Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Фермионы нулевой массы в потенциалах Кулона и Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 226–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:26:34

© 2013 г.

В. Р. Халилов*

ФЕРМИОНЫ НУЛЕВОЙ МАССЫ В ПОТЕНЦИАЛАХ КУЛОНА И ААРОНОВА–БОМА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрена задача о движении релятивистского заряженного фермиона нулевой массы в потенциалах Кулона и Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях. Построены однопараметрические самосопряженные гамильтонианы Дирака с этими сингулярными внешними потенциалами, которые классифицированы самосопряженными граничными условиями. Показано, что если так называемый эффективный заряд становится сверхкритическим, то возникают виртуальные (квазистационарные) связанные состояния. Соответствующие этим состояниям волновые функции имеют большие амплитуды вблизи кулоновского центра, а их энергетический спектр квазидискретен и состоит из ряда размытых уровней, ширина которых связана с обратным временем жизни квазистационарного состояния. Выведены уравнения, определяющие квазидискретные спектры и времена жизни квазистационарных состояний, найдены решения этих уравнений в физически интересных случаях. Так называемые локальные плотности состояний, которые можно проверять в физических экспериментах, изучаются как функции энергии и параметров задачи; локальные плотности состояний исследованы как аналитически, так и графически.

Ключевые слова: сингулярный внешний потенциал, самосопряженные расширения гамильтониана, самосопряженные граничные условия, безмассовый фермион, потенциалы Кулона и Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях, виртуальные (квазистационарные) связанные состояния, квазидискретные уровни энергии, ширина уровня.

DOI: 10.4213/tmf8447

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые системы релятивистских фермионов во внешних полях в $2 + 1$ измерениях вызывают значительный интерес, связанный с возможностью использования полученных для этих моделей результатов для изучения эффекта Ааронова–Бома [1], квантового эффекта Холла [2], высокотемпературной сверхпроводимости [3]. Решения уравнения Дирака с потенциалом Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях применялись для описания рассеяния спин-поляризованных электронов потенциалом Ааронова–Бома [4] и движения фермионов в поле космической струны [5].

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru

Новый интерес к различным эффектам в двумерных квантовых системах появился после успешного получения монослоя графита (графена) (см., например, [6] и обзоры [7]–[9]). В графене электроны вблизи поверхности Ферми можно описать в терминах эффективной лоренц-инвариантной теории, где их кинетическая энергия (T) определяется законом дисперсии Дирака $T \sim |\mathbf{p}|$, $\mathbf{p}$ – импульс электрона [7], а динамика электрона при низких энергиях описывается уравнением Дирака в $2 + 1$ измерениях для фермиона с нулевой массой [7], [10]–[14]. Поэтому электроны в графене [15] дают интересные реализации квантовой электродинамики в $2 + 1$ измерениях [16]. В то же время эффективная постоянная тонкой структуры в графене велика, и появляется новая возможность изучения квантовой электродинамики в режиме сильной связи. Индуцированный ток в графене в поле соленоида, расположенного перпендикулярно к плоскости образца (графена), оказался конечной периодической функцией магнитного потока соленоида [17]. Эффекты поляризации вакуума полем кулоновской примеси в графене изучались в работах [12], [13], [18].

Известно, что при изучении уравнения Дирака с сингулярными внешними потенциалами возникает проблема полноты некоторых найденных наборов точных решений уравнения Дирака. Дело в том, что гамильтониан Дирака с сингулярными внешними потенциалами требует дополнительного доопределения, чтобы его можно было трактовать как самосопряженный квантово-механический оператор. В этом случае существует целое семейство самосопряженных гамильтонианов, поэтому сначала необходимо найти все самосопряженные расширения данного симметрического оператора и затем выделить корректный самосопряженный гамильтониан с помощью физически приемлемых граничных условий в точке сингулярности гамильтониана.

Так, в работе [19] впервые самосопряженные расширения гамильтониана уравнения Шредингера в потенциале Ааронова–Бома выделялись однозначно с помощью физического условия “минимальной сингулярности”, т. е. требования, чтобы область определения оператора Гамильтона содержала только регулярные в нуле функции. Другой важный и интересный пример – гамильтониан Дирака в сильном кулоновском поле точечного заряда (источника). Напомним, что спектр энергий электрона в кулоновском 4-потенциале, $A^0(r) = a/e_0 r$, $\mathbf{A} = 0$, $a > 0$, $e_0 > 0$ ($-e_0$ – заряд электрона), состоит из непрерывного спектра $|E| \geq m$, разделенного щелью m (m – масса электрона), и дискретного спектра $0 < E < m$ внутри щели. Энергия электрона в основном состоянии $E_g = m\sqrt{1 - a^2}$ обращается в нуль при $a = 1$, а при $a > 1$ интерпретация этой формулы как энергии электрона вообще теряет смысл; самосопряженность гамильтониана теряется при $a > 1$. Задача была решена в [20]–[24] методом физической регуляризации, в котором самосопряженный гамильтониан конструировался путем замены сингулярного потенциала $a/e_0 r$ кулоновским потенциалом, обрезанным на малом расстоянии R . В таком потенциале с увеличением a низший уровень энергии электрона становится отрицательным при $a > 1$ и при дальнейшем увеличении a может достичь границы нижнего континуума (отрицательных) энергий $-m$; значение $a = a_{\text{cr}}$, при котором низший уровень энергии электрона равен $-m$, называют критическим зарядом для основного состояния. При этом низшее состояние становится “квазистационарным” состоянием с “комплексной энергией” и, следовательно, с конечным “временем жизни”. С точки зрения квантовой электродинамики при $a > a_{\text{cr}}$ из вакуума рождается пара электрон–позитрон, причем

позитрон уходит на бесконечность, а вакуум приобретает отрицательный электрический заряд. Критический заряд определяется как условие появления мнимой части “энергии”.

В задаче о поведении массивного заряженного фермиона в сильном (обрезанном) кулоновском поле в $2 + 1$ измерениях картина аналогичная, но энергия электрона в основном состоянии становится равной нулю при $a = 1/2$ [25]–[27]. Заряженные фермионы нулевой массы в кулоновском потенциале не имеют связанных состояний при $a < 1/2$, так как уравнение Дирака для частицы с нулевой массой не содержит естественного масштаба длины, которым можно было бы характеризовать такие локализованные состояния, тем не менее при $a > 1/2$ возникают квазистационарные состояния [9], [13], [28]–[31].

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о движении релятивистского заряженного фермиона нулевой массы в потенциалах Кулона и Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях. Включение потенциала Ааронова–Бома дает возможность учесть влияние “спина” частицы на квазистационарные состояния. Мы находим все самосопряженные гамильтонианы Дирака в потенциалах Кулона и Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях с помощью так называемого метода асимметрии форм Воронова–Гитмана–Тютин [32], восходящего к теории самосопряженных расширений фон Неймана для симметрических операторов (см., например, [33]). Спектры самосопряженного радиального гамильтониана находятся методом направляющих функционалов Крейна для симметрических дифференциальных операторов [32], [34]. Результаты, полученные в настоящей работе, могут оказаться полезными для понимания влияния спинов электронов на физические процессы в графене с кулоновской примесью.

2. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН В ПОТЕНЦИАЛАХ КУЛОНА И ААРОНОВА–БОМА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

В случае двух пространственных измерений пространство квантовых состояний частиц есть гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ квадратично-интегрируемых функций $\Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$, со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = dx dy. \quad (1)$$

Уравнение Дирака для фермиона в заданном внешнем поле можно получить так же, как это делается для случая $3 + 1$ измерений. Пусть A_μ – 3-потенциал внешнего поля, а $U(\mathbf{r})$ – потенциал внешнего скалярного поля. Уравнение Дирака фермиона с зарядом $e = -e_0 < 0$ во внешних полях в $2 + 1$ измерениях имеет вид

$$(\gamma^\mu P_\mu - U(\mathbf{r}))\Psi = 0, \quad (2)$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного импульса фермиона (3-вектор), а алгебра γ^μ -матриц Дирака может быть представлена через двумерные матрицы Паули σ_j . Вместе с тем, существуют два сорта фермионов, соответствующих сигнатуре двумерных матриц Дирака [35]:

$$\eta = \frac{i}{2} \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) = \pm 1, \quad (3)$$

где два знака η отвечают двум различным неэквивалентным представлениям матриц Дирака, которые также могут быть обозначены через s :

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i s \sigma_1, \quad \gamma^2 = i s \sigma_2. \quad (4)$$

Тогда $\eta \equiv s$, а параметр $s = \pm 1$ характеризует два значения проекции спина фермиона [4] (см. также [36]).

Гамильтониан уравнения Дирака с параметром s для фермиона в потенциале Ааронова–Бома

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = \frac{B}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (5)$$

и в потенциалах A_μ и U :

$$A_0(r) = \frac{a}{e_0 r}, \quad a > 0, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = 0; \quad U(r) = -\frac{b}{r}, \quad b > 0, \quad (6)$$

есть

$$H_D = \sigma_1 P_2 - s \sigma_2 P_1 + \sigma_3 U(r) - e_0 A_0(r). \quad (7)$$

Здесь векторный потенциал A_μ в операторе обобщенного импульса P_μ есть сумма потенциалов (5) и (6). Во избежание недоразумений отметим, что потенциалами Кулона в $2 + 1$ измерениях мы называем потенциалы (6), убывающие с расстоянием от источника как $1/r$, имея в виду, что в физической ситуации (например, в графене), хотя электроны движутся в плоскости, их кулоновское взаимодействие с внешним полем точечной заряженной примеси происходит в физическом (трехмерном) пространстве и напряженность электрического поля примеси – трехмерный (а не двумерный) вектор (см., например, [37]). Поэтому потенциал $A^0(r) \sim 1/r$ (а не $A^0(r) \sim \ln r$, как это было бы в $2 + 1$ измерениях) не удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона с точечным источником в начале координат. Аналогично в реальном физическом пространстве величина B характеризует поток $\Phi = 2\pi B$ магнитного поля Ааронова–Бома $\mathbf{H} = (0, 0, H) = \nabla \times \mathbf{A} = B\pi\delta(\mathbf{r})$ и приводит к потенциалу взаимодействия спинного магнитного момента электрона с магнитным полем вида $s\mu\delta(r)/r$.

Оператор Гамильтона (7) нужно определить как самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых спиноров $\Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$, со скалярным произведением (1). Собственные значения оператора полного углового момента $J \equiv L_z + s\sigma_3/2$, где $L_z \equiv -i\partial/\partial\varphi$ являются сохраняющимися величинами (оператор J коммутирует с H_D). Следовательно, можно рассматривать уравнение (2) отдельно в каждом собственном подпространстве J , а полное гильбертово пространство представить как прямую ортогональную сумму подпространств J .

Решения уравнения (2) ищем в виде (см. [38]–[41])

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) e^{is\varphi} \end{pmatrix} e^{-iEt + il\varphi}, \quad (8)$$

где вещественная величина E – энергия фермиона, l – целое число. Волновая функция Ψ является собственной функцией оператора полного углового момента J с собственным значением $j = l + s/2$.

Представляя спинор в виде (8), мы сводим уравнение (2) к радиальному уравнению Дирака в потенциалах (5) и (6) для функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ с формальным радиальным гамильтонианом $\check{h}$:

$$\check{h} = is\sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} - \frac{a}{r} - \frac{b}{r} \sigma_3, \quad \mu \equiv e_0 B. \quad (9)$$

Тогда дублет

$$F = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} \quad (10)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \check{h} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -(a+b)/r & sd/dr + (l + \mu + s/2)/r \\ -sd/dr + (l + \mu + s/2)/r & -(a-b)/r \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Нам понадобятся решения этого уравнения с комплексным параметром E , вещественные значения которого имеют смысл энергии. Таким образом, задача сводится к задаче для формального радиального гамильтониана $\check{h}$ для каждого $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и s и произвольных a, b, B . Далее мы решаем задачу в полной аналогии с работой [32] (см. также [41]).

Следует различать так называемые дифференциальные выражения $\check{k}$ и операторы k . Мы будем называть k оператором, ассоциированным с дифференциальным выражением $\check{k}$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(0, \infty)$ есть гильбертово пространство дублетов $F(r)$, $G(r)$ со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\infty F^\dagger(r) G(r) dr = \int_0^\infty [\bar{f}_1(r) g_1(r) + \bar{f}_2(r) g_2(r)] dr,$$

так что $\mathfrak{L}^2(0, \infty) = L^2(0, \infty) \oplus L^2(0, \infty)$. Здесь символом $\oplus$ обозначена прямая сумма. Определим оператор h^0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$:

$$h^0: \begin{cases} D(h^0) = \mathcal{D}(0, \infty), \\ h^0 F(r) = \check{h} F(r), \end{cases}$$

где $\mathcal{D}(0, \infty) = D(0, \infty) \oplus D(0, \infty)$, $D(0, \infty)$ – стандартное пространство гладких функций на $(0, \infty)$ с компактным носителем:

$$D(0, \infty) = \{f(r): f(r) \in \mathbb{C}^\infty, \text{ supp } f \in [c, d], 0 < c < d < \infty\},$$

отрезок $[c, d]$ может быть разным для разных f . Оператор h является симметрическим, если для любых дублетов $F(r)$ и $G(r)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty G^\dagger(r) h F(r) r dr = \int_0^\infty [h G(r)]^\dagger F(r) r dr. \quad (12)$$

Очевидно, h^0 – симметрический оператор.

Пусть h есть самосопряженное расширение h^0 в $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$. Область определения самосопряженного дифференциального оператора можно задать самосопряженными граничными условиями на концах интервала для функций из области определения.

Рассмотрим оператор h^* , сопряженный исходному симметрическому оператору h^0 . Нетрудно показать, что сопряженный оператор h^* , который формально определяется формулой (11), задается следующим образом:

$$h^*: \begin{cases} D(h^*) = \left\{ F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны на } (0, \infty), \right. \\ \left. F, \check{h}F = G \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \right. \\ \left. h^*F(r) = \check{h}F(r), \right. \end{cases} \quad (13)$$

т. е. h^* имеет более широкую область определения $D(h^*)$, $D(h^0) \subset D(h^*)$, которая представляет собой так называемую естественную область для дифференциального выражения $\check{h}$. Вещественность коэффициентных функций дифференциального выражения (9) означает, что индексы дефекта исходного симметрического оператора h^0 равны, так что самосопряженные расширения оператора h^0 существуют для любых значений параметров a, b, μ и для каждого l и s . Напомним, что симметрический оператор k является самосопряженным, если $D(k)$ совпадает с областью определения сопряженного оператора $D(k^*)$.

Интегрируя по частям (12), представим условие симметричности оператора в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} G^\dagger(r) i\sigma_2 F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} G^\dagger(r) i\sigma_2 F(r).$$

Можно проверить, что для любого дублета $F(r)$ из $D(h^*)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0,$$

поэтому формула, характеризующая фактически меру асимметрии сопряженного оператора h^* , сводится к граничному условию в нуле

$$\lim_{r \rightarrow 0} G^\dagger(r) i\sigma_2 F(r) = 0. \quad (14)$$

Если условие (14) удовлетворяется для любых дублетов из $D(h^*)$, то h^* является симметрическим и, следовательно, самосопряженным оператором. Это также означает, что h^0 – существенно самосопряженный оператор, и его единственным самосопряженным расширением является его замыкание $h = \bar{h}^0$, которое совпадает с сопряженным оператором, $h = h^* = h^\dagger$. Если условие (14) не удовлетворяется, самосопряженный оператор $h = h^\dagger$ находится как сужение оператора h^* на так называемую максимальную область $D(h) \subset D(h^*) \equiv D^*$ [32].

Запишем условие (14) как

$$(F^\dagger(r) i\sigma_2 F(r))|_{r=0} = (\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = 0. \quad (15)$$

Граничные условия в форме (15) называются самосопряженными граничными условиями. Чтобы проверить выполнение (15), нам нужно знать асимптотическое поведение дублета F при $r \rightarrow 0$.

Согласно определению (13) любые дублеты из D^* можно рассматривать как квадратично-интегрируемые решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\check{h}F(r) = \left[is\sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} - \frac{a}{r} + \left(m - \frac{b}{r} \right) \sigma_3 \right] F(r) = G(r), \quad (16)$$

в котором дублет $G(r)$ принадлежит $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$ и, следовательно, локально интегрируем. Таким образом, к уравнению (16) можно применить общую теорию дифференциальных уравнений [33].

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$\begin{aligned} F &= e^{-x/2} r^{\gamma_s} A [v_+ \Phi(a^s, c_s; x) + v_- m_s^+ \Phi(a^s + s, c_s; x)] + \\ &+ e^{-x/2} r^{\gamma_s} B [v_+ \Psi(a^s, c_s; x) + v_- n_s \Psi(a^s + s, c_s; x)] \equiv \\ &\equiv AY(r, \gamma_s, E) + Be^{-x/2} r^{\gamma_s} [\Psi(a^s, c_s; x) v^+ + n_s \Psi(a^s + s, c_s; x) v^-]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь A, B – постоянные, $x = -2i|E|r$,

$$a^s = \gamma_s + \frac{1-s}{2} - ie'a, \quad c_s = 2\gamma_s + 1, \quad s = \pm 1, \quad e' = \frac{E}{|E|}, \quad (18)$$

$$\gamma_s = \pm \sqrt{\left(l + \mu + \frac{s}{2} \right)^2 - a^2 + b^2} \equiv \gamma_s^\pm, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} m_s^\pm &= \frac{s\gamma_s^\pm - ie'a}{\nu + ie'b}, \quad n_s = \frac{-[a^2 + \gamma_s^2 + 1](s+1)/2 + 1}{\nu + ie'b}, \quad \nu = l + \mu + \frac{s}{2}, \\ v_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -ie' \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ ie' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

$\Phi(a, c; x)$ и $\Psi(a, c; x)$ – вырожденные гипергеометрические функции [42].

Обозначим $\gamma_s^+ = \sqrt{\nu^2 - a^2 + b^2} \equiv \gamma$ при $a^2 - b^2 \leq \nu^2$ и $\gamma_s^+ = i\sqrt{a^2 - b^2 - \nu^2} \equiv i\sigma$ при $a^2 - b^2 > \nu^2$. Нужные нам решения

$$U_1(r; E) = Y(r, \gamma_s, E)|_{\gamma_s=\gamma}, \quad (21)$$

$$U_2(r; E) = Y(r, \gamma_s, E)|_{\gamma_s=-\gamma} \quad (22)$$

(последнее мы будем использовать при $\gamma \neq n/2, n = 1, 2, \dots$) при $r \rightarrow 0$ имеют вид

$$U_1(r; E) = r^\gamma u_+ + O(r^{\gamma+1}), \quad U_2(r; E) = r^{-\gamma} u_- + O(r^{-\gamma+1}), \quad (23)$$

где

$$u_\pm = \begin{pmatrix} (\pm s\gamma + \nu)/(a+b) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $\gamma \neq 0$ решения $U_1(r; E)$ и $U_2(r; E)$ линейно независимы,

$$\text{Wr}(U_1, U_2) = \frac{2s\gamma}{a+b}, \quad (24)$$

где $\text{Wr}(F, G) = F i \sigma^2 G = f_1 g_2 - f_2 g_1$ – вронскиан дублетов $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Нам понадобится решение

$$V_1(r; E) = U_1(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma} \omega(E) U_2(r; E), \quad (25)$$

где $\omega(E) = \text{Wr}(U_1, V_1)$:

$$\begin{aligned} \omega(E) &= \frac{\Gamma(2\gamma)\Gamma(-\gamma + (1-s)/2 - ia)}{\Gamma(-2\gamma)\Gamma(\gamma + (1-s)/2 - ia)} (-2iE)^{-2\gamma} \frac{\nu + i(a+b) + s\gamma}{\nu + i(a+b) - s\gamma} \frac{2s\gamma}{a+b} \equiv \\ &\equiv \frac{\tilde{\omega}(E)}{\Gamma(-2\gamma)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем (19) как $q = \sqrt{\nu^2 - \gamma^2}$ и введем

$$q_u = \sqrt{\nu^2 - 1/4} \iff \gamma = \frac{1}{2}, \quad q_c = \nu \iff \gamma = 0, \quad (27)$$

где q играет роль некоторого эффективного заряда, а q_c называют критическим зарядом; эти величины являются функциями l, s, a, b, μ .

Любой дублет из D^* можно представить в виде [32]

$$F(r) = c_1 U_1(r) + c_2 U_2(r) + I_1(r) + I_2(r), \quad (28)$$

где c_1 и c_2 – константы и

$$I_1(r) = \begin{cases} -\frac{a+b}{2s\gamma} \int_r^{r_0} [U_1(r) \otimes U_2(y)] G_-(y) dy, & 0 < q \leq q_u, \\ \frac{a+b}{2s\gamma} \int_0^r [U_1(r) \otimes U_2(y)] G_-(y) dy, & q > q_u, \quad q \neq q_c, \end{cases} \quad (29)$$

$$I_2(r) = -\frac{a+b}{2s\gamma} \int_0^r [U_2(r) \otimes U_1(y)] G_-(y) dy, \quad q > 0, \quad q \neq q_c. \quad (30)$$

Здесь дублет $G_-(y) \in \mathfrak{L}^2(0, \infty)$, символом $\otimes$ обозначено тензорное произведение, так что $[U_1(r) \otimes U_2(y)]$ есть (2×2) -матрица, а $r_0 > 0$ – вещественная постоянная. Можно показать, что асимптотическое поведение дублета $F(r)$ при $r \rightarrow 0$ определяется двумя первыми членами в формуле (28) и, следовательно, существенно зависит от значения γ [32].

3. РЕШЕНИЯ В ДОКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ $\gamma > 0$

Оценивая интегралы с помощью неравенства Коши–Буняковского при $\gamma > 0$, получим

$$I_1(r) = O(r^{1/2}), \quad I_2(r) = O(r^{1/2}), \quad r \rightarrow 0, \quad (31)$$

так что $F(r) \in \mathfrak{L}^2(0, \infty)$ при условии $c_2 = 0$,

$$F(r) = c_1 U_1(r) + I_1(r) + I_2(r) = O(r^{1/2}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (32)$$

Тогда $F \in D^*$ и условие (15) удовлетворяется при $q \leq q_u$, $\gamma \geq 1/2$. Это означает, что в этой области зарядов индексы дефекта исходного симметрического оператора h^0 равны нулю, т. е. оператор h является существенно самосопряженным: $h = h^\dagger$,

так что при $\gamma \geq 1/2$ существует единственный самосопряженный радиальный гамильтониан $h = h^0$. Область его определения $D(h)$ есть пространство абсолютно непрерывных дублетов $F(r)$, исчезающих в точке $r = 0$; дублет $\check{h}F(r)$ также принадлежит $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$.

В области эффективных зарядов $q_u < q < q_c$ ($0 < \gamma < 1/2$) левая часть (15) отлична от нуля:

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = \frac{2s\gamma}{a+b}(\bar{c}_1 c_2 - \bar{c}_2 c_1). \quad (33)$$

Это означает, что оператор h^* не является симметрическим, и необходимо построить нетривиальные самосопряженные расширения оператора h^0 . Эта задача для случая кулоновского поля решена в работе [32]. С помощью линейного преобразования $c_{1,2} \rightarrow c_{\pm} = c_1 \pm ic_2$ соотношение (33) можно привести к квадратичной диагональной форме:

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = -i \frac{s\gamma}{a+b}(|c_+|^2 - |c_-|^2). \quad (34)$$

Индексы инерции этой формы равны (1, 1), поэтому индексы дефекта симметрического оператора h^0 для области $0 < \gamma < 1/2$ равны (1, 1).

Условие (15) будет удовлетворяться для c_- и c_+ , связанных соотношением

$$c_- = e^{i\theta} c_+, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \sim 2\pi. \quad (35)$$

Разным θ соответствуют разные самосопряженные расширения, за исключением эквивалентных случаев $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. Угол θ параметризует самосопряженные расширения h_θ исходного симметрического оператора h^0 , которые различны для разных θ , за исключением двух эквивалентных значений $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$.

Обозначив $\xi = \text{tg}(\theta/2)$, запишем $c_2 = -\xi c_1$, $-\infty \leq \xi \leq +\infty$, $-\infty \sim +\infty$. В терминах ξ значения $\xi = \pm\infty$ эквивалентны и подразумевают, что $c_1 = 0$. Мы будем считать, что в этих случаях $\xi = \infty$.

Следовательно, в области $0 < \gamma < 1/2$ можно определить однопараметрическое $U(1)$ -семейство самосопряженных операторов $h_\theta \equiv h_\xi$ с областью определения D_ξ :

$$h_\xi: \begin{cases} D_\xi = \begin{cases} F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны в } [0, \infty), & F, \check{h}F \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \\ F(r) = c[r^\gamma u_+ - \xi r^{-\gamma} u_-] + O(r^{1/2}), & r \rightarrow 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \\ F(r) = cr^{-\gamma} u_- + O(r^{1/2}), & r \rightarrow 0, \quad \xi = \infty, \end{cases} \\ h_\xi F = \check{h}F, \end{cases} \quad (36)$$

где c — произвольная постоянная. Другими словами, в случае $0 < \gamma < 1/2$ исходный симметрический оператор h^0 нельзя определить как единственный самосопряженный оператор, и поэтому область его определения нужно дополнительно фиксировать с помощью вещественного параметра ξ в терминах самосопряженных граничных условий. С точки зрения физики самосопряженное граничное условие — это условие равенства нулю плотности потока вероятности в источнике. В области $0 < \gamma < 1/2$ дублет

$$U_\xi(r; E) = U_1(r; E) - \xi U_2(r; E) \quad (37)$$

при $r \rightarrow 0$ ведет себя как $U_\xi(r; E) = r^\gamma u_+ - \xi r^{-\gamma} u_- + O(r^{-\gamma+1})$. Решение V_1 в этой области

$$V_1(r; E) \equiv V_\xi = U_\xi(r; E) + \frac{e'(a+b)}{2s\gamma} \omega_\xi(E) U_2(r; E),$$

так что

$$\omega_\xi(E) = \text{Wr}(U_\xi, V_\xi) = \omega(E) + \frac{2s\gamma\xi}{a+b},$$

а функция $\omega(E)$ определяется формулой (26). Спектр самосопряженного оператора можно найти с помощью спектральной функции, производная которой дается формулой [32]

$$\frac{d\sigma(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{\omega_\xi(E + i\epsilon)}, \quad (38)$$

где $\lim$ и $d\sigma(E)/dE$ понимаются в обобщенном смысле, а обобщенная функция $\omega_\xi(E + i\epsilon)$ получена аналитическим продолжением вронскиана $\omega_\xi(E) = \omega(E) + 2s\gamma\xi/(a+b)$ в комплексную плоскость E ; на вещественной оси E она совпадает с функцией $\omega(E)$ (26) с $\xi = 0$ [32], [41]. Поэтому $\omega_\xi(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\xi(E + i\epsilon)$ и, следовательно, спектральная функция определяется обобщенной функцией $F(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\xi^{-1}(E + i\epsilon)$.

Нелишне отметить, что формула (26) является пределом при $m \rightarrow 0$ вронскиана решений, описывающих движение фермиона массы $m > 0$. При $m \neq 0$ вронскиан содержит явно параметр $\lambda = \sqrt{m^2 - E^2}$, характеризуется двумя разрезами $(-\infty, -m]$ и $[m, \infty)$ в комплексной плоскости E , что позволяет определить первый (физический с $\text{Re } \lambda > 0$) и второй (нефизический с $\text{Re } \lambda < 0$) листы римановой поверхности. Спектр энергий состоит из непрерывной ветви $|E| > m$ и дискретных уровней $-m < E < m$, лежащих внутри щели, причем при малых эффективных зарядах существуют только уровни $0 < E < m$. Известно, что связанные состояния (если они существуют) расположены на физическом листе λ .

Легко проверить, что функции $\omega(E)$ и $\omega_\xi(E)$ непрерывны, комплексны и не равны нулю для действительных E ; при этом спектральная функция $\sigma(E)$ абсолютно непрерывна. Поэтому в энергетическом спектре рассматриваемой квантовой системы отсутствуют связанные состояния. Связанные состояния могли бы существовать, если бы функция $\omega_\xi(E)$ была действительной, тогда величина $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\xi(E + i\epsilon)$ была бы комплексной в точках, где $\omega_\xi(E) = 0$. Естественно считать, что энергии виртуальных связанных состояний определяются корнями уравнения $\omega_\xi(E) = 0$ и расположены на нефизическом листе. Кроме того, волновые функции виртуальных связанных состояний должны соответствовать расходящимся волнам при $r \rightarrow \infty$, причем $\text{Re } E < 0$, $\text{Im } E < 0$, $\text{Re } \lambda < 0$, $\text{Im } \lambda < 0$. Тогда в области $0 < \gamma < 1/2$ получим комплексное уравнение

$$Ae^{i(e'\pi\gamma + \psi_- + \phi_+ - \psi_+ - \phi_-)} \frac{B_-}{B_+} \sqrt{\frac{(\nu + s\gamma)^2 + (a+b)^2}{(\nu - s\gamma)^2 + (a+b)^2}} (2|E|)^{-2\gamma} = \xi \quad (39)$$

или два уравнения для действительной и мнимой частей соответственно

$$(2|E|)^{2\gamma} = \frac{AB_-}{|\xi|B_+} \sqrt{\frac{(\nu + s\gamma)^2 + (a+b)^2}{(\nu - s\gamma)^2 + (a+b)^2}}, \quad (40)$$

$$e'\pi\gamma + \psi_- + \phi_+ - \psi_+ - \phi_- = \frac{\pi(p-1)}{2}. \quad (41)$$

Здесь $p = \xi/|\xi| = \pm 1$ и $p = 1$ (-1) для $\infty > \xi \geq 0$ ($0 \geq \xi > -\infty$),

$$A = \frac{\Gamma(1+2\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)}, \quad B_{\pm} = \left| \Gamma\left(\pm\gamma + \frac{1-s}{2} - ia\right) \right|,$$

$$\psi_{\pm} = \text{Arg } \Gamma\left(\pm\gamma + \frac{1-s}{2} - ia\right), \quad \phi_{\pm} = \text{arctg } \frac{a+b}{\nu \pm s\gamma}.$$

Можно проверить, что в области $0 < \gamma < 1/2$ уравнение (40) не имеет вещественных корней для значений a, b, ν , при которых удовлетворяется (41).

Для графена интерес представляет только случай $a > b$, поэтому далее, не ограничивая общности, будем полагать $b = 0$. Для определенности считаем $\mu > 0$, так как при рассмотрении случая $\mu < 0$, очевидно, нужно одновременно сделать замены $l \rightarrow -l$ и $s \rightarrow -s$.

При $b = 0$ из (40) и (41) получим

$$(2|E|)^{2\gamma} = \frac{\Gamma(1+2\gamma)|\Gamma(-\gamma-ia)|}{|\xi|\Gamma(1-2\gamma)|\Gamma(\gamma-ia)|} \sqrt{\frac{\nu+s\gamma}{\nu-s\gamma}}, \quad (42)$$

или

$$E = \frac{e'}{2} \left[\frac{\Gamma(1+2\gamma)|\Gamma(-\gamma-ia)|}{|\xi|\Gamma(1-2\gamma)|\Gamma(\gamma-ia)|} \sqrt{\frac{\nu+s\gamma}{\nu-s\gamma}} \right]^{1/2\gamma} \quad (43)$$

и, используя известное представление

$$\arg \Gamma(x+iy) = y \left[-C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y} \text{arctg } \frac{y}{x+n-1} \right) \right],$$

где $C = 0.57721$ – постоянная Эйлера,

$$\pi \left(e'\gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{3+s}{4} \text{arctg } \frac{4a\gamma}{4\gamma^2 - (1+\nu^2)(1-s)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \text{arctg } \frac{8a\gamma}{(2n+1-s)^2 + 4a^2 - 4\gamma^2} = (p-1) \frac{\pi}{2}. \quad (44)$$

Наибольший интерес представляет область энергий вблизи $|E| = 0$. При $\gamma \rightarrow 1/2$ в этой области

$$E = e' \frac{1-2\gamma}{2|\xi|} \frac{|\Gamma(-1/2-ia)|}{|\Gamma(1/2-ia)|} \sqrt{\frac{\nu+s/2}{\nu-s/2}}, \quad (45)$$

откуда видно, что $|E| = 0$, а равенство (44) удовлетворяется значением $\gamma = 1/2$ для $e' = 1$, $p = 1$ ($\pi \geq \theta \geq 0$) и для $e' = -1$, $p = -1$ ($2\pi \geq \theta \geq \pi$), если только $a^2 = \nu^2 - 1/4$. В свободном случае ($a = 0$, $\mu = 0$) система обнаруживает симметрию частица–дырка. Мы определяем состояния с положительной энергией как частицы, а состояния с отрицательной энергией как дырки (античастицы).

При $\gamma \rightarrow 0$ $|E| \rightarrow 0$ как $2E \approx e'(1/|\xi|)^{1/2\gamma}$, а равенство (44) удовлетворяется для $e' = \pm 1$, $\gamma = 0$, только если $p = -1$ ($0 \geq \xi > -\infty$, $2\pi > \theta \geq \pi$) и $s = 1$. Это означает, что состояния частиц с $E > 0$ и, наоборот, состояния дырок с $E < 0$ сгущаются вблизи точки $E = 0$, когда $|\xi| > 1$ (см. также [12]), но остаются разделенными пока $q < q_c$.

4. ВИРТУАЛЬНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В сверхкритической области $q > q_c$ ($\gamma = i\sigma$)

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = -2i \frac{s\sigma}{a+b} (|c_1|^2 - |c_2|^2).$$

Заметим, что соотношение $c_2 = e^{i\theta} c_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, эквивалентно соотношению $c_1 = e^{i\theta} c$, $c_2 = e^{-i\theta} c$, $0 \leq \theta \leq \pi$, с заменой $\theta \rightarrow 2\pi - 2\theta$ (ср. с (35)). С учетом этого мы имеем однопараметрическое $U(1)$ -семейство самосопряженных операторов h_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \sim \pi$, с областью определения D_θ :

$$h_\theta: \begin{cases} D_\theta = \begin{cases} F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны в } [0, \infty), & F, \check{h}F \in \mathcal{L}^2(0, \infty), \\ F(r) = c[e^{i\theta} r^{i\sigma} u_+ + e^{-i\theta} r^{-i\sigma} u_-] + O(r^{1/2}), \\ r \rightarrow 0, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \sim \pi, \end{cases} \\ h_\theta F = \check{h}F, \end{cases} \quad (46)$$

где c – константа. Для $\gamma = i\sigma$ дублеты $U_\theta(r; E)$ и $V_\theta(r; E)$ принимают вид

$$U_\theta(r; E) = e^{i\theta} U_1(r; E) + e^{-i\theta} U_2(r; E) \quad (47)$$

и

$$V_\theta(r; E) = \frac{2}{e^{-i\theta} + e^{i\theta} \tilde{\omega}(E)} V_1(r; E) = U_\theta(r; E) - \frac{a+b}{4s\sigma} \omega_\theta(E) \tilde{U}_\theta(r; E), \quad (48)$$

$$\tilde{U}_\theta = \frac{1}{i} [e^{i\theta} U_1(r; E) - e^{-i\theta} U_2(r; E)],$$

где $U_1(r; E)$, $U_2(r; E)$ определены в (22) с $\gamma = i\sigma$, $\tilde{\omega}(E) = [(a+b)/2si\sigma]\omega(E)$, $\omega(E)$ дается формулой (26) с $\gamma = i\sigma$, а

$$\omega_\theta(E) = \text{Wr}(U_\theta, V_\theta) = -\frac{4is\sigma}{a+b} \frac{1 - \tilde{\omega}(E)e^{2i\theta}}{1 + \tilde{\omega}(E)e^{2i\theta}}.$$

Нетрудно проверить, что функция $\omega_\theta(E)$ всюду непрерывна, принимает комплексные значения и не равна нулю для действительных E . Поэтому связанные состояния отсутствуют и в сверхкритической области; в данной задаче нет естественного масштаба длины, которым можно было бы характеризовать область локализации связанных состояний. Тем не менее виртуальные связанные состояния могут существовать, когда $q > q_c$; их комплексные “энергии” $E = \text{Re } E + i \text{Im } E$ определяются уравнением

$$\frac{\Gamma(2i\sigma)\Gamma(-i\sigma + (1-s)/2 - ia)}{\Gamma(-2i\sigma)\Gamma(i\sigma + (1-s)/2 - ia)} (-2iE)^{-2i\sigma} \frac{\nu + i(a+b) + is\sigma}{\nu + i(a+b) - is\sigma} = e^{-2i\theta}. \quad (49)$$

Вводя $E = |E|e^{i\tau}$, сведем это уравнение к

$$A' \frac{B'_-}{B'_+} e^{-\pi\sigma + 2\sigma\tau} \sqrt{\frac{\nu^2 + [(a+b) + s\sigma]^2}{\nu^2 + [(a+b) - s\sigma]^2}} = 1 \quad (50)$$

и уравнению для (квазидискретного) спектра энергий

$$2\sigma \ln \left(\frac{|E|}{E_0} \right) = 2\theta + 2 \text{Arg } \Gamma(2i\sigma) - \psi'_+ + \psi'_- + \phi'_+ - \phi'_- - 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= \frac{|\Gamma(2i\sigma)|}{|\Gamma(-2i\sigma)|}, & B'_\pm &= \left| \Gamma\left(\pm i\sigma + \frac{1-s}{2} - ia\right) \right|, \\ \psi'_\pm &= \text{Arg} \Gamma\left(\pm i\sigma + \frac{1-s}{2} - ia\right), & \phi'_\pm &= \arctg \frac{(a+b) \pm s\sigma}{\nu}, \end{aligned} \quad (52)$$

положительная константа E_0 имеет размерность энергии, а $e' = 1$ ($e' = -1$) теперь также определяет физический (нефизический) лист. Виртуальные связанные состояния называют также квазистационарными или резонансными состояниями.

При $b = 0$ соотношения (50) и (51) принимают вид

$$\frac{|\Gamma((1-s)/2 - i(a+\sigma))|}{|\Gamma((1-s)/2 - i(a-\sigma))|} \sqrt{\frac{a+s\sigma}{a-s\sigma}} e^{-\pi\sigma+2\sigma\tau} = 1 \quad (53)$$

и

$$\begin{aligned} 2\sigma \ln\left(\frac{|E|}{E_0}\right) &= 2\theta + \pi \frac{1-s}{2} - \pi(1+2k) - 2\sigma\mathcal{C} + \arctg \frac{s\sigma}{\nu} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sigma}{n} - 2 \arctg \frac{2\sigma}{n} + \arctg \frac{2\sigma n}{n^2 + \nu^2} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Подчеркнем, что уравнение (54) зависит от μ и s . Также из (54) видно, что при увеличении a (т.е. при увеличении σ) уменьшается значение энергии и увеличивается число k . Это связано с тем, что на самом деле точка Дирака [43] в графене представляет собой предельную точку бесконечного числа резонансов [12].

При $\sigma \ll 1$ уравнение (53) имеет приближенное решение

$$\tau \approx -\frac{1+s}{4a} + \text{Im} \psi(ia) + \frac{\pi}{2}, \quad (55)$$

где $\psi(z)$ — пси-функция [42] и, в частности, $\tau \approx [1 + \text{cth}(\pi/2)]\pi/2 \approx (1 + 0.04)\pi$ при $a = 1/2$, $s = 1$; при $\sigma \ll 1$ уравнение (54) принимает вид

$$2\sigma \ln\left(\frac{|E|}{E_0}\right) = 2\theta - \pi(1+2k) - 2\sigma \left(\mathcal{C} + \frac{1-s}{2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2a} \text{cth} \pi a \right). \quad (56)$$

Видно, что уравнения (53) и (54) приближенно удовлетворяются вблизи $|E| = 0$ только в области $E < 0$ (действительно, при $a > \nu$, $\sigma > 0$ уравнение (53) удовлетворяется, если $e' = -1$, $\tau > \pi$), а правая часть (54) (и (56)) отрицательна. С учетом этих замечаний мы получили формулу для спектра энергий виртуальных связанных состояний при $\sigma \ll 1$:

$$E_{k,\theta,s} = E_0 \cos \tau \exp \left[-\frac{\pi(1+2k)}{2\sigma} + \frac{\theta}{\sigma} - \left(\mathcal{C} + \frac{1-s}{2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi \text{cth} \pi a}{2a} \right) \right], \quad (57)$$

где τ определяется формулой (55). Эти энергии как функции q имеют существенно особую точку при $q = q_c$ ($\sigma = 0$) [44], фактически при $a = a_{\text{cr}}$, что отражает масштабную инвариантность кулоновского потенциала [9], [13], [30], [31], а бесконечное число квазистационарных уровней обусловлено его дальнедействующим характером [12], [13], [30].

Частицы в виртуальных связанных состояниях находятся в течение длительного времени вблизи притягивающего кулоновского потенциала, их волновые функции имеют большие амплитуды вблизи кулоновского центра. Соответствующее решение уравнения Дирака на бесконечности $r \rightarrow \infty$ представляет расходящуюся волну (дырку) с $\text{Re} \sqrt{E^2} < 0$ и $\tau > \pi$. Энергетический спектр этих состояний квазидискретен. Выше было показано, что спектр состоит из ряда размытых уровней, ширина которых (определяемая мнимой частью $\text{Im} E_{k,\theta,s}$) связана с обратным временем жизни (скоростью распада) k -квазистационарного состояния. Квазидискретные уровни энергии являются нулями функции (54); последние, в отличие от нулей, соответствующих истинным уровням, находятся на нефизическом листе с $\text{Re} \sqrt{E^2} < 0$ и $\tau > \pi$. Из (53) следует, что $\sin \tau \sim 0.2 \cos \tau$ (при $\sigma \ll 1$), поэтому ширина квазистационарного состояния исчезающе мала, так как она пропорциональна $|E_{k,\theta,s}|$, и, следовательно, практически они являются связанными состояниями. В сверхкритической области волновые функции при $r \rightarrow 0$ осциллируют с частотой $2\sigma \ln 2|E|r$, что объясняется поведением $\Phi_{i\sigma}(a_1^s) \sim e^{2i\sigma \ln 2|E|r}$ при малых r . Такая ситуация напоминает падение частицы в центр поля в нерелятивистской квантовой механике [24], [45].

В релятивистской квантовой механике появление виртуальных связанных уровней влечет за собой перестройку вакуума. В графене, если возникающий виртуальный уровень пуст, электрон из заполненной валентной зоны (море Дирака) займет этот виртуальный уровень и частично экранирует заряд кулоновской примеси, в то время как возникшая (в валентной зоне) дырка уходит в бесконечность. Возникший виртуальный уровень может заполнить электрон в адатоме [46]; тогда электронно-дырочная пара не рождается, но вакуум при этом будет перестроен. Поскольку эффективный критический заряд q_c зависит от μ и s , на стабильность системы влияют магнитный поток и спин частицы.

5. ЛОКАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Экспериментально измеримой величиной является локальная плотность состояний (ЛПС) как функция энергии и расстояния от источника [12]. Используя волновую функцию $\Psi(t, \mathbf{r})$ в форме (8), определим ЛПС на единицу площади следующим образом:

$$N(E, r) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\Psi(t, \mathbf{r})|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} n_l(E, r), \quad (58)$$

$$n_l(E, r) = \frac{|f_1(r, E, l)|^2 + |f_2(r, E, l)|^2}{2|A_l(E)|^2 \pi r},$$

где $f_1(r, E, l)/A_l(E)$ и $f_2(r, E, l)/A_l(E)$ – дублеты, нормированные (на полуоси с мерой dr) путем наложения условия ортогональности по энергии, а $A_l(E)$ – коэффициент нормировки.

В области $\gamma \geq 1/2, q \leq q_u$ для ЛПС имеем

$$N_{\text{reg}}(E, r) = \frac{e^{\pi a e'}}{2\pi^2 r} \sum_l \frac{(2|E|r)^{2\gamma} |\Gamma(\gamma + 1 + i a e')|^2}{\Gamma^2(2\gamma + 1)} |\Phi_\gamma(a^s)|^2, \quad (59)$$

Рис. 1. Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r)$ при $a = 0.3$, $\mu = 0.1$, $s = 1$ и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б); на вставках – ЛПС вблизи $E \approx 0$ в увеличенном масштабе. СПС при $a = 0, \mu = 0$ приведена для сравнения (штриховая линия).

Рис. 2. Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r)$ при $a = 0.3$, $\mu = 0.1$, $s = -1$ и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б). СПС при $a = 0, \mu = 0$ приведена для сравнения (штриховая линия).

где суммирование проводится по l из области $\sqrt{(l + \mu + s/2)^2 - a^2} \geq 1/2$, $\Phi_{\gamma}(a^s) \equiv \Phi(\gamma + (1 - s)/2 - ie'a, 2\gamma + 1, -2i|E|r)$, а $N_{\text{reg}}(E, r)$ конструируется из регулярных функций в точке $r = 0$. В пределе $a = 0, \mu = 0, b = 0$ функции $\Phi_{\gamma}(a^s)$ сводятся к функциям Бесселя целого порядка, суммирование выполняется и формула (59) дает свободную плотность состояний (СПС): $N(E, r) = |E|/2\pi$. Отметим полезное соотношение, следующее из (19):

$$\gamma(\pm l, s = 1, \mu, a) = \gamma(\pm l + 1, s = -1, \mu, a). \quad (60)$$

Для малых эффективных зарядов ЛПС на различных расстояниях r приведены на рис. 1, 2.

В области $1/2 > \gamma > 0$ ($q_u < q < q_c$) ЛПС конструируется из решений (37):

$$N_{\xi}(E, r) = \frac{1}{2\pi r} \sum_l \frac{n_l^I - 4\xi |n_l^{\text{II}}| \{\cos(\text{Arg}[n_l^{\text{II}}]) + e'\gamma \sin(\text{Arg}[n_l^{\text{II}}])/a\}}{A(\gamma, E) + \xi^2 A(-\gamma, E) - 2\xi B(\gamma, E)}, \quad (61)$$

Рис. 3. ЛПС $N_\xi(E, r)$ для $l = -2$, $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = 1$ ($\gamma \approx 0.4269$) и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б).

Рис. 4. ЛПС $N_\xi(E, r)$ для $l = -1$, $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = -1$ ($\gamma \approx 0.4269$) и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б).

где суммирование проводится по l из области $1/2 > \sqrt{(l + \mu + s/2)^2 - a^2} > 0$,

$$n_l^I = \frac{2\nu(\nu + s\gamma)}{a^2} r^{2\gamma} |\Phi_\gamma(a^s)|^2 + \frac{2\nu(\nu - s\gamma)}{a^2} \xi^2 r^{-2\gamma} |\Phi_{-\gamma}(a^s)|^2,$$

$$n_l^{\text{II}} = \Phi_\gamma(a^s) \Phi_{-\gamma}^*(a^s), \quad \xi = \tan \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

и

$$A(\gamma, E) = \frac{2\pi e^{-\pi a e'} \Gamma(2\gamma + 1)^2 \nu(\nu + s\gamma)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i a e')|^2 (2|E|)^{2\gamma} a^2},$$

$$B(\gamma, E) = \frac{\pi e^{-\pi a e'} \Gamma(2\gamma + 1) \Gamma(-2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i a e')| |\Gamma(-\gamma + 1 + i a e')|}.$$

Если $a \neq 0$, выражения (59) и (61) содержат знак энергии e' , поэтому электронно-дырочная симметрия свободного случая теряется. Записав, например, для $s = 1$

Рис. 5. ЛПС $N_\theta(E, r)$ для $l = -1$ ($\sigma \approx 1.272$), $l = 0$ ($\sigma \approx 1.191$), $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = 1$ и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б); на вставках – ЛПС вблизи $E \approx 0$ в увеличенном масштабе.

Рис. 6. ЛПС $N_\theta(E, r)$ для $l = 0$ ($\sigma \approx 1.272$), $l = 1$ ($\sigma \approx 1.191$), $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = -1$ и $r = 0.3$ (а), $r = 1$ (б); на вставках – ЛПС вблизи $E \approx 0$ в увеличенном масштабе.

$\gamma_{l=0,-1} = \sqrt{(1/2 \pm \mu)^2 - a^2}$, видим, что парциальные члены с $l = 0, -1$ дают разные вклады в ЛПС в присутствии магнитного потока.

Отметим, что ЛПС проявляют пики при низких положительных энергиях для некоторых θ уже в докритической области эффективных зарядов $q < q_c$ (рис. 3, 4); эти пики обусловлены присутствием сингулярных (при $r \rightarrow 0$) решений (36) (ср. с работой [12]). Видно также, что в присутствии кулоновского потенциала притяжения спектральный вес состояний уменьшается в отрицательной области энергий и увеличивается в положительной области; эффект проявляется сильнее вблизи кулоновского центра.

В области сверхкритических эффективных зарядов $\gamma = i\sigma$, $0 \geq \theta \geq \pi$, используя дублет (47), получаем

$$N_\theta(E, r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \sum_l \frac{n_l^I(x) + 4\nu|n_l^{II}(x)| \cos[2\sigma \ln r + 2\theta + \text{Arg}(n_l^{II}(x))]}{n_l^I(\infty) + 4\nu|n_l^{II}(\infty)| \cos[2\theta - 2\sigma \ln(2|E|) + g(\sigma)]}. \quad (62)$$

Рис. 7. Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ при $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = 1$ и $\theta = 0.25\pi$ (а), $\theta = 0.5\pi$ (б).

Рис. 8. Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ при $a = 4/3$, $\mu = 0.1$, $s = -1$ и $\theta = 0.25\pi$ (а), $\theta = 0.5\pi$ (б).

где суммирование проводится по l из области $a^2 > (l + \mu + s/2)^2$,

$$\begin{aligned}
 n_l^{\text{I}}(x) &= \frac{a + se'\sigma}{a} \left(|\Phi_{i\sigma}(a^s)|^2 + \left| \frac{s\sigma - ae'}{\nu} \right|^2 |\Phi_{i\sigma}(a^s + s)|^2 \right) + \\
 &\quad + \frac{a - se'\sigma}{a} \left(|\Phi_{-i\sigma}(a^s)|^2 + \left| \frac{s\sigma + ae'}{\nu} \right|^2 |\Phi_{-i\sigma}(a^s + s)|^2 \right), \\
 n_l^{\text{II}}(x) &= \frac{(\nu + is\sigma)\Phi_{i\sigma}(a^s)\Phi_{-i\sigma}^*(a^s)}{a^2}, \quad n_l^{\text{I,II}}(\infty) = n_l^{\text{I,II}}(x)|_{x \rightarrow \infty}, \\
 g(\sigma) &= \text{Arg} \left[\frac{\Gamma^2(2i\sigma + 1)}{\Gamma(1 + i\sigma + isa'e')\Gamma(1 + i\sigma - isa'e')} \right] + \text{arctg} \frac{s\sigma}{\nu}.
 \end{aligned}$$

При $a \neq 0$ локальные плотности состояний $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ существенно различаются в докритической ($\gamma > 0$) и сверхкритической ($\gamma = i\sigma$) областях. Главное различие состоит в том, что в сверхкритической области ЛПС проявляют резонансы при отрицательных энергиях (57) ширины $\sim |E_{k,\theta,s}|$

Рис. 9. ЛПС $N_{\xi+\theta}(E, r) = N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ для $l = 0$ ($\gamma \approx 0.4472$) и $l = -1$ ($\sigma \approx 0.0028$); на вставке – ЛПС вблизи $E \approx 0$ в увеличенном масштабе (а). Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ (б). На всех рисунках $a = 0.40001$, $\mu = 0.1$, $r = 1$, $s = 1$.

Рис. 10. ЛПС $N_{\xi+\theta}(E, r) = N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ для $l = -1$ ($\gamma \approx 0.4472$), $l = 0$ ($\sigma \approx 0.0028$) (а). Полная ЛПС $N(E, r) = N_{\text{reg}}(E, r) + N_{\xi}(E, r) + N_{\theta}(E, r)$ (б). На всех рисунках $a = 0.40001$, $\mu = 0.1$, $r = 1$, $s = -1$.

(см. рис. 5, 6); эти резонансы возникают из-за осцилляций волновых функций при $r \rightarrow 0$ и затухают с увеличением расстояния от кулоновского центра [12].

Резонансы в ЛПС, которые отчетливо видны на рис. 5, 6, можно непосредственно ассоциировать с рождением позитронов в задаче релятивистской квантовой механики [24], [46]. Рис. 7, 8 показывают, что в области, где доминируют резонансы, вклад в полную ЛПС (данный на рис. 3, 4) сильно подавлен, тогда как при положительных энергиях полным ЛПС свойственно осциллирующее поведение (см. также работу [12]). Рис. 9, 10 демонстрируют существование единственного резонанса при отрицательных энергиях (но вблизи $E = 0$) для $\sigma \rightarrow 0$, $\theta = \pi/2$ и только для $s = 1$, что полностью согласуется с (57).

Благодарности. Автор выражает благодарность К. Ю. Ли за помощь при выполнении численных расчетов.

Список литературы

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [2] Р. Прендж, С. Гирвин (ред.), *Квантовый эффект Холла*, Мир, М., 1989.
- [3] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Teaneck, NJ, 1990.
- [4] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:5 (1990), 503–506.
- [5] M. G. Alford, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:10 (1989), 1071–1074.
- [6] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Science*, **306**:5696 (2004), 666–669, arXiv: cond-mat/0410550.
- [7] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 109–162, arXiv: 0709.1163.
- [8] N. M. R. Peres, *Rev. Modern Phys.*, **82**:3 (2010), 2673–2700, arXiv: 1007.2849.
- [9] V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, A. H. Castro Neto, *Rev. Modern Phys.*, **84**:3 (2012), 1067–1125, arXiv: 1012.3484.
- [10] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature*, **438**:7065 (2005), 197–200, arXiv: cond-mat/0509330.
- [11] Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:10 (2007), 106802, 4 pp., arXiv: 0705.1102.
- [12] V. M. Pereira, J. Nilsson, A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:16 (2007), 166802, 4 pp., arXiv: 0706.2872.
- [13] A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, L. S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:23 (2007), 236801, 4 pp., arXiv: 0705.4663.
- [14] I. F. Herbut, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:6 (2010), 066404, 4 pp., arXiv: 0909.4231.
- [15] A. K. Geim, K. S. Novoselov, *Nature Mater.*, **6**:3 (2007), 183–191.
- [16] J. Gonzarlez, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano, *Nucl. Phys. B*, **424** (1994), 595–618; *J. Low Temp. Phys.*, **99**:3–4 (1995), 287–292.
- [17] R. Jackiw, A. I. Milstein, S.-Y. Pi, I. S. Terekhov, *Phys. Rev. B*, **80**:3 (2009), 033413, 3 pp., arXiv: 0904.2046.
- [18] I. S. Terekhov, A. I. Milstein, V. N. Kotov, O. P. Sushkov, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:7 (2008), 076803, 4 pp., arXiv: 0708.4263.
- [19] И. В. Тютин, *Рассеяние электронов соленоидом*, препринт № 27, ФИАН, М., 1974, arXiv: 0801.2167.
- [20] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН*, **105**:3–4 (1971), 403–440.
- [21] J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein, *Phys. Rep.*, **38**:5 (1978), 227–361.
- [22] M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rep. C*, **85**:2 (1982), 51–122.
- [23] T. Cowan, H. Backe, K. Bethge, H. Bokemeyer, H. Folger, J. S. Greenberg, K. Sakaguchi, D. Schwalm, J. Schweppe, K. E. Stiebing, P. Vincent, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:5 (1986), 444–447.
- [24] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin, 2009.
- [25] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **116**:2 (1998), 277–287.
- [26] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 250–262.
- [27] V. R. Khalilov, C.-L. Ho, *Ann. Phys.*, **323**:5 (2008), 1280–1293, arXiv: 0708.3131.
- [28] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, Yu. A. Sitenko, *Riv. Nuovo Cimento*, **6**:5 (1983), 1–90.
- [29] A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, L. S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:24 (2007), 246802, 4 pp., arXiv: 0708.0837.

- [30] O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, *Phys. Rev. B*, **80**:16 (2009), 165429, 14 pp., arXiv: 0907.5409.
- [31] K. S. Gupta, S. Sen, *Modern Phys. Lett. A*, **24**:2 (2009), 99–107, arXiv: 0805.3433.
- [32] Б. Л. Воронов, Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 41–84.
- [33] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [34] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [35] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B*, **319**:1–3 (1993), 332–338.
- [36] V. R. Khalilov, K.-E. Lee, *J. Phys. A*, **44**:20 (2011), 205303, 15 pp.
- [37] J.-N. Zhang, *Coulomb screening of 2D massive Dirac fermions*, arXiv: 1010.3148.
- [38] V. R. Khalilov, С. Л. Но, *Modern Phys. Lett. A*, **13**:8 (1998), 615–622, arXiv: hep-th/9801012.
- [39] V. R. Khalilov, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 012105, 6 pp., arXiv: quant-ph/0406033.
- [40] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 132–139.
- [41] В. Р. Халилов, Ки Ын Ли, *ТМФ*, **169**:3 (2011), 368–390.
- [42] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [43] A. S. Mayorov, D. C. Elias, I. S. Mukhin, S. V. Morozov, L. A. Ponomarenko, K. S. Novoselov, A. K. Geim, R. V. Gorbachev, *Nano Lett.*, **12**:9 (2012), 4629–4634, arXiv: 1206.3848.
- [44] V. R. Khalilov, K.-E. Lee, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:29 (2012), 1250169, 14 pp.
- [45] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 4: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [46] A. H. Castro Neto, V. N. Kotov, J. Nilsson, V. M. Pereira, N. M. R. Peres, B. Uchoa, *Solid State Commun.*, **149**:27–28 (2009), 1094–1100, arXiv: 0812.2072.

Поступила в редакцию 22.11.2012,
после доработки 15.01.2013