недеформированным случаем (в отличие от $q^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$), т.е. при малой деформации пространство когомологий может только уменьшиться из-за деформации. Найденные нами когомологии свидетельствуют о том, что оно сохранится.

Для вычисления оператора когомологий Q_1 удобно бозонизировать фермионные духи $\Psi(z)$, $\Psi^*(z)$. Введем бозонное поле $\phi(z)$ со спариванием

$$\phi(z)\phi(w) \sim \frac{1}{2}(\log(z - q^2 w) + \log(z - q^{-2} w)). \quad (4.2)$$

Тогда выражение для фермионов в бозонном представлении имеет вид

$$\Psi(z) = : \exp \phi(z) :, \quad \Psi^*(z) = : \exp \{-\phi(z)\} :. \quad (4.3)$$

Выражение (4.2) является деформированным в отличие от случая $q = 1$.

Легко получить, используя представление свободных полей, что

$$I^+(z)I^+(w) = \frac{:S(z, w):}{(z - q^2 w)^{1/2}(z - q^{-2} w)^{1/2}}, \quad (4.4)$$

где $:S(z, w):$ – нормально-упорядоченная операторнозначная функция, не имеющая сингулярностей при $z \rightarrow q^{\pm 2} w$. Деформированное спаривание (4.2) компенсирует знаменатель выражения (4.4), т.е.

$$I(z)_{\text{БРСТ}} I(w)_{\text{БРСТ}} \sim \text{reg},$$

где мы ввели обозначение $I(z)_{\text{БРСТ}} = I^+(z) \Psi^*(z)$. Здесь рег означает отсутствие сингулярных спариваний.

Поля $\Psi(z)$, $\Psi^*(z)$, как следует из (4.3) и (4.2), снова подчиняются статистике Ферми:

$$\Psi^*(z)\Psi^*(w) = -\Psi^*(w)\Psi^*(z), \quad \Psi(z)\Psi^*(w) = -\Psi^*(w)\Psi(z), \quad z \neq w.$$

Легко также заметить, что условие (4.2) означает выполнение следующего свойства:

$$\Psi^*(q^{\pm 2} z)\Psi^*(z) = 0.$$

С помощью правил бозонизации (4.2), (4.3) можно показать, что ядру оператора Q_1 принадлежат элементы

$$h_{a,b}(z) = \left(\prod_{n=0}^{\infty} \psi^a(q^{k/2+2kn}z) \right) \varphi^{b/2}(q^{-k/2}z) \Psi^*(q^{-k}z), \quad (4.5)$$

где a, b принимают значения ± 1 (далее будем сокращенно писать $h_{\pm,\pm}(z)$, $h_{\mp,\pm}(z)$ и т.п.). Выражение (4.5) в бозонном представлении имеет вид

$$h_{a,b}(z) = : \exp \left\{ \sum_{n \neq 0} l_n z^n \right\} :. \quad (4.6)$$

Мы должны фиксировать положительные и отрицательные моды $l_n^{a,b}$ независимо; следовательно, для того чтобы имело место вложение $h_{a,b}(z) \in \text{Ker } Q_1$, должны выполняться два условия:

$$I_{\text{БРСТ}}(z)h_{a,b}(w) \sim \text{reg}, \quad h_{a,b}(z)I_{\text{БРСТ}}(w) \sim \text{reg}. \quad (4.7)$$

Спаривание (4.7) понимается в бозонном представлении. Таким образом, мы построили когомологии оператора Q_1 .

5. СВЯЗИ В БРСТ-КОГОМОЛОГИЯХ ОПЕРАТОРА Q_1

Не все когомологии $h_{a,b}(z)$ являются независимыми. Между ними существуют связи. Легко получить следующее соотношение:

$$[Q_1, \chi(w)] = h_{-,+}(w) + h_{-,-}(q^{2k}w), \quad (5.1)$$

где мы ввели обозначение

$$\chi(w) = J^-(w) \prod_{n=0}^{\infty} \psi(q^{k/2+2kn}w).$$

Произведения операторов, входящие во все выражения этого раздела (включая Q_1), нормально упорядочены относительно бозонного представления (1.2) и (4.2). Это не относится только к формулам (5.2), (5.6) (см. ниже).

Домножим справа соотношение (5.1) на

$$M(w) = h_{+,+}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,-}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,+}^2(w) - \\ - h_{+,-}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,+}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,-}^2(q^{2k}w).$$

Учтем, что выполнены тождества

$$h_{-,-}(w)h_{-,+}(q^2w) = 0, \quad h_{-,+}(w)h_{-,-}(q^{-2}w) = 0. \quad (5.2)$$

Они являются следствием деформации бозонов в представлении полей $\Psi^*(w)$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} & h_{-,-}(q^{2k}w)h_{+,+}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,-}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,+}^2(w) - \\ & - h_{-,+}(w)h_{+,-}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,+}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,-}^2(q^{2k}w) = [Q_1, \chi(w)]M(w). \end{aligned} \quad (5.3)$$

$M(w)$ может быть внесено под знак коммутатора в выражении (5.3). Очевидно также, что выполнены следующие тождества:

$$\begin{aligned} \Psi^*(q^{-k-2}w) &= h_{+,+}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,-}^{1/2}(q^{-2}w), \\ \Psi^*(q^{k+2}w) &= h_{+,-}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,+}^{1/2}(q^{2k+2}w). \end{aligned}$$

Все выражения, которые входят в левую часть (5.3), являются элементами когомологии оператора Q_1 , поэтому мы можем приравнять нулю точную форму, т.е. правую часть (5.3). В результате получим соотношение, которое позволяет выразить положительные моды в экспоненте при бозонизации $\Psi^*(z)$ через положительные моды $h_{a,b}(z)$ в смысле разложения (4.6). Отрицательные моды, как легко видеть, этой связью не фиксируются. Таким образом,

$$\Psi^*(q^{-k-2}w)h_{-,-}(q^{2k}w)h_{-,+}^2(w) - \Psi^*(q^{k+2}w)h_{-,+}(w)h_{-,-}^2(q^{2k}w) = 0. \quad (5.4)$$

Решение уравнения (5.4) относительно $\Psi^*(w)$ имеет вид

$$\Psi^*(w) = \prod_{n=0}^{\infty} h_{-,-}(q^{2k+(2k+4)n}w)h_{-,+}(q^{-(2k+4)(n+1)}w). \quad (5.5)$$

Здесь мы использовали то, что решением уравнения

$$A(w)K(w) = B(w)K(Qw)$$

является

$$K(w) = \prod_{n=0}^{\infty} B(Q^n w)A(Q^{-1-n}).$$

Соотношение (5.5) определяет положительные моды в экспоненте при бозонизации $\Psi^*(z)$. Аналогичным образом мы можем фиксировать отрицательные моды $\Psi^*(w)$. Для этого рассмотрим выражение (5.1), записанное в виде

$$-[\chi(w), Q_1] = h_{-,+}(w) + h_{-,-}(q^{2k}w).$$

Домножим его слева на

$$\begin{aligned} N(w) &= h_{+,+}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,-}^{1/2}(q^{-2}w)h_{-,-}(q^{-2}w) - \\ &- h_{+,-}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,+}^{1/2}(q^{2k+2}w)h_{-,+}(q^{2k+2}w). \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$h_{-,-}(q^{-2}w)h_{-,+}(w) = 0, \quad h_{-,+}(q^2w)h_{-,-}(w) = 0, \quad (5.6)$$

фиксируем отрицательные моды в виде

$$\begin{aligned} \Psi^*(w) = & \prod_{n=0}^{\infty} h_{-,+}(q^{(2k+4)n}w)h_{-,+}(q^{2k+2+(2k+4)n}w) \times \\ & \times h_{-,-}(q^{2k-(2k+4)(n+1)}w)h_{-,-}(q^{-2k-(2k+4)(n+1)}w). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, мы использовали связи в когомологиях оператора Q_1 , чтобы построить положительные и отрицательные моды в экспоненте скрининговых операторов. Это необходимо при вычислении перестановочных соотношений для $\Psi^*(z)$.

6. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ $\Psi^*(z)$

При редукции $\Psi^*(z)$ -фермионные операторы со стандартными операторными разложениями становятся зависимыми от элементов когомологии оператора Q_1 . Эти связи мы рассмотрели в разделе 5. Фермионные операторы превращаются в локальные плотности скрининговых операторов, а их операторные разложения определяются связями и операторными разложениями когомологии оператора Q_1 . Используя (5.5) и (5.7), вычислим следующее операторное разложение:

$$\Psi^*(z)\Psi^*(w) = L\left(\frac{w}{z}\right) : \Psi^*(z)\Psi^*(w) :,$$

где

$$u = \frac{w}{z}, \quad L(u) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \frac{(1-q^{2n})(1+q^{2kn+2n})}{(1-q^{2(k+2)n})}\right\}. \quad (6.1)$$

Введем операторы h_n с коммутационными соотношениями

$$[h_n, h_m] = n\delta_{n+m,0} \frac{(1-q^{2n})}{(1-q^{2(k+2)n})}.$$

Тогда положительные и отрицательные моды, стоящие в экспоненте $\Psi^*(z)$ в бозонном представлении в формулах (5.5) и (5.7), могут быть легко выражены через соответственно положительные и отрицательные моды операторов h_n . Запишем скрининговые операторы $\Psi^*(z)$, используя введенные операторы h_n :

$$\Psi^*(z) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{-n}z^n}{n}\right\} \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} (1+q^{(2k+2)n}) \frac{h_n z^{-n}}{n}\right\}. \quad (6.2)$$

Напомним, что $Q_2 = \int \Psi^*(z) dz$, где Ψ^* определяется через вводимые нами поля h_n формулой (6.2).

Перестановочное соотношение для $\Psi^*(z)$, как легко показать используя бозонное представление, имеет вид

$$\Psi^*(z)\Psi^*(w) = -\frac{w}{z} \frac{\Theta_q\left(q^{2k+2}\frac{w}{z}\right)}{\Theta_q\left(q^{2k+2}\frac{z}{w}\right)} \Psi^*(w)\Psi^*(z). \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) есть не что иное, как перестановочное соотношение для локальных плотностей скрининговых операторов деформированной алгебры Вирасоро [11]. Оно отличается от соответствующего выражения в [11] отсутствием в нашем случае нулевых мод, которые не оказывают влияния на вычисление кохомологий оператора Q_2 .

7. КОГОМОЛОГИИ ОПЕРАТОРА Q_2

Вычислим теперь кохомологии оператора Q_2 , используя кохомологии оператора Q_1 и связи, которые мы обнаружили в разделе 6. Таким образом, мы найдем кохомологии $Q_{\text{БРСТ}}$ -оператора (4.1). Фактически задача нахождения кохомологий Q_2 впервые была решена в [4].

Кохомология оператора Q_2 в наших обозначениях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} T(z) &= q^{-(k+1)} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2(k+2)n})}{(1+q^{-2(k+1)n})} \frac{h_{-n}z^n q^{-2(k+2)n} q^{(k+1)n}}{n}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} (1-q^{2(k+2)n}) \frac{h_n z^{-n} q^{-(k+1)n}}{n}\right) + \\ &+ q^{k+1} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2(k+2)n})}{(1+q^{-2(k+1)n})} \frac{h_{-n}z^n q^{-2(k+2)n} q^{-(k+1)n}}{n}\right) \times \\ &\times \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-q^{2(k+2)n}) \frac{h_n z^{-n} q^{(k+1)n}}{n}\right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Алгебра инвариантов также может быть вычислена, и результат имеет вид

$$\begin{aligned} T(z)T(w)f\left(\frac{w}{z}\right) - T(w)T(z)f\left(\frac{z}{w}\right) &= \\ &= -\frac{(1-q^2)(1-q^{-2k-4})}{(1-q^{-2(k+1)})} \left(\delta\left(q^{-2(k+1)}\frac{w}{z}\right) - \delta\left(q^{2(k+1)}\frac{w}{z}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(u) &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u^n \frac{(1-q^{-2(k+2)n})(1-q^{2n})}{(1+q^{-2(k+1)n})}\right\}, \\ \delta(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что редукция алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$, соответствующая наложению связи $I^+(z) = 1$, приводит к q -деформированной алгебре Вирасоро.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная конструкция, по-видимому, может быть обобщена на $U_q(\widehat{sl}_n)$ -случай. Инварианты такой редукции должны давать q -деформации W_n -алгебр.

С помощью БРСТ-процедуры можно, как и в недеформированном случае, пытаться получать сингулярные векторы в представлении q -деформированных W_n -алгебр, используя известные представления алгебры $U_q(\widehat{sl}_n)$.

Автор благодарен Б. Фейгину за привлечение внимания к этой задаче и полезные обсуждения. Особую благодарность автор выражает Э. Копаневу за помощь в подготовке статьи к печати.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-02-17331), Международным научным фондом (грант М6N000), Международной Соросовской программой образования в области точных наук (грант а208-ф), грантом для молодых ученых РАН по фундаментальным и прикладным исследованиям и CRDF Co-operative grants program (Grant RP1-277).

Список литературы

- [1] *B. Feigin, E. Frenkel.* Affine Kač–Moody Algebras at the Critical Level and Gelfand–Dikii Algebras. Preprint Mathematical Sciences Research Institute 04029-91. Berkeley, California, USA, April, 1991.
- [2] *B. Drinfeld.* Quantum Groups. In: Proceedings of International Congress of Mathematicians. Berkeley, California, USA, 1986.
- [3] *E. Frenkel, N. Reshetikhin.* Quantum Affine Algebras and Deformation of the Virasoro and W -algebras. Preprint, q-alg 9505025. Cambridge, USA: Department of Mathematics, Harvard University, 1995.
- [4] *J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake.* A Quantum Deformation of the Virasoro Algebra and the Macdonald Symmetric Functions. Preprint, q-alg 9507034. Cambridge, USA: Department of Mathematics, Harvard University, 1995.
- [5] *B. Feigin, E. Frenkel.* Phys. Lett. B. 1990. V. 246. № 1, 2. P. 75; *B. Kostant, S. Steruberg.* Ann. Phys. 1987. V. 176. P. 49.
- [6] *E. Frenkel.* W -algebras and Langland–Drinfeld Correspondence. Preprint. Cambridge, USA: Harvard University, 1991.
- [7] *В. Г. Дринфельд.* ДАН СССР. 1987. Т. 296. № 1. С. 13.
- [8] *J. Shiraishi.* Phys. Lett. A. 1992. V. 171. P. 243.
- [9] *M. Wakimoto.* Commun. Math. Phys. 1986. V. 104. P. 605.
- [10] *Д. Мамфорд.* Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988.
- [11] *B. Feigin, E. Frenkel.* Quantum W -algebras and elliptic algebras. hep-th 9508009.
- [12] *I. B. Frenkel, N. H. Jing.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1988. V. 85. P. 9373.

Поступила в редакцию 29.IV.1997 г.,
после доработки 11.XI.1997 г.