Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Бородихин, Фазовые переходы и особенности роста зародышей новой фазы вещества, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 126–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:00:37

© 2013 г.

В. Н. Бородихин*

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И ОСОБЕННОСТИ РОСТА ЗАРОДЫШЕЙ НОВОЙ ФАЗЫ ВЕЩЕСТВА

Выполнено описание фазовых переходов с помощью одномерного дробно-дифференциального кинетического уравнения типа Фоккера–Планка. Найдено общее решение, описывающее рост зародышей при фазовых переходах во фрактальной среде.

Ключевые слова: фазовые переходы дробного порядка, рост зародышей, дробно-дифференциальное уравнение Фоккера–Планка.

DOI: 1010.4231/tmf8449

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что кинетика фазовых переходов может быть изучена с помощью уравнения Фоккера–Планка, в частности оно описывает рост зародышей новой фазы вещества, возникающих при фазовых переходах первого рода [1], [2].

Представляет интерес применение дробно-дифференциального обобщения кинетического уравнения для описания фазовых переходов, оно позволит учитывать некоторые дополнительные эффекты, которые могут происходить во фрактальных средах. В частности, это позволит исследовать эффекты нелокальности, памяти предыдущих состояний системы и некоторые другие эффекты [3].

Появление новых особенностей может быть связано с проявлением фрактальности сред. Фрактальные структуры могут являться следствием многих необратимых процессов и явлений, таких, например, как ударно-волновые явления в конденсированных средах [4], диффузия, агрегирование, разрушение, динамический хаос, растворение, турбулентное движение таких сред, как плазма, жидкие металлы, соленая вода и др. [3], [5].

Еще можно упомянуть системы, обладающие топологией перколирующего фрактального множества, а именно взаимодействие полей и токов в дальнем хвосте магнитосферы [6], процессы самоорганизации в низкотемпературной и замагниченной плазме [7], формирование фрактальной “паутины” из проводящих элементов в самоорганизующихся органических полимерах [8]. В данных системах возникают далекодействующие корреляционные эффекты, проявляющиеся в негауссовом поведении кинетических процессов вблизи неравновесных квазистационарных состояний.

* Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: borodikhin@inbox.ru

Кроме того, в таких системах могут возникать эффекты неаддитивности и самоорганизующей критичности [9].

2. ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В работе [10] получено дробно-дифференциальное обобщение одномерного кинетического уравнения Фоккера–Планка

$$\frac{\partial^\gamma f}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} (Af) + \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial (-x)^{\alpha_1}} (Bf), \quad (1)$$

где A – функция скорости дрейфа, B – диффузная функция, f – функция распределения, $\partial^\alpha / \partial (-x)^\alpha$ – сумма правой и левой дробных производных Лиувилля, $0 < \alpha < 2$, $\alpha < \alpha_1 < 2$.

В случае $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\gamma = 1$ данное уравнение переходит в обычное кинетическое уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (Af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Bf). \quad (2)$$

Функция распределения $f(t, a)$, если рассматривать ее как распределение зерен новой фазы вещества по размерам в теории фазовых переходов, обычно нормируется таким образом, что

$$N(t) = \int_0^\infty f(t, a) da, \quad (3)$$

где $N(t)$ – число зерен в единице объема.

Перепишем уравнение (1), используя для удобства записи начальных условий в левой части дробную производную Капуто [11]

$${}^c D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_p^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\gamma+1-n}}, \quad n - 1 < \gamma < n, \quad (4)$$

где $f^{(n)}$ – соответствующая производная целого порядка, Γ – гамма-функция, а в правой части мы будем использовать производную Римана–Лиувилля

$$D_{b+}^\alpha f(a) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{da} \int_b^a \frac{f(z) dz}{(a - z)^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5)$$

В итоге получим уравнение

$${}^c D_t^\gamma f(t, a) = D_{b+}^\alpha [A(a)f(t, a)] + D_{b+}^{\alpha_1} [B(a)f(t, a)]. \quad (6)$$

Поскольку производные Капуто и Римана–Лиувилля совпадают в пределе целого порядка, вид уравнения при $\gamma = 1$ совпадает с уравнением (2).

Используя обобщенное правило Лейбница для дробной производной от произведения функций [12], перепишем уравнение (6) в виде

$${}^c D_t^\gamma f(t, a) = \tilde{A}^\alpha(a) f(t, a) + \tilde{A}^{\alpha-1}(a) \frac{df(t, a)}{da} + \tilde{B}^{\alpha_1}(a) f(t, a) + \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a) \frac{df(t, a)}{da}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\alpha(a) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1)} D_{b+}^\alpha A(a), & \tilde{A}^{\alpha-1}(a) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} D_{b+}^{\alpha-1} A(a), \\ \tilde{B}^{\alpha_1}(a) &= \frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1-1)} D_{b+}^{\alpha_1} B(a), & \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a) &= \frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1)} D_{b+}^{\alpha_1-1} B(a).\end{aligned}$$

Общее решение будем искать в виде

$$f(t, a) = f_1(t) f_2(a). \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и поделим на (8), получим

$$\frac{1}{f_1(t)} {}^c D_t^\gamma f_1(t) = \tilde{A}^\alpha(a) + \tilde{B}^{\alpha_1}(a) + (\tilde{A}^{\alpha-1}(a) + \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a)) \frac{1}{f_2(a)} \frac{df_2(a)}{da} = -\lambda. \quad (9)$$

Таким образом, приходим к системе двух уравнений для функций $f_1(t)$ и $f_2(a)$ с разделяющимися переменными. Производную Капуто можно записать в виде дробного дифференциала [3]:

$$\frac{d^\gamma f_1}{f_1} = -\lambda dt^\gamma, \quad (10)$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \frac{-\lambda - \tilde{A}^\alpha(a) - \tilde{B}^{\alpha_1}(a)}{\tilde{A}^{\alpha-1}(a) + \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a)} da. \quad (11)$$

Общее решение есть произведение решений уравнений (10) и (11). В итоге получим

$$f(t, a) = C t^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(t-t_0)^\gamma) e^{\varphi(a)}, \quad (12)$$

где

$$\varphi(a) = \int \frac{-\lambda - \tilde{A}^\alpha(a) - \tilde{B}^{\alpha_1}(a)}{\tilde{A}^{\alpha-1}(a) + \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a)} da,$$

$E_{\gamma, \gamma}$ – обобщенная функция Миттаг-Леффлера [13], являющаяся решением (10), C , λ – соответственно константа интегрирования и собственное значение уравнения, определяемые из начальных и граничных условий.

На рис. 1 показаны графики зависимости решения (12) $f(t)$ от времени ($\lambda = 1$, $C = 1$, $t_0 = 0$, $e^{\varphi(a)} = 1$) для трех значений $\gamma = 1, 3/4, 1/4$.

Видно, что чем меньше γ , тем более резко при малых t спадает функция. Из-за множителя $1/t^{1-\gamma}$ функция в нуле обращается в бесконечность. Графики при $\gamma = 1/4, 3/4$ показаны от $t = 0.01$. При $\gamma = 1$ обобщенная функция Миттаг-Леффлера переходит в экспоненциальную функцию, множитель $1/t^{1-\gamma}$ становится равным единице и в нуле функция принимает конечное значение. Графики зависимости решения от a приведены в следующем разделе.

3. РОСТ ЗАРОДЫШЕЙ ПРИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

Рост зародышей при фазовых переходах первого рода, в частности на начальной стадии, описывается уравнением Фоккера–Планка [1], [2]. Вместо термодинамической вероятности образования зародыша можно говорить о пропорциональной ей

 Рис. 1. Графики зависимости от времени функции (12) при различных γ .

равновесной функции распределения существующих в среде зародышей по размерам

$$f_0(a) \sim e^{-R_{\min}/T}, \quad (13)$$

где $R_{\min}$ — минимальная работа, которую необходимо затратить для образования зародыша заданного размера, T — температура. Соответствующее термодинамическое равновесие относится к временам, малым по сравнению со временем образования критических зародышей, за которым следует переход в новую фазу.

Элементарным актом, изменяющим размер зародыша, является присоединение или потеря одной молекулы. Данное изменение следует считать малым, поскольку зародыши в излагаемой теории являются микроскопическими образованиями. Размер зародыша $a < a_c$, где a_c — критический размер зародыша, соответственно зародыши больших размеров развиваются в новую фазу вещества. Таблица значений размеров критических зародышей для воды в зависимости от давления приведена, например, в работе [1], они варьируются от $1.6 \cdot 10^{-5}$ м до $1.6 \cdot 10^{-10}$ м.

Таким образом, мы можем описывать рост зародышей в пространстве размеров кинетическим уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial a}, \quad (14)$$

где $s = Af - B(\partial f/\partial a)$ — плотность потока в пространстве размеров. Коэффициенты A и B связаны соотношением, следующим из условия обращения величины s в нуль для равновесного распределения [2]. Таким образом, $A = -(B/f_0)(\partial f_0/\partial a)$ или, что эквивалентно, $A = -(B/T)R'_{\min}$.

Для фазовых переходов равновесная функция $f_0(a)$ имеет вид распределения Гаусса ($a < a_c$) [2]:

$$f_0(a) = f_0(a_c) \exp\left(\frac{4\pi\sigma}{k_B T}(a - a_c)^2\right), \quad (15)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения,

$$f_0(a_c) = C_0 \exp\left(\frac{-4\pi\sigma a_c^2}{3k_B T}\right), \quad (16)$$

C_0 – некая константа, k_B – постоянная Больцмана. Функцию f_0 в виде (15) можно использовать только при условии $a < a_c$.

Распределение (15) может быть получено из (12) следующим образом. Коэффициент $A(a)$ выберем в виде $a_c A_1 A_2 / (A_1 a_c a - A_2 a^2)$, где A_1, A_2 – константы, коэффициентом $B(a)$ пренебрежем, что соответствует обратимым процессам. Равновесная функция f_0 применима только на стадии до возникновения фазового перехода, где данное приближение является допустимым на микроскопическом уровне. На стадии фазовых переходов необходимо учитывать коэффициент диффузии. После интегрирования получим $\varphi(a) = \lambda a^3 / (3A_1 a_c) - \lambda a^2 / (2A_2)$, здесь мы пренебрегли более медленной логарифмической зависимостью от a . Сопоставляя полученное выражение с (13) и работой, которую необходимо затратить для создания при фазовом переходе сферического зародыша радиуса a [2], приходим к выражению

$$R_{\min} = -\frac{8\pi a^3 \alpha}{3a_c} + 4\pi a^2 \alpha, \quad (17)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения. Значение $a = a_c$ отвечает максимуму функции $R_{\min}(a)$. Вблизи данного максимума

$$R_{\min} = \frac{4\pi}{3} \alpha a_c^2 - 4\pi \alpha (a - a_c)^2. \quad (18)$$

В итоге приходим к распределению (15). Оно может быть выведено из (12) непосредственно, если выбрать коэффициент $A(a)$ в виде $A(a) = -A_0 / (a - a_c)$ и пренебречь более медленной логарифмической зависимостью после интегрирования. При этом возникновение зародышей различного размера рассматривается в среде, которая при этом считается равновесной. Но поскольку состояние метастабильной фазы не отвечает полному статистическому равновесию, то такое рассмотрение относится к временам, малым по сравнению с временем (обратной вероятности) образования критических зародышей, за которым следует переход в новую фазу ($a < a_c$) [2]. В случае сложных, неаддитивных систем функция $f_0(a)$ может иметь вид распределения Тсаллиса [14], которое определяется через деформированную экспоненту $\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]_+^{1/(1-q)}$, $[y]_+ = \max(y, 0)$:

$$f_0(a) = C_1 [C_2 (a - a_c)^2 + 1]^{1/(1-q)}, \quad (19)$$

где C_1 – константа, $C_2 = (1 - q)4\pi\sigma/T$, q – показатель неаддитивности. В пределе $q \rightarrow 1$ данное распределение переходит в (15).

Распределение (19) может быть получено из (12) в приближении факторизации. Для этого коэффициент $A(a)$ выберем в виде $A(a) = 1 / (C_2 (a - a_c)^2 + 1)$, $\alpha = 1$, $\lambda = 0$, коэффициентом $B(a)$ пренебрежем (что является допустимым на микроскопическом уровне, поскольку распределение соответствует обратимым процессам до стадии возникновения фазовых переходов). Получим

$$\varphi(a) = C \ln(C_2 (a - a_c)^2 + 1) + C_3,$$

C_3 – константа. Полагая $C = 1/(1 - q)$, получим функцию $f(a)$ в виде (19) ($C_1 = e^{C_3}$). Данное распределение также рассматривается на временах, малых по сравнению с временем образования критических зародышей.

Равновесное распределение может иметь вид распределения Леви [15] (которое также является одним из возможных решений дробно-дифференциального уравнения Фоккера–Планка [3]) или какой-либо другой соответствующий вид.

Общее условие для равновесного состояния дробно-дифференциального кинетического уравнения (6) с учетом свойств производной Капуто имеет вид

$${}^c D_t^\gamma f(t, a) = 0, \quad (20)$$

или

$$D_{b+}^\alpha [A(a)f(t, a)] + D_{b+}^{\alpha_1} [B(a)f(t, a)] = 0. \quad (21)$$

Отсюда с учетом свойств дробного дифференцирования и интегрирования следует связь между коэффициентами $A(a)$ и $B(a)$ ($\alpha_1 = 2\alpha$)

$$B(a) = -\frac{1}{f_0} I_a^\alpha A(a) f_0(a), \quad (22)$$

где

$$I_a^\alpha F(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y F(a)(y-a)^{\alpha-1} da \quad (23)$$

– дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α от некоторой функции $F(a)$.

Коэффициент $A = (d^\gamma a / dt^\gamma)_{\text{macro}}$ определяется внешними макроскопическими параметрами, в частности концентрацией вещества. Для слабых растворов концентрация c_0 насыщенного раствора над сферической поверхностью радиуса a растворяемого вещества определяется как [2]

$$c_0 = c_\infty + \frac{a_c}{a} (c - c_\infty), \quad (24)$$

где $a_c = 2\alpha v c_\infty / T(c - c_\infty)$ – критический радиус, v – молекулярный объем вещества зародыша, c_∞ – концентрация насыщенного раствора над плоской поверхностью растворяемого вещества.

Подвод вещества к растущему надкритическому зародышу осуществляется диффузией из окружающего раствора. В стационарном режиме сферически-симметричное распределение концентрации $c(r)$ вокруг зародыша радиуса a в среде, обладающей определенными особенностями, в частности фрактальностью, определяется решением дробного диффузного уравнения с лапласианом дробного порядка

$$D(-\Delta)^{2-\alpha} c(r) = 0, \quad (25)$$

где D – коэффициент диффузии, $(-\Delta)^{2-\alpha} c(r) = -\Delta I_d^\alpha c(r)$, где I_d^α – потенциал Рисса [16], $\Delta = (1/r)(\partial^2 / \partial r^2)r$. Поскольку рассматривается сферически-симметричный случай с одной переменной, вместо потенциала Рисса будем использовать дробную производную Капуто с конечными пределами. Граничные условия для уравнения (25) имеют вид $c(\infty) = c$, $c(a) = c_0$.

Решение уравнения (25) с учетом граничных условий имеет вид

$$c(r) = \frac{c_0 a^{1+\alpha}}{r^{1+\alpha}}. \quad (26)$$

Дробный диффузный поток по направлению к зародышу

$$S^\gamma = 4\pi r^2 D \left. \frac{\partial^\alpha c}{\partial r^\alpha} \right|_{r=a} = \frac{4\pi D B_z(-\alpha, 1+2\alpha)\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (c_\infty a^{2-\alpha} + a_c a^{1-\alpha}(c - c_\infty)), \quad (27)$$

где B_z – неполная бета-функция [17].

Таким образом, имеем

$$A(a) = \left(\frac{d^\gamma a}{dt^\gamma} \right)_{\text{macro}} = \frac{S^\gamma v}{4\pi a^2} = \frac{4\pi D B_z(-\alpha, 1+2\alpha)\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{c_\infty}{a^\alpha} + \frac{a_c(c - c_\infty)}{a^{1+\alpha}} \right). \quad (28)$$

В соответствии с (22) для равновесной функции вида (15), интегрируя в пределах от 0 до a_c , получим функцию $B(a)$:

$$B = \frac{4\pi D B_z(-\alpha, 1+2\alpha)\Gamma(\alpha)\alpha}{f_0(a)\Gamma(1-\alpha)} \left(c_\infty {}_2F_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha+1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \sigma a_c^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{(c - c_\infty)e^{\alpha\pi i}}{4\pi \sin(-\alpha\pi)} {}_2F_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha+1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \sigma a_c^2\right) \right), \quad (29)$$

где $\sigma = 4\pi\lambda/(k_B T)$, ${}_2F_2$ – обобщенный гипергеометрический ряд [18]. Отметим, что для второго слагаемого интегрирование производилось по петле Похгаммера [16].

Используя (19), (22) и (28), получим

$$B(a) = \frac{4\pi D B_z(-\alpha, 1+2\alpha)\Gamma^2(\alpha)\alpha C_1}{C_2^{1-q} f_0(a)} \frac{(\sqrt{C_2})^{2/(1-q)}}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \left(c_\infty {}_3F_2\left(-\frac{1}{1-q}; \frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha+1}{2}; \frac{1}{2}; 1; -\frac{a_c^2}{C_2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(c - c_\infty)e^{\alpha\pi i}}{4\pi \sin(-\alpha\pi)} {}_3F_2\left(-\frac{1}{1-q}; \frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha+1}{2}; 0; \frac{1}{2}; -\frac{a_c^2}{C_2}\right) \right), \quad (30)$$

где ${}_3F_2$ – обобщенный гипергеометрический ряд [18]. Ряд ${}_2F_2$ является сходящимся. Чтобы сходиллся ряд ${}_3F_2$, необходимо выполнение условия $|a_c^2/C_2| < 1$.

Рассмотрим общее стационарное решение уравнения (7)

$$f(a) = C \exp \left[- \int \frac{\lambda + \tilde{A}^\alpha(a) + \tilde{B}^{\alpha_1}(a)}{\tilde{A}^{\alpha-1}(a) + \tilde{B}^{\alpha_1-1}(a)} da \right], \quad (31)$$

где C – константа. (Распределения (15), (19) могут быть получены непосредственно из (31).)

Граничные условия при $a \rightarrow 0$ можно выбрать в виде $f/f_0 \rightarrow 1$, а при $a \rightarrow \infty$ – в виде $f/f_0 = 0$.

Покажем, что дробно-дифференциальное уравнение Фоккера–Планка действительно описывает фазовые переходы. В силу универсальности фазовых переходов и для общности результатов рассмотрим следующее решение.

Выберем коэффициент дрейфа в виде

$$A(a) = \frac{1}{T(4B_0 a^3 + 2a_0 t - h)}. \quad (32)$$

Рис. 2. Графики функций распределения в точке фазового перехода для различных α .

Подставим (32) в (31) при $\alpha = 1$, пренебрежем коэффициентом диффузии B , а также производной A^α в числителе, получим решение в виде

$$f(a) = f_1 e^{-F/T}, \quad (33)$$

где F – свободная энергия,

$$F = B_0 \lambda a^4 + a_0 \lambda t a^2 - h \lambda a, \quad (34)$$

где $t = (T - T_c)/T_c$ – разность температур, T_c – критическая температура фазового перехода, B_0 , a_0 , λ , f_1 – константы, h – внешнее поле. Здесь мы пренебрегли слагаемыми с более медленной зависимостью от a . Зависимость (34) для значений $t = -0.1$, $a_0 = 1$, $B_0 = 0.01$, $f_1 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0.1$ показана на рис. 2. В данной системе единиц температура измеряется в единицах критической температуры ($T_c = 1$), параметр порядка a в единицах a_c ($a_c = 1$), индукция магнитного поля h , коэффициенты B_0 , a_0 в единицах $k_B T_c$, λ – безразмерный параметр, $\lambda = 1$.

Если при заданной температуре $t < 0$ менять поле, то при прохождении им нулевого значения возникает фазовый переход первого рода. На рис. 3 приведена зависимость параметра порядка a от внешнего поля. Прерывистой линией отмечена область метастабильных состояний. Таким образом, при $\alpha = 1$ уравнение (6) действительно описывает фазовые переходы первого рода.

Рассмотрим случай дробных α . Выберем $A(a)$ также в виде (32). Подставим (32) в (31) при $\alpha = 0.75$, пренебрежем коэффициентом диффузии B , а также производной A^α в числителе, получим решение в виде (34), где

$$F = F_1 a^{15/4} + F_2 t a^{7/4} - h F_3 a^{3/4}, \quad (35)$$

Рис. 3. График зависимости параметра порядка от внешнего поля ($\alpha = 1$).

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1 - 3.2 \frac{\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda B_0}{x_0^2}, \\
 F_2 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1.14 - 5.7 \frac{\Gamma(2 + \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda a_0}{x_0^2}, \\
 F_3 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1.33 - 8 \frac{\Gamma(2 + \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda a_0}{x_0^2}, \\
 x_0 &= -1 + 3 \frac{\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы также пренебрегли слагаемыми с более медленной зависимостью от a . Данное решение показано на рис. 2. Видно, что для дробного порядка решение спадает более плавным образом, как бы размывается. Вершина пика также расположена ниже, чем при $\alpha = 1$. Зависимость параметра порядка a от внешнего поля практически идентична приведенной на рис. 3, и соответственно фазовый переход имеет место в данной системе. Отличие проявляется в увеличении ширины критической области для индекса α нецелого порядка.

Для $\alpha = 0.9$ получим

$$F = F_1 a^{39/10} + F_2 t a^{19/10} - h F_3 a^{9/10}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1 - 3.077 \frac{\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda B_0}{x_0^2}, \\
 F_2 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1.05 - 5.26 \frac{\Gamma(2 + \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda a_0}{x_0^2}, \\
 F_3 &= \Gamma(2 - \alpha) \left(1.11 - 6.67 \frac{\Gamma(2 + \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(3 - \alpha)} \right) \frac{\lambda a_0}{x_0^2}.
 \end{aligned}$$

Решение для $\alpha = 0.9$ показано на рис. 2. Видно, что с уменьшением α решения спадают более плавным образом, пик расширяется. При $\alpha = 0.9$ зависимость параметра порядка a от внешнего поля аналогична вышеупомянутым зависимостям для

$\alpha = 0.75, 1$. С уменьшением α происходит расширение критической области. Так, для $\alpha = 1$ величина критического поля [19], определяющая границы интервала, на котором возникают три вещественных корня уравнения параметра порядка (рис. 3), при указанных выше параметрах составляет $h_t = 0.172$, для $\alpha = 0.9 - h_t = 0.178$, а для $\alpha = 0.75 - h_t = 0.182$.

Таким образом, дробно-дифференциальное уравнение типа Фоккера–Планка действительно описывает фазовые переходы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При фазовых переходах, в частности при описании роста зародышей во фрактальной среде, наблюдается конкуренция двух странных процессов. С одной стороны, это так называемые случайные блуждания во фрактальном времени или, точнее, случайные вариации размеров, связанные с фрактальным временем. Данные процессы являются немарковскими и обладают памятью среды: последующие вариации размеров связаны с предыдущими изменениями. С другой стороны, имеют место процессы, описываемые пространственной дробной производной, – так называемые процессы Леви, связанные с нелокальностью. С теоретической точки зрения это подразумевает мгновенные скачки размеров зародышей. Данные скачки размеров должны возникать с большей вероятностью, чем изменения, связанные с фрактальным временем, что может привести к расходимости среднеквадратичного изменения размеров зародышей (об устранении расходимости см. [20]).

Конкуренция между двумя вышеупомянутыми процессами может привести к сложной структуре изменения размеров частиц. К примеру, размер зародыша может долгое время не меняться, а затем проявить резкую активность, в соответствии с картиной так называемого перемежаемого типа движения.

Кроме того, в работе показано, что при фазовых переходах во фрактальной среде может иметь место деформация статистики, связанная с проявлением негауссова распределения и эффектов неаддитивности.

Список литературы

- [1] Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ*, **12** (1942), 525–538.
- [2] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, Физматлит, М., 2002.
- [3] V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing, 2010.
- [4] Г. И. Капель, С. В. Разоренов, А. В. Уткин, В. Е. Фортов, *Ударно-волновые явления в конденсированных средах*, Янус-К, М., 1996.
- [5] Л. Пьетронеро, Э. Тозатти (ред.), *Фракталы в физике*, Труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля 1985), Мир, М., 1988.
- [6] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi, G. Zimbardo, P. Veltri, *J. Geophys. Res.*, **106**:A4 (2001), 6291–6307.
- [7] K. Rypdal, J.-V. Paulsen, O. E. Garcia, S. V. Ratynskaia, V. I. Demidov, *Nonlin. Processes Geophys.*, **10** (2003), 139–149.
- [8] A. V. Milovanov, J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. B*, **66**:13 (2002), 134505, 11 pp.
- [9] А. И. Олемской, *Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория*, Эдиториал УРСС, М., 2009.

- [10] G. M. Zaslavsky, “Fractional kinetics of Hamiltonian chaotic systems”, *Application of Fractional Calculus in Physics*, ed. R. Hilfer, World Sci., River Edge, NJ, 2000, 203–239.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, **198**, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [12] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in Science and Engineering, **111**, Academic Press, New York, London, 1974.
- [13] A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold, *The H-Function. Theory and Application*, Springer, Dordrecht, 2010.
- [14] K. Tsallis, *Introduction in Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*, Springer, Berlin, 2009.
- [15] Б. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, ИКИ, М., 2002.
- [16] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [17] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 3: *Специальные функции. Дополнительные главы*, Физматлит, М., 2003.
- [18] H. Bateman, *Higher Transcendental Function*, v. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 5: *Статистическая физика*, Физматлит, М., 2002.
- [20] Л. М. Зелёный, А. В. Милованов, *УФН*, **174**:8 (2004), 809–852.

Поступила в редакцию 2.12.2012,
после доработки 7.04.2013