Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Белёв, Н. А. Тюрин, Псевдоторические структуры
на торических симплектических многообразиях, *ТМФ*,
2013, том 175, номер 2, 147–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:20:41

© 2013 г.

С. А. Белёв*, Н. А. Тюрин*^{†‡}

ПСЕВДТОРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ТОРИЧЕСКИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Доказано существование псевдоторической структуры ранга один на произвольном гладком торическом симплектическом многообразии. В качестве следствия предлагается способ построения нестандартных лагранжевых торов типа Чеканова на произвольных торических многообразиях.

Ключевые слова: симплектическое многообразие, торическое многообразие, псевдоторическая структура, лагранжево подмногообразие.

DOI: 10.4213/tmf8444

1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжева геометрия симплектических многообразий является очень важным предметом как для “чистой” математики, так и для ее приложений в теоретической физике. Каждое симплектическое многообразие допускает существование некоторого достаточно ограниченного типа гладких лагранжевых подмногообразий, и под лагранжевой геометрией симплектического многообразия естественно понимать исследование таких типов. Первые вопросы – какие классы срединных гомологий могут быть представлены гладкими лагранжевыми подмногообразиями, какие топологические типы подмногообразий при этом реализуются (а какие не реализуются) – встраиваются в глобальную задачу классификации лагранжевых подмногообразий с точностью до лагранжевых деформаций или (более специально) с точностью до гамильтоновых изотопий.

Однако решенных вопросов в этой области совсем немного даже для простейших случаев: для проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, рассматриваемой как четырехмерное

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

[†]Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Москва, Россия

[‡]Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия

симплектическое многообразие, в качестве ориентируемых лагранжевых подмногообразий реализуются только торы, гомологичные нулю; известны два типа монотонных лагранжевых торов (торы Клиффорда и Чеканова), не эквивалентных по модулю гамильтоновой изотопии, но отсутствие других типов не установлено. При этом торы Клиффорда естественным образом возникают из торической геометрии. Недавно в работе [1] было замечено, что торы Чеканова можно построить в терминах псевдоторической геометрии, которая является естественным обобщением геометрии торической. Псевдоторические структуры были введены в статье [2] и там же было намечено аналитическое доказательство существования псевдоторической структуры на произвольном гладком торическом многообразии.

Целью настоящей работы является доказательство существования псевдоторической структуры на произвольном гладком компактном торическом многообразии другим, более алгебраическим, методом. А именно, мы в существенной мере пользуемся тем фактом, что на любом гладком торическом симплектическом многообразии имеется торическая комплексная структура, т. е. оно является торическим кэлеровым многообразием, однозначно задающимся своим выпуклым многогранником [3]. Таким образом, можно воспользоваться некоторыми простейшими методами алгебраической геометрии. Общая ссылка на все такие стандартные конструкции – это монография [4].

В качестве важного следствия мы предлагаем конструкцию нестандартного лагранжева тора на произвольном гладком торическом многообразии; этот тор по аналогии со случаем проективной плоскости мы называем тором Чеканова. При этом каждому монотонному стандартному тору Лиувилля можно сопоставить монотонный тор Чеканова. Мы высказываем гипотезу, что два этих монотонных тора не являются гамильтоново изотопными. Для лагранжевой геометрии торических многообразий это означает, что мы имеем кандидата на роль нового нетривиального элемента в категории монотонных лагранжевых торов.

2. ПСЕВДТОРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА ОДИН

Вместо напоминания определения псевдоторической структуры, которое можно найти в работах [1], [2], проиллюстрируем разницу между торической и псевдоторическими геометриями на идейном уровне с помощью следующей диаграммы:

Комплексным аналогом вещественной функции Морса является пучок Лефшеца (эта мысль неоднократно высказывалась Арнольдом, Дональдсоном и другими) – комплексное (или симплектическое) отображение в пополненное комплексное пространство (классически – в сферу Римана). Вопрос состоит в том, как связать привычные вещественные данные и новые комплексные, когда мы в наборе первых интегралов заменяем один вещественный интеграл на новый комплексный, другими словами, что означает перестановочность вещественной функции и пучка Лефшеца? Мы предлагаем следующее новое коммутационное соотношение: пучок $\{Q_p\}$ коммутирует с вещественной функцией f , если гамильтоново векторное поле X_f последней параллельно каждому элементу Q_p пучка в каждой точке. Геометрически (или динамически) это означает, что гамильтонов поток, порождаемый функцией f , сохраняет “множества уровня” пучка Лефшеца, и это есть в точности то же условие, что и для вещественных функций!

Итак, пусть (X, ω) – гладкое компактное симплектическое торическое многообразие вещественной размерности $2n$ и $f_1, \dots, f_n$ – множество первых интегралов, которые мы выбираем так, чтобы каждая f_i была функцией Морса на X . При этом мы не требуем, чтобы f_i были отображениями момента для гамильтонова действия некоторого одномерного подтора в T^n . То есть в вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ может быть выбран другой базис, состоящий из отображений момента для одномерных подторов, но нам нужна принадлежность f_i множеству функций Морса, а не замкнутость орбит гамильтонова действия.

Тогда множество вырождения

$$\Delta(f_1, \dots, f_n) = \{df_1 \wedge \dots \wedge df_n = 0\} \subset X$$

состоит из объединения симплектических подмногообразий $D_1, \dots, D_d$ с нормальными пересечениями. Отображение действия

$$F_{\text{act}} = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow P_X \subset \mathbb{R}^n,$$

переводящее X в выпуклый многогранник P_X , отображает компоненты D_i в грани N_i многогранника P_X , при этом $(D_i, f_1|_{D_i}, \dots, f_n|_{D_i})$ снова дает интегрируемую систему, в которой система функций переопределена – они связаны линейным соотношением, в точности совпадающим с уравнением грани N_i , поэтому первые интегралы этой системы получаются введением одного линейного условия на пространстве $\mathbb{R}\langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Каждая функция f_j , $j = 1, \dots, n$, сохраняет своим гамильтоновым действием подмногообразие D_i , т.е. набор гамильтоновых векторных полей $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$ в каждой точке $p \in D_i$ параллелен касательному пространству $T_p D_i$.

Введем торическую интегрируемую комплексную структуру I на X и превратим X в кэлерово многообразие – согласно результату Дельдана это всегда можно сделать [3]. Тогда D_i становятся комплексными подмногообразиями (X, ω, I) , причем сумма классов когомологий

$$\text{P. D.}[D] = \sum_{i=1}^d \text{P. D.}[D_i] = K_X^* \in H^2(X, \mathbb{Z}),$$

двойственных по Пуанкаре классам гомологий подмногообразий D_i , представляет антиканонический класс (X, ω, I) . Так как X односвязно, для каждого D_i существует единственное голоморфное расслоение $L_i \rightarrow X$ такое, что первый класс Черна $c_1(L_i) = \text{P.D.}[D_i] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Таким образом, дивизор D представляет антиканоническое расслоение. Мы будем называть D граничным дивизором, поскольку отображение действия переводит его в границу ∂P_X выпуклого многогранника P_X .

Из гладкости многообразия X следует, что ранг группы $H^2(X, \mathbb{Z}) = h^2$ строго меньше числа граней d , таким образом, существует (и не единственное) выражение вида

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i [D_i] = 0 \quad \text{в когомологиях} \quad H^2(X, \mathbb{Z}),$$

причем из эффективности всех $[D_i]$ и $[D] = K_X^*$ в целом вытекает, что целочисленные коэффициенты λ_i имеют разные знаки. Выражений такого вида существует достаточно много, но мы выберем из них такое, чтобы ни один из коэффициентов λ_i не был равен нулю.

ПРИМЕР 1. Граничный дивизор для стандартного торического действия на проективной плоскости состоит из трех прямых, причем без ограничения общности можно считать, что эти прямые задаются уравнениями $z_i = 0$ в подходящих однородных координатах $[z_0 : z_1 : z_2]$. Тогда в качестве простейшего набора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ можно взять $(1, -1, 0)$, однако нам в этом случае потребуется набор $(1, 1, -2)$, удовлетворяющий условию нетривиальности всех λ_i .

Зафиксируем требуемый набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ и разобьем сумму как

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i [D_i] = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i [D_i] + \sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j [D_j],$$

обозначив соответствующие подсуммы через

$$D_+ = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i D_i, \quad D_- = \sum_{\lambda_j < 0} |\lambda_j| D_j,$$

где сумма эффективных дивизоров берется в алгебро-геометрическом смысле [4]. По построению дивизоры D_+ и D_- представляют одно и то же голоморфное линейное расслоение

$$L = \bigotimes_{\lambda_i > 0} L_i^{\otimes \lambda_i} = \bigotimes_{\lambda_j < 0} L_j^{\otimes |\lambda_j|},$$

кроме того, оба этих дивизора составлены из компонент D_i граничного дивизора D , поэтому каждый из них инвариантен относительно гамильтонова действия каждой функции f_i .

Рассмотрим теперь полный линейный ряд $|L|$, задаваемый голоморфным расслоением $L \rightarrow X$, т. е. проективное пространство

$$|L| = \mathbb{P}H^0(X, L) = \mathbb{CP}^k, \quad k = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L) - 1,$$

точками которого являются дивизоры, представляющиеся нулями сечений расслоения L . Выбор эрмитовой структуры на линейном расслоении L доставляет стандартную кэлерову структуру на проективном пространстве $|L|$ и одновременно позволяет поднять кэлерово действие вещественного тора T^n с торической базы (X, ω, I) до вещественного действия на проективном пространстве $|L|$, сохраняющего кэлерову структуру. Следовательно, мы имеем гомоморфизм групп кэлеровых изометрий торического многообразия X и проективного пространства $|L|$ и, следовательно, гомоморфизм алгебр Ли векторных полей, сохраняющих кэлеровы структуры на X и на $|L|$ соответственно. Но первая из алгебр содержит гамильтоновы векторные поля $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$, а вторая состоит из гамильтоновых векторных полей символов Берже, которые образуют вещественную алгебру Ли $C_q^\infty(|L|, \mathbb{R})$ (см. работы [5], [6]).

Таким образом, в пространстве $C_q^\infty(|L|, \mathbb{R})$ корректно определен с точностью до прибавления констант набор функций $F_1, \dots, F_n$ вида

$$F_i = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_{i,j} |z_j|^2}{\sum_{j=0}^k |z_j|^2}, \quad \alpha_{i,j} \in \mathbb{R},$$

где $[z_0 : \dots : z_k]$ – подходящие однородные координаты на $|L|$, а $\alpha_{i,j}$ – некоторые вещественные константы (см. работы [5], [6]). Из свойств таких функций (см. там же) следует, что они имеют общий набор критических точек в вершинах базисного тетраэдра, составленного из проективных гиперплоскостей вида $H_i = \{z_i = 0\}$. При этом для каждой функции F_i может быть индивидуальное критическое множество, однако компоненты этого множества, имеющие положительную размерность, устроены очень просто [5]: каждая компонента есть проективное подпространство, натянутое на вершины тетраэдра с одинаковыми критическими значениями. Другими словами, если, например, в наборе $(\alpha_{i,0}, \dots, \alpha_{i,k})$ какие-то два числа совпадают, то множество критических точек функции F_i содержит как минимум проективную прямую, натянутую на две соответствующие вершины тетраэдра.

Далее, построенные нами выше дивизоры D_+ , D_- по определению принадлежат полной линейной системе $|L|$ и по построению инвариантны относительно гамильтонова действия каждой f_i . Отсюда видно, что соответствующие им точки p_+ , p_- проективного пространства $|L|$ инвариантны относительно гамильтонова действия каждой функции F_i , т.е. являются критическими для всех F_i . При этом мы не утверждаем, что эти точки обязательно лежат в вершинах базисного тетраэдра.

Проведем проективную прямую $\langle p_+, p_- \rangle \subset |L|$ и покажем, что наложение одного нетривиального линейного условия выделяет в вещественном пространстве $\mathbb{R}\langle F_1, \dots, F_n \rangle$ гиперплоскость функций, для каждой из которых проективная прямая $\langle p_+, p_- \rangle$ содержится в множестве ее критических точек. Нетривиальность этого условия проистекает из того, что все точки проективной прямой $\langle p_+, p_- \rangle$ сами по себе не могут быть критическими для всех функций $F_1, \dots, F_n$ одновременно. В самом деле, если это так, то для любого дивизора $D(p) \subset X$, который представляет точку $p \in \langle p_+, p_- \rangle \subset |L|$, одновременно все гамильтоновы векторные поля $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$ должны быть параллельны его касательному пространству в любой точке. Но общий дивизор $D(p)$ проходит через общую точку многообразия X , в этой точке его касательное пространство выделяет вещественное $2(n-1)$ -мерное подпространство,

которое не может содержать более чем $n - 1$ попарно симплектически ортогональных линейно независимых векторов, и мы приходим к противоречию с тем, что наши первые интегралы $f_1, \dots, f_n$ независимы почти всюду на X .

Нетрудно заметить, что само необходимое условие имеет очень простой вид: $F_i(p_+) = F_i(p_-)$ для любого i , и это дает одно линейное условие для матрицы $A_{i,j} = (\alpha_{i,j})$. Вследствие линейности отображения $C_q^\infty(X, \mathbb{R}) \rightarrow C_q^\infty(|L|, \mathbb{R})$ мы можем поднять это линейное соотношение в $\mathbb{R}\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ и получить одно линейное соотношение для набора первых интегралов $(f_1, \dots, f_n)$. Выберем в гиперплоскости, задаваемой этим линейным соотношением, набор базисных элементов $f'_1, \dots, f'_{n-1}$.

Подведем итог наших рассуждений. Мы построили пучок дивизоров $\langle D_+, D_- \rangle$, базисное множество $B = D_+ \cap D_-$ которого при отображении действия переходит внутрь множества $\partial(\partial P_X)$. Этот пучок определяет комплексное отображение

$$\psi_D: (X \setminus B) \rightarrow \mathbb{CP}^1.$$

Общий элемент пучка

$$D(p) = \overline{\psi_D^{-1}(p)} = \psi_D^{-1}(p) \cup B, \quad p \neq [1:0], \quad p \neq [0:1],$$

является гладким вне базисного множества B . Кроме того, мы выделили из набора первых интегралов $(f_1, \dots, f_n)$ поднабор $(f'_1, \dots, f'_{n-1})$ коммутирующих интегралов, гамильтоновы векторные поля которых сохраняют каждый элемент пучка $D(p) \in \langle D_+, D_- \rangle$. Так как пучок комплексный, сложное условие согласования (9) из определения 1 работы [2] выполнено автоматически (см. замечание сразу после определения 1 в статье [2]), и таким образом мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое гладкое компактное торическое многообразие обладает псевдоторической структурой ранга один.*

ПРИМЕР 2. Применим схему рассуждений, представленную выше, в случае торической поверхности дель Пеццо $\mathbb{CP}_3^2$, т. е. проективной плоскости, раздутой в трех точках. Граничный дивизор D состоит из шести компонент; группа вторых когомологий есть прямое произведение

$$H^2(\mathbb{CP}_3^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot h \times \mathbb{Z} \cdot e_1 \times \mathbb{Z} \cdot e_2 \times \mathbb{Z} \cdot e_3,$$

где h — образующая группы когомологий проективной плоскости, а e_i — классы исключительных дивизоров. Классы компонент граничного дивизора таковы:

$$[D_1] = h - e_1 - e_2, \quad [D_3] = h - e_2 - e_3, \quad [D_5] = h - e_1 - e_3, \quad [D_{2k}] = e_k$$

с точностью до перенумерации, откуда видно, что подходящей комбинацией будет $(\lambda_1, \dots, \lambda_6) = (1, -1, -2, -1, 1, 2)$, и расслоение L определяется своим первым классом Черна, равным $c_1(L) = 2h - e_1 - e_2 \in H^2(\mathbb{CP}_3^2, \mathbb{Z})$. Полный линейный ряд $|L|$ представляется линейным рядом квадратик на $\mathbb{CP}^2$, проходящих через две базисные точки, и можно видеть, что получаемая при этом псевдоторическая структура в точности совпадает с построенной в работе [1]. Нетрудно заметить при этом, что

набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ может быть циклически преобразован, так как классы исключительных дивизоров входят в вычисления симметричным образом.

Далее, существуют и другие наборы $(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$, подходящие для построения псевдоторической структуры, однако все они индуцируются псевдоторическими структурами на проективной плоскости. В самом деле, образующая h входит в выражения для $[D_1]$, $[D_3]$ и $[D_5]$, откуда следует, что $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0$. Пусть $\lambda_1 = x$, $\lambda_5 = y$, тогда $\lambda_3 = -x - y$. При этом получаем

$$x(h - e_1 - e_2) + y(h - e_2 - e_3) - (x + y)(h - e_1 - e_3) + \lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_3 + \lambda_6 e_1 = 0,$$

откуда $\lambda_2 = x + y$, $\lambda_4 = -x$, $\lambda_6 = -y$. Но $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$ задают на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ псевдоторическую структуру с пучком дивизоров $\{\alpha z_0^{\lambda_1} z_1^{\lambda_3} = \beta z_2^{-\lambda_5}\}$, базисное множество которого содержит точки раздутия, и соответствующий пучок на $\mathbb{CP}_3^2$ есть поднятие этого пучка с проективной плоскости. Так что мы снова получаем связь структур на исходной плоскости и на раздутии, как и в работе [1].

Представленная выше явная конструкция псевдоторической структуры показывает, как можно описать множество различных псевдоторических структур на данном торическом многообразии. А именно, псевдоторическая структура задается целочисленным набором $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$; если существуют два разных набора $\{\lambda_i\}$ и $\{\lambda'_i\}$, то любая их целочисленная линейная комбинация снова задает псевдоторическую структуру. Таким образом, имеется целочисленная подрешетка $\mathbb{Z}^d$, из которой правильно брать в качестве порождающих псевдоторические структуры только примитивные векторы – кратные наборы будут давать кратные псевдоторические структуры, не представляющие отдельного интереса. Ранг подрешетки не меньше $d - n$; множество подходящих примитивных векторов мы будем обозначать через $\Lambda_{\text{pst}} \subset \mathbb{Z}^d$, оно и будет параметризовать множество псевдоторических структур на торическом многообразии X .

3. ПСЕВДТОРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ЛАГРАНЖЕВЫ ТОРЫ

Исследуем построенную выше псевдоторическую структуру на X , состоящую из набора коммутирующих вещественных интегралов $(f'_1, \dots, f'_{n-1})$ и пучка дивизоров $\langle D_+, D_- \rangle \subset |L|$, каждый элемент которого инвариантен относительно гамильтонова действия каждого вещественного интеграла f'_i .

Напомним, что пучок дивизоров $\langle D_+, D_- \rangle$ имеет естественную параметризацию проективной прямой с однородными координатами $[w_0 : w_1]$. Пусть голоморфные сечения $s_{\pm} \in H^0(X, L)$ имеют в качестве нулей дивизоры $D_{\pm}$ соответственно, тогда $D(p = [w_0 : w_1])$ есть множество нулей сечения $s(p) = w_0 s_+ + w_1 s_- \in H^0(X, L)$. Замена сечений $s_{\pm}$ на пропорциональные меняет однородные координаты, но при этом северному и южному полюсам проективной прямой $\mathbb{CP}_w^1$ (которые соответствуют координатам $[1 : 0]$ и $[0 : 1]$) всегда отвечают дивизоры D_+ и D_- соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Построенная псевдоторическая структура $(f'_1, \dots, f'_{n-1}, \psi_D)$ на X является регулярной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность подразумевает гладкость всех дивизоров $D(p)$, кроме $D_{\pm}$, вне базисного множества B . Исключим из X объединение $D_+ \cup D_-$. Носителем этого объединения является граничный дивизор D . Вне этого дивизора на $X \setminus D$ гамильтоновы векторные поля $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$ линейно независимы, следовательно, таковыми являются и гамильтоновы векторные поля $X_{f'_1}, \dots, X_{f'_{n-1}}$. Но это означает, что в любой точке вне D касательное пространство к $D(p)$ (при $p \neq [1:0]$, $p \neq [0:1]$) натянуто на $2(n-1)$ вещественных линейно независимых векторов $X_{f'_1}, \dots, X_{f'_{n-1}}$ и $IX_{f'_1}, \dots, IX_{f'_{n-1}}$, откуда следует требуемая гладкость.

Таким образом, у нас имеются всего два нерегулярных слоя D_+ и D_- , надлежащие точкам $[1:0], [0:1] \in \mathbb{CP}_w^1$ на параметризующей проективной прямой.

Стандартные торы Лиувилля, являющиеся слоями над внутренними точками многогранника P_X при отображении действия $F_{\text{act}}: X \rightarrow P_X$, могут быть восстановлены с помощью следующей конструкции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *На параметризующей проективной прямой $\mathbb{CP}_w^1$ существует такая функция h , что по ней и набору интегралов $f'_1, \dots, f'_{n-1}$ может быть восстановлено стандартное слоение X на торы Лиувилля.*

Процесс построения лагранжева слоения на X по некоторой функции h на базе $\mathbb{CP}^1$ псевдоторической структуры описан в работе [2]; наша задача – провести обратное рассуждение, т. е. по слоению на торы Лиувилля восстановить функцию h на базе. Для этого заметим сначала, что искомая функция h должна иметь на проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ в точности две критические точки (с необходимостью максимум и минимум) в северном и южном полюсах. Тогда результирующее лагранжево слоение будет определено на дополнении в X к слоям над этими точками, т. е. в точности на $X \setminus D$, как и слоение Лиувилля. Далее, произвольный тор Лиувилля

$$T_{c_1, \dots, c_n} = \{f_1 = c_1, \dots, f_n = c_n\}, \quad (c_1, \dots, c_n) \in \text{Int } P_X,$$

в $X \setminus B$ инвариантен относительно гамильтонова действия функций $f'_1, \dots, f'_{n-1}$, но и каждый дивизор $D(p)$ обладает тем же свойством, откуда следует, что пересечение $T_{c_1, \dots, c_n} \cap D(p)$ или пусто, или представляет собой $(n-1)$ -мерный тор. С другой стороны, множество всех дивизоров $D(p)$, нетривиально пересекающих $T_{c_1, \dots, c_n}$, составляет одномерное гладкое подмногообразие в $\mathbb{CP}^1 \setminus ([1:0] \cup [0:1])$. Пробежав все торы Лиувилля на $X \setminus D$, мы получим расслоение на окружности цилиндра $\mathbb{CP}_w^1 \setminus ([1:0] \cup [0:1])$, и любая функция, для которой эти окружности есть линии уровня, дает пример искомой $h \in C^\infty(\mathbb{CP}^1, \mathbb{R})$. Более того, h может быть выбрана так, что недостающий интеграл f'_n получается подъемом функции h на $X \setminus D$.

Напомним [2], что в присутствии псевдоторической структуры $(f'_1, \dots, f'_{n-1}, \psi_D)$ на X выбор не критического набора значений $c_1, \dots, c_{n-1}$ вещественных интегралов f'_i и гладкой петли γ на базе $\mathbb{CP}_w^1$ определяет лагранжев тор

$$S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma) = \bigcup_{p \in \gamma} (D(p) \cap \{f'_1 = c_1, \dots, f'_{n-1} = c_{n-1}\}),$$

составленный из лагранжевых торов в слоях $D(p)$. В работе [1] было установлено, что торы Клиффорда и Чеканова для проективной плоскости различаются типами своих проекций на базу псевдоторической структуры, т. е. на проективную

прямую $\mathbb{CP}_w^1$: петля γ_{Cl} нестягиваема на $\mathbb{CP}_w^1 \setminus ([1:0] \cup [0:1])$, в то время как петля γ_{Ch} стягиваема. Следуя этой логике, мы будем различать лагранжевы торы, получаемые на нашем торическом многообразии X посредством псевдоторической структуры $(f'_1, \dots, f'_n, \psi_D)$, по следующему принципу:

На основании этого лагранжев тор $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_s)$, где γ_s – нестягиваемая петля в $\mathbb{CP}_w^1 \setminus ([1:0], [0:1])$, мы будем называть тором стандартного типа, а тор $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_e)$, где γ_e стягиваема, – тором типа Чеканова.

Нетрудно установить следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Каждый лагранжев тор стандартного типа гамильтоново изотопен некоторому тору Лиувилля.*

Для доказательства достаточно предъявить семейство изодрастических лагранжевых деформаций $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_t)$ такое, что $\gamma_0 = \gamma_s$, а конечная петля γ_1 есть линия уровня функции h на базе, построенной в предложении 2.

Однако необходимо заметить, что не всякий нестандартный тор гамильтоново неизотопен стандартному: а именно, имеется выделенный набор значений вещественных интегралов $f'_1, \dots, f'_{n-1}$, входящих в псевдоторическую структуру. Для проективной плоскости торы Чеканова и Клиффорда не являются гамильтоново изотопными для единственного значения вещественного интеграла – нулевого [1]. Исследуем этот вопрос более подробно.

В результате выбора поднабора вещественных интегралов $f'_1, \dots, f'_{n-1}$, который мы сделали при построении псевдоторической структуры для доказательства теоремы 1, весь выпуклый многогранник P_X проецируется в $\mathbb{R}^{n-1}$, и образ этой проекции представляет собой выпуклый многогранник $P_{D(p)} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ торического общего слоя $D(p)$. При этом компоненты граничного дивизора D_i проецируются как в границу $\partial P_{D(p)}$, так и во внутренние точки многогранника $P_{D(p)}$. В самом деле, в пучке ψ_D есть в точности два нерегулярных слоя D_+ и D_- , которые представляют собой сингулярные торические многообразия. Граничный дивизор этих многообразий состоит из компонент, переводящихся редуцированным отображением действия $F'_{\text{act}} = (f'_1, \dots, f'_{n-1})$ как в границу $\partial P_{D(p)}$, так и в некоторые гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n-1}$. Таким образом, внутри $P_{D(p)}$ имеются “стенки”, содержащиеся в образах D_+ и D_- . Однако не каждая “стенка” доставляет препятствие для изодрастических деформаций нестандартных торов в стандартные.

Определим специальное множество $N_{\text{sp}} \subset \text{Int } P_{D(p)}$ следующим образом. Рассмотрим в D_+ и D_- подмножества C_+ и C_- , состоящие из кратных точек. Если компонента D_i входит в $D_{\pm}$ с кратностью λ_i такой, что $|\lambda_i| > 1$, то D_i целиком входит в $C_{\pm}$; соответственно, любое пересечение $D_i \cap D_j$ компонент из $D_{\pm}$ входит в $C_{\pm}$. Тогда специальное множество N_{sp} определяется так:

$$N_{\text{sp}} = F'_{\text{act}}(C_+) \cap F'_{\text{act}}(C_-).$$

Если набор значений $(c_1, \dots, c_{n-1})$ не принадлежит специальному множеству N_{sp} , то мы можем с помощью гамильтоновой изотопии деформировать нестандартный тор $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_e)$ в стандартный тор Лиувилля вида $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_s)$. В самом деле, в слое $D_{\pm}$ над особой точкой $[1:0]$ или $[0:1]$ базы $\mathbb{CP}_w^1$ соответствующий набор значений высекает гладкий лагранжев $(n-1)$ -мерный тор, который может быть включен в n -мерный тор, являющийся элементом семейства изодрастической деформации. Поэтому доказательство такое же, как и в случае предложения 3, и мы имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Нестандартный лагранжев тор $S_{c_1, \dots, c_{n-1}}(\gamma_e)$ гамильтоново изотопен тору Лиувилля, если $(c_1, \dots, c_{n-1}) \notin N_{\text{sp}}$.*

Далее необходимо заметить, что торическое многообразие X может обладать разными псевдоторическими структурами ранга один, так что нестандартные торы, определяемые одной псевдоторической структурой, могут, очевидно, оказаться изотопными стандартным относительно другой псевдоторической структуры, т. е. нам необходимо каким-то образом сравнить “запретные зоны” N_{sp} для разных псевдоторических структур. Для этого необходимо обратиться к комбинаторным данным, общим для всех псевдоторических структур, а именно к выпуклому многограннику P_X самого исходного торического многообразия X .

Определим подъем $\tilde{N}_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ специального множества N_{cr} в выпуклый многогранник P_X как прообраз

$$\tilde{N}_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} = \pi^{-1}(N_{\text{cr}}) \subset P_X,$$

где $\pi: P_X \rightarrow P_{D(p)}$ — естественная проекция. При этом целые числа $\{\lambda_i\}$ отмечают, из какой псевдоторической структуры проистекает “стенка” $\tilde{N}$. Поскольку псевдоторические структуры параметризуются примитивными векторами из Λ_{pst} (см. выше), мы получаем набор “стенок”. Рассмотрим пересечение

$$\tilde{N} = \bigcap_{(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \Lambda_{\text{pst}}} \tilde{N}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_d)} \subset P_X.$$

Это множество состоит из торов Лиувилля, у которых могут оказаться неэквивалентные “двойники”, т. е. нестандартные торы с такими же инвариантами гамильтоновой изотопии, которые не связываются изодрастической деформацией со стандартным тором Лиувилля.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$. Здесь граничный дивизор составлен из трех базисных прямых $l_i = \{z_i = 0\}$, представляющих один и тот же класс когомологий, а множество псевдоторических структур Λ_{pst} состоит из примитивных векторов типа $(x, y, -x - y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Классы когомологий компонент граничного дивизора совпадают, поэтому на множестве Λ_{pst} имеется действие S_3 симметрической группы, и нетрудно видеть, что $\tilde{N}$ состоит из единственной точки в $P_{\mathbb{CP}^2}$, соответствующей монотонному тору Клиффорда.

Рассмотрим монотонный случай, когда наше торическое многообразие X снабжено симплектической формой ω , класс когомологий $[\omega]$ которой пропорционален каноническому классу K_X . Более того, мы потребуем, чтобы $[\omega] = -K_X \in H^2(X, \mathbb{Z})$ (с алгебро-геометрической точки зрения это соответствует случаю многообразий Фано). Тогда граничный дивизор D представляет класс симплектической формы, а его компоненты D_i порождают разложение в сумму натуральных чисел степени многообразия Фано:

$$\deg X = \sum_{i=1}^d \langle [D_i]; [\omega]^{n-1} \rangle = \sum_{i=1}^d k_i.$$

Любая псевдоторическая структура $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \Lambda_{\text{pst}}$ должна удовлетворять уравнению $\sum_{i=1}^d \lambda_i k_i = 0$. Кроме того, для стандартных лагранжевых торов Лиувилля условие монотонности совпадает с условием Бора–Зоммерфельда относительно канонического класса [2]. То есть $S_0 \subset X$ – монотонный лагранжев тор Лиувилля – однозначно определен дискретными данными, а именно значением координат образа $p_0 = F_{\text{act}}(S_0) \in P_X$. Однако красивое выражение для условия Бора–Зоммерфельда относительно канонического класса получается, если координаты в $\mathbb{R}^n$ выбираются специальным образом: как подъемы периодов торов Лиувилля. Напомним, что периоды лагранжева тора S в симплектическом многообразии X с целочисленной симплектической формой ω определяются как отображение $\text{Per}_\omega: H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow U(1)^n$,

$$([\alpha_1], \dots, [\alpha_n]) \mapsto \left(\exp \left\{ i \int_{D_{\alpha_1}} \omega \right\}, \dots, \exp \left\{ i \int_{D_{\alpha_n}} \omega \right\} \right),$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – базис в $H_1(S, \mathbb{Z})$, D_i – диск в X , заклеивающий петлю α_i , и целочисленность ω гарантирует, что экспоненты не зависят от выбора D_i . Так как $X \setminus D$ расслоено на торы Лиувилля, можно одновременно зафиксировать базис в гомологиях всех слоев; в случае многообразия Фано возможно выбрать такой набор первых интегралов $(f_1, \dots, f_n)$, что $(e^{if_1}, \dots, e^{if_n}) = \text{Per}_\omega$ для каждого тора Лиувилля. Таким образом, отображение периодов поднимается до набора первых интегралов. Но тогда тор Лиувилля есть тор Бора–Зоммерфельда относительно канонического класса, если координаты его образа $p_0 \in P_X$ являются целыми числами по модулю каждого из $1/k_i$. Нетрудно видеть, что p_0 всегда принадлежит $\tilde{N}$, и основная гипотеза, работа над которой продолжается, звучит так.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть X – торическое многообразие Фано, $S_0 \subset X$ – монотонный лагранжев тор Лиувилля. Тогда существует нестандартный монотонный тор типа Чеканова, гамильтоново неизотопный S_0 .

Заметим, что конструкции, предложенные в настоящей работе, позволяют предложить кандидатов на роль таких экзотических торов, и существенная часть в работе над этой гипотезой заключается в том, чтобы найти подходящие инварианты, различающие гамильтоново неизотопные торы, и вычислить их для тора Лиувилля и нашего кандидата. Одним из главных инвариантов в подобного рода исследованиях, являются когомологии Флоера лагранжевых подмногообразий, и мы надеемся на некоторый прогресс, связанный именно с этими инвариантами.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00980_a) и Фонда поддержки академических программ НИУ ВШЭ (грант № 12-09-0064). Н. А. Тюрин пользовался частичной финансовой поддержкой Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0023) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5139.2012.1).

Список литературы

- [1] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 321–325.
- [2] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 307–333.
- [3] M. Audin, *Torus Action on Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics, **93**, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [4] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [5] A. Ashtekar, T. Schilling, “Geometrical formulation of quantum mechanics”, *On Einstein’s Path: Essays in Honor of Engelbert Schücking* (New York, USA, December 12–13, 1996), ed. A. Harvey, Springer, New York, 1999, 23–65.
- [6] N. A. Tyurin, “Geometric quantization and algebraic Lagrangian geometry”, *Surveys in Geometry and Number Theory: Reports on Contemporary Russian Mathematics*, London Mathematical Society Lecture Note, **338**, ed. N. Young, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 279–318.

Поступила в редакцию 22.11.2012