Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, Б. Тироцци, А. Ю. Хренников, С. де Шмедт, p -Адические динамические системы, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 349–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:13:12

© 1998 г.

С. Альбеверио*, Б. Тироцци†,
А. Ю. Хренников‡, С. де Шмедт§

p -АДИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Исследуются динамические системы в неархимедовых числовых полях (т.е. в полях с неархимедовыми нормами). Основные результаты относятся к полям p -адических чисел и комплексных p -адических чисел. Показано, что даже простейшие p -адические динамические системы обладают интересными свойствами. У них существуют аттракторы, диски Зигеля и так называемые “пушистые” циклы. Простое число p играет роль параметра рассматриваемой динамической системы. Поведение итераций зависит от этого параметра. Изменяя p , мы можем существенно преобразить поведение системы, так что аттракторы могут стать центрами циклов Зигеля и наоборот, а циклы различной длины могут появиться или исчезнуть.

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение почти 100 лет после открытия p -адических чисел они рассматривались лишь как объекты чистой математики. Однако в последние годы много приложений этих чисел в теоретической физике было предложено И. В. Воловичем, П. Фройндом, Э. Виттенем, Дж. Паризи, И. Я. Арефьевой, Е. Маринари, Б. Драговичем (теория струн [1–5]), В. С. Владимировым, И. В. Воловичем, Е. И. Зеленовым (квантовая механика [6]), А. Ю. Хренниковым (наблюдаемые, принимающие p -адические значения [7]) и другими учеными (см. библиографию в книгах [6, 8]). Ряд моделей в p -адической физике не укладывается в рамки колмогоровских аксиом теории вероятностей [9]. Новый класс вероятностных моделей, так называемые p -адические вероятностные модели, исследован в книге [8]. p -Адическая вероятность определяется в [8] как предел относительной частоты $\nu_N = n/N$ относительно p -адической метрики в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Существуют случайные последовательности, для которых относительные частоты ν_N

*Mathematical Institute, Ruhr-University D-44780, Bochum, Germany; SFB 237, Essen–Bochum–Düsseldorf; BiBoS Research Centre, D 33615 Bielefeld, Germany; CERFIM, Locarno, Switzerland

†Dipartimento di Fisica, Università di Roma (“La Sapienza”), Piazzale Aldo Moro, I-00185 Roma, Italy

‡Department of Mathematics, University of Växjö, 35195, Växjö, Sweden; Alexander von Humboldt Fellowship and SFB 237, Essen–Bochum–Düsseldorf, командирован МИЭМ

§Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Vrije Universiteit Brussel, B 1050, Belgium

не сходятся в $\mathbb{R}$, но имеют предел в каком-нибудь единственном поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. В некотором смысле это проявление хаоса. Последовательность, которая хаотична с “вещественной” точки зрения, может иметь определенную p -адическую структуру.

В данной работе мы изучаем динамические системы, порождаемые аналитическими функциями в неархимедовых числовых полях. Наиболее интересными примерами таких полей являются поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и комплексных p -адических чисел $\mathbb{C}_p$. Сначала мы доказываем общие теоремы, относящиеся к произвольному неархимедову полю $\mathbb{K}$, а затем применяем эти теоремы для исследования динамической системы $y = x^n$ в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}_p$. Уже эта простая динамическая система обладает весьма богатой структурой. Мы устанавливаем несколько фактов, справедливых при произвольном p . Однако многие свойства системы $y = x^n$ меняются при изменении p . Мы пока не смогли выявить какие-то общие аналитические закономерности¹⁾. Поэтому мы иллюстрируем свойства системы рядом примеров. Для дальнейшего исследования системы использован компьютер.

Раздел 2 данной работы содержит ряд сведений о неархимедовых полях и p -адических числах (см., например, [10, 11]), которые применяются в последующих разделах. Основы теории дискретных динамических систем изложены, например, в [12, 13]. Мы используем некоторые элементарные факты теории простых чисел (за деталями читатель отсылается к [14]).

Исследуемые динамические системы описаны в разделах 3–6. Раздел 3 содержит общие утверждения, в разделе 4 приведены результаты, относящиеся к динамическим системам над $\mathbb{C}_p$, и в разделе 5 обсуждаются особенности динамических систем над $\mathbb{Q}_p$. В разделе 6 приведены результаты численных расчетов с помощью ЭВМ.

Некоторые новые результаты в p -адической квантовой физике и в теории динамических систем изложены также в [15–22].

2. НЕАРХИМЕДОВЫ ПОЛЯ. ПОЛЯ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Всюду далее $\mathbb{K}$ обозначает некоторое полное неархимедово поле с нетривиальным модулем $|\cdot|_{\mathbb{K}}$ и нулевым характером.

Положим $\mathcal{U}_r(a) = \{x \in \mathbb{K}: |x - a|_{\mathbb{K}} \leq r\}$, $a \in \mathbb{K}$, $r > 0$, $\mathcal{U}_r^-(a) = \{x \in \mathbb{K}: |x - a|_{\mathbb{K}} < r\}$ и $S_r(a) = \{x \in \mathbb{K}: |x - a|_{\mathbb{K}} = r\}$. По определению $\mathcal{U}_r(a)$ и $\mathcal{U}_r^-(a)$ — это шары в $\mathbb{K}$ и $S_r(a)$ — сфера в $\mathbb{K}$ с центром в точке a и радиусом r . Следующее простое утверждение очень полезно в данной работе.

ЛЕММА 2.1. Пусть $a \in S_1(0)$, тогда $S_1(0) \setminus \mathcal{U}_1^-(a) \subset S_1(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|x|_{\mathbb{K}} = 1$ и $|x - a|_{\mathbb{K}} \geq 1$. Докажем, что $|x - a|_{\mathbb{K}} = 1$. Допустим, что $|x - a|_{\mathbb{K}} > 1$, тогда

$$|x|_{\mathbb{K}} = |(x - a) + a|_{\mathbb{K}} = \max(|a|_{\mathbb{K}}, |x - a|_{\mathbb{K}}) > 1,$$

¹⁾Возможно, что такие закономерности установить нельзя, т.к. множество простых чисел имеет очень сложную структуру.

что приводит к противоречию. $\square$

Положим $|\mathbb{K}| = \{r = |x|_{\mathbb{K}} : x \in \mathbb{K}\}$. Функция $f: \mathcal{U}_r(a) \rightarrow \mathbb{K}$, $r \in |\mathbb{K}|$ называется аналитической, если ее можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x-a)^n, \quad f_n \in \mathbb{K},$$

равномерно сходящийся в шаре $\mathcal{U}_r(a)$. Положим $\|f\|_r = \max_n |f_n|_{\mathbb{K}} r^n$. Это норма в пространстве аналитических функций $f: \mathcal{U}_r(a) \rightarrow \mathbb{K}$. Теория аналитических функций изложена, например, в [11].

Обозначим поле p -адических чисел символом $\mathbb{Q}_p$ и кольцо p -адических целых чисел – символом $\mathbb{Z}_p$. Любой элемент $x \in \mathbb{Q}_p$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = a_{-n}p^{-n} + \dots + a_0 + \dots + a_k p^k + \dots = \alpha_{-n} \dots \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k \dots, \quad (1)$$

где $a_j = 0, 1, \dots, p-1, \dots$ – “десятичные знаки” числа x . Разложение (1) сходится в норме $|\cdot|_p$.

Мы используем следующее свойство биномиальных коэффициентов $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$, $k \leq n$:

$$|C_n^k|_p \leq 1.$$

Обозначим кольцо классов вычетов кольца $\mathbb{Z} \bmod n$ символом F_n . Тогда $F_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Символ F_n^* обозначает мультипликативную полугруппу кольца F_n . Если $n = p$ – простое число, то F_p – поле. Используя (1), нетрудно показать, что $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = F_p$. Определяем каноническое отображение $x \rightarrow \bar{x}$, $\mathbb{Z}_p \rightarrow F_p$, как обычно, стандартным способом.

Наибольший общий делитель натуральных чисел n и m обозначается символом (n, m) , поле комплексных p -адических чисел – символом $\mathbb{C}_p$. Корни из единицы в $\mathbb{C}_p$ играют важную роль в наших рассуждениях. Пусть $\Gamma^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) – группа корней из единицы порядка m , положим

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma^{(m)}, \quad \Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma^{(m^j)}, \quad \Gamma_u = \bigcup_{(m,p)=1} \Gamma_m.$$

Легко проверить, что $\Gamma = \Gamma_u \cdot \Gamma_p$ и $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \{1\}$. Обозначим символами $\theta_{j,k}$ ($j = 1, \dots, k$), $\theta_{1,k} = 1$ корни из единицы порядка k .

ЛЕММА 2.2. Пусть $y^n = a$, где $a = \theta_{j,n-1}$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, n-1$ и $y \neq a$. Если $(n, p) = 1$, то $y \in S_1(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $y \notin \mathcal{U}_1^-(a)$. Допустим, что $y \in \mathcal{U}_1^-(a)$, т.е. $y = a + \gamma$ с $|\gamma|_p < 1$. Тогда

$$0 = |y^n - a^n|_p = \left| \sum_{j=1}^n C_n^j \gamma^j a^{n-j} \right|_p = |\gamma|_p |na^{n-1} + \gamma \Delta|_p,$$

где $\Delta = \sum_{j=2}^n C_n^j \gamma^{j-2} a^{n-j}$, $|\Delta|_p \leq 1$ и $|na^{n-1} + \gamma \Delta|_p = 1$. Следовательно, $|\gamma|_p = 0$. Однако это противоречит условию $y \neq a$. Теперь достаточно применить лемму 2.1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. $\Gamma_u \subset S_1(1)$.

Мы будем использовать следующие простые утверждения:

ЛЕММА 2.3. $|C_{p^k}^j|_p \leq 1/p$ для всех $j = 1, \dots, p^k - 1$.

ЛЕММА 2.4. $\Gamma_p \subset \mathcal{U}_1^-(1)$.

Чтобы найти неподвижные точки и циклы функций $f(x) = x^n$ ($n = 2, 3, \dots$) в $\mathbb{Q}_p$, мы должны знать, какие корни из единицы принадлежат $\mathbb{Q}_p$. Обозначим символом ξ_l ($l = 1, 2, \dots$) некоторый простой корень порядка l из единицы в $\mathbb{C}_p$. Мы будем использовать следующее хорошо известное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (О ПРОСТЫХ КОРНЯХ). Если $p \neq 2$, то $\xi_l \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда $l \mid (p-1)$. Поле $\mathbb{Q}_2$ содержит только $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = -1$.

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для F_p .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Уравнение $x^k = 1$ имеет $g = (k, p-1)$ различных корней в $\mathbb{Q}_p$.

Аналогичное утверждение справедливо и для F_p .

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ

В этом разделе мы исследуем динамическую систему

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \quad x \rightarrow f(x), \quad (2)$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_R(a)$ или $\mathbb{K}$, а $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ — некоторая аналитическая функция. Сначала мы докажем одну общую теорему о поведении итераций $x_n = f^n(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{U}$ (здесь $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$), а затем используем ее, чтобы исследовать поведение конкретной динамической системы $f(x) = x^n$ ($n = 2, 3, \dots$) в поле комплексных p -адических чисел $\mathbb{C}_p$.

В статье применяется стандартная терминология теории динамических систем (см., например, [12, 13]). Если $f(x_0) = x_0$, то x_0 называется неподвижной точкой, если $x_n = x_0$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$, то — периодической точкой. Если n — наименьшее натуральное число, для которого $x_n = x_0$, то n называется периодом точки x_0 . Соответствующий цикл обозначается символом $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. В частности, неподвижная точка x_0 — это периодическая точка с периодом 1. Очевидно, что если x_0 — периодическая точка отображения f с периодом n , то x_0 является неподвижной точкой итерированного отображения f^n . Неподвижная точка x_0 называется аттрактором, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что любая точка $y \in V(x_0)$ притягивается точкой x_0 , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Если x_0 — аттрактор, то существует так называемая область притяжения, т.е. множество $A(x_0) = \{y \in \mathbb{K} : y_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty\}$. Неподвижная точка x_0 называется репеллером, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $|f(x) - x_0|_{\mathbb{K}} > |x - x_0|_{\mathbb{K}}$ для всех $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$. Цикл $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ называется аттрактором (репеллером), если x_0 — аттрактор (репеллер) отображения f^n .

При определении неархимедова аналога диска Зигеля нужно проявить некоторую осторожность. Пусть $a \in \mathcal{U}$ — фиксированная точка некоторого отображения f . Шар $\mathcal{U}_r^-(a)$ (содержащийся в $\mathcal{U}$) называется диском Зигеля, если каждая сфера $S_\rho(a)$, $\rho < r$, инвариантна относительно f в том смысле, что при $x_0 \in S_\rho(a)$ имеется $x_n \in S_\rho(a)$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Объединение всех дисков Зигеля с центром в точке a называется максимальным диском Зигеля и обозначается символом $SI(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В комплексной геометрии центр диска однозначно определяется диском. Следовательно, не может оказаться так, что различные неподвижные точки имеют один и тот же диск Зигеля. Однако в неархимедовой геометрии центр диска — это любая точка, принадлежащая диску. Поэтому различные неподвижные точки могут иметь одинаковые диски Зигеля.

Диск Зигеля с центром в периодической точке $a \in \mathcal{U}$ с циклом $\gamma = (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ определяется аналогично диску Зигеля неподвижной точки. При этом сферы $S_\rho(a)$, $\rho < r$, предполагаются инвариантными относительно отображения f^n .

Как обычно в теории динамических систем, мы можем найти аттракторы, репеллеры и диски Зигеля, используя свойства производной отображения f .

Пусть a — периодическая точка с периодом n некоторой функции $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ класса C^1 . Положим

$$\lambda = \frac{d}{dx} g^n(a).$$

Точка a называется притягивающей, если $0 \leq |\lambda|_{\mathbb{K}} < 1$, нейтральной, если $|\lambda|_{\mathbb{K}} = 1$, и отталкивающей, если $|\lambda|_p > 1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ — аналитическая функция, $a \in \mathcal{U}$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда существует число $r > 0$ такое, что

$$s = \max_{2 \leq n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a) \right|_{\mathbb{K}} r^{n-1} < |f'(a)|_{\mathbb{K}}. \quad (3)$$

Если $r > 0$ удовлетворяет этому неравенству и $\mathcal{U}_r(a) \subset \mathcal{U}$, то

$$|f(x) - f(y)|_{\mathbb{K}} = |f'(a)|_{\mathbb{K}} |x - y|_{\mathbb{K}} \quad (4)$$

для всех $x, y \in \mathcal{U}_r(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $\mathcal{U} = \mathcal{U}_R(a)$. По формуле Тейлора $f(x) - f(y) = [f'(a) + T(x, y, a)](x - y)$, где

$$T(x, y, a) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a) [(x - a)^{n-1} + (y - a)(x - a)^{n-2} + \dots + (y - a)^{n-1}].$$

Обозначим выражение в квадратных скобках символом $B_n(x, y, a)$. Пусть $x, y \in \mathcal{U}_r(a)$, $r \leq R$. Используя сильное неравенство треугольника, получаем, что $|B_n(x, y, a)|_{\mathbb{K}} \leq r^{n-1}$. Положим

$$\sigma(\rho) = \max_{2 \leq n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a) \right|_{\mathbb{K}} \rho^{n-2}, \quad \rho > 0.$$

В силу аналитичности f справедливо неравенство $\sigma(R) \leq \|f\|_R/R^2 < \infty$. Поскольку $\sigma(r) \leq \sigma(R)$ для любого $r \leq R$, находим

$$\sup_{x,y \in \mathcal{U}_r(a)} |T(x,y,a)|_{\mathbb{K}} \leq r\sigma(R) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (5)$$

Следовательно, если $f'(a) \neq 0$, то существует $r > 0$, для которого справедливы (3) и (4). $\square$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть a – неподвижная точка аналитической функции $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если a – притягивающая точка функции f , то существует аттрактор динамической системы (2). Если при некотором $r > 0$ справедливо неравенство

$$q = \max_{1 \leq n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a) \right|_{\mathbb{K}} r^{n-1} < 1 \quad (6)$$

и $\mathcal{U}_r(a) \subset \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}_r(a) \subset A(a)$;

2) если a – нейтральная точка функции f , то a – центр некоторого диска Зигеля. Если при $r > 0$ справедливо неравенство (3) и $\mathcal{U}_r(a) \subset \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}_r(a) \subset SI(a)$;

3) если a – отталкивающая точка функции f , то a – репеллер динамической системы (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $f'(a) \neq 0$ и справедливо неравенство (3) с $r > 0$ и $\mathcal{U}_r(a) \subset \mathcal{U}$, в этом случае достаточно применить лемму 3.1.

Если a – произвольная притягивающая точка, то в силу (5) существует число $r > 0$, при котором справедливо неравенство (6). Поэтому $|f(x) - f(y)|_{\mathbb{K}} < q|x - y|_{\mathbb{K}}$, $q < 1$, для всех $x, y \in \mathcal{U}_r(a)$. Следовательно, a – аттрактор динамической системы (2) и $\mathcal{U}_r(a) \subset A(a)$. $\square$

Заметим, что в случае притягивающей точки условие (6) слабее, чем условие (3).

Для исследования динамических систем, порожденных неаналитическими функциями, мы используем следующую теорему неархимедова анализа [10].

ТЕОРЕМА 3.2 (о локальной однозначности функций класса C^1). Пусть $f: \mathcal{U}_r(a) \rightarrow \mathbb{K}$ – функция класса C^1 в окрестности точки a . Если $f'(a) \neq 0$, то существует шар $\mathcal{U}_s(a)$, $s \leq r$, такой, что равенство (4) справедливо для всех $x, y \in \mathcal{U}_s(a)$.

Теорема 3.1 более удобна для наших целей, чем теорема 3.2, поскольку теорема 3.2 – это лишь теорема существования. В ней ничего не говорится о значении s . Поэтому мы не можем оценить объем $A(a)$ или $SI(a)$. Теорема 3.1 позволяет такие объемы найти. Нужно только проверить, что условие (6) или (3) выполняется. Заметим также, что случай $f'(a) = 0$ – патологический для неаналитических функций неархимедова аргумента. Например, существуют функции g , которые не являются локально-постоянными, но для которых $g' \equiv 0$. У рассматриваемых нами аналитических функций таких патологий нет.

Множество Жюлиа J_f для динамической системы (2) определяется как замыкание множества всех отталкивающих периодических точек функции f . Множество $F_f = \mathcal{U} \setminus J_f$ называется множеством Фату. Множества Жюлиа и Фату играют важную роль в теории вещественных динамических систем. В неархимедовом случае структуры этих множеств тривиальны.

Мы используем аналог теоремы 3.1, получающийся применением теоремы 3.1 к функции f^n , для периодических точек.

4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В этом разделе мы применяем теорему 3.1 для изучения динамических систем с $p_n(x) = x^n$, $n = 2, 3, \dots$, в полях комплексных p -адических чисел $\mathbb{C}_p$. Очевидно, что $a = 0$ и $a = \infty$ являются аттракторами с областями притяжения $A(0) = \mathcal{U}_1^-(0)$ и $A(\infty) = \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{U}_1(0)$, соответственно. Поэтому основной интерес вызывает сфера $S_1(0)$. Неподвижные точки отображения $p_n(\cdot)$, принадлежащие этой сфере, являются корнями из единицы $\theta_{j,n-1}$, $j = 1, \dots, n-1$, порядка $(n-1)$. Существуют два принципиально различных случая:

- 1) n не делится на p ;
- 2) n делится на p .

ТЕОРЕМА 4.1. *Динамическая система $p_n(x)$ имеет $(n-1)$ неподвижных точек $a_j = \theta_{j,n-1}$ ($j = 1, \dots, n-1$) на сфере $S_1(0)$. При этом, возникают два случая:*

1. *Если $(n, p) = 1$, то указанные точки являются центрами дисков Зигеля и $SI(a_j) = \mathcal{U}_1^-(a_j)$. Если $n-1 = p^l$, $l = 1, 2, \dots$, то $SI(a_j) = SI(1) = \mathcal{U}_1^-(1)$ для всех $j = 1, \dots, n-1$. Если $(n-1, p) = 1$, то $a_j \in S_1(1)$, $j = 2, \dots, n-1$, и $SI(a_j) \cap SI(a_i) = \emptyset$ при $i \neq j$. Для любого $k = 2, 3, \dots$ все k -циклы – центры дисков Зигеля с единичным радиусом.*

2. *Если $(n, p) \neq 1$, то точки a_j являются аттракторами и $\mathcal{U}_1^-(a_j) \subset A(a_j)$. Для любого $k = 2, 3, \dots$ все k -циклы – аттракторы, и открытые шары единичного радиуса содержатся в области притяжения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Имеем $|p'_n(a_j)|_p = 1$. По теореме 3.1 все точки a_j являются центрами дисков Зигеля. Найдем радиус максимального диска Зигеля. Для этого используем условие (3). Поскольку

$$\left| \frac{1}{l!} \frac{d^l p_n}{dx^l}(b) \right|_p = |C_n^l|_p$$

для любого $b \in S_1(0)$, условие (3) имеет вид

$$r \max_{2 \leq k < \infty} r^{k-2} |C_n^k|_p < 1.$$

Если $r < 1$, то это условие выполнено. Следовательно, $\mathcal{U}_1^-(a_j) \subset SI(a_j)$. Остается доказать, что сферы $S_1(a_j)$ не являются инвариантными множествами для p_n . Для этого используем лемму 2.2. Положим $x_0 = y$, где $y^n = a_j$ и $y \in S_1(a_j)$. Тогда $p_n(y) = a_j$.

Если $n - 1 = p^l$, $l = 1, 2, \dots$, то по лемме 2.4 все точки $a_j \in \mathcal{U}_1^-(1)$. Следовательно, $\mathcal{U}_1^-(a_j) = \mathcal{U}_1^-(1)$ и $SI(a_j) = SI(1)$. Итак, динамическая система p_n определяет движение в шаре $\mathcal{U}_1^-(1)$, обладающее тем свойством, что существуют точки $a_1, \dots, a_{n-1}$ такие, что для любой начальной точки $x_0 \in \mathcal{U}_1^-(1)$ расстояния между итерациями x_n точки x_0 и точками $a_1, \dots, a_{n-1}$ сохраняются.

Если $(n - 1, p) = 1$, то по следствию 2.1 $a_j \in S_1(1)$ при $j = 2, \dots, n - 1$. Итак, существует $(n - 1)$ непересекающихся дисков Зигеля.

Чтобы исследовать k -циклы, воспользуемся тем, что $(n^k, p) = 1$ тогда и только тогда, когда $(n, p) = 1$. Следовательно, каждая неподвижная точка отображения p_n^k — это центр некоторого диска Зигеля.

2. Пусть $n = p^k m$, где $k \geq 1$ и $(m, p) = 1$. Тогда $|p'_n(a_j)|_p = 1/p^k$. Поэтому все точки a_j являются аттракторами. Найдем область притяжения. Для этого воспользуемся условием (6). В данном случае оно имеет вид

$$q = \max(1/p^k, r|C_n^2|_p, \dots, r^{n-1}) < 1.$$

Если $r < 1$, то это неравенство справедливо. Итак, $\mathcal{U}_1^-(a_j) \subset A(a_j)$.

Чтобы исследовать k -циклы, воспользуемся тем, что $(n^k, p) \neq 1$ тогда и только тогда, когда $(n, p) \neq 1$. Следовательно, каждая неподвижная точка отображения p_n^k — аттрактор. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $(n, p) = 1$ и $n^k - 1 = p^l$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда любой k -цикл $\gamma = (a_1, \dots, a_k)$ содержится в $\mathcal{U}_1^-(1)$ и ведет себя как диск Зигеля

$$SI(\gamma) = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{U}_1^-(a_j) = \mathcal{U}_1^-(1).$$

Во время движения расстояния $c_j = \rho_p(x_0, a_j)$, $j = 1, \dots, k$, где $x_0 \in \mathcal{U}_1^-(1)$ — произвольная начальная точка, изменяются по циклическому правилу

$$(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n) \rightarrow (c_n, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}) \rightarrow \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Циклическое правило является простым следствием леммы 3.1, т.к.

$$|x_1 - a_j|_p = |f(x_0) - f(a_{j-1})|_p = |f'(a_{j-1})|_p |x_0 - a_{j-1}|_p = c_{j-1}. \quad \square$$

Итак, в случае $(n, p) = 1$ движение точки в шаре $\mathcal{U}_1^-(1)$ довольно сложное, т.к. она обращается (с различными периодами) вокруг бесконечного числа центров.

Теорема 4.1 не полностью описывает случай $(n, p) = 1$, $(n - 1, p) \neq 1$. Рассмотрим общий случай $(n, p) = 1$, $n - 1 = mp^l$ при $(m, p) = 1$ и $l \geq 0$. Положим $a_i = \xi_m^i$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$, $b_j = \xi_p^j$, $j = 0, 1, \dots, p^l - 1$, и $c_{ij} = a_i b_j$. Тогда все точки c_{ij} , $i = 0, 1, \dots, m - 1$, $j = 0, 1, \dots, p^l - 1$, являются центрами дисков Зигеля и $SI(c_{ij}) = \mathcal{U}_1^-(c_{ij})$. Для каждого i справедливы равенства $SI(c_{i0}) = SI(c_{i1}) = \dots = SI(c_{i(p^l-1)})$. Если $i \neq 0$, то все эти диски $SI(c_{ij})$ содержатся в $S_1(0) \cap S_1(1)$. Кроме того, $SI(c_{ij}) \cap SI(c_{kl}) = \emptyset$ при $i \neq k$. Аналогичный результат справедлив в отношении k -циклов.

Найдем область притяжения $A(a_j)$, $j = 1, \dots, n - 1$, $(n, p) \neq 1$. Начнем с аттрактора $a_1 = 1$. Положим $n = mp^k$, $(m, p) = 1$ и $k \geq 1$.

ЛЕММА 4.1. *Справедливо равенство $A(1) = \bigcup_{\xi} \mathcal{U}_1^-(\xi)$, где $\xi \in \Gamma_m$, причем шары $\mathcal{U}_1^-(\xi)$ с различными ξ не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\xi \in \Gamma_{mj}$ и $y = \xi + \gamma$, $|\gamma|_p < 1$. Тогда

$$|y^{n^j} - 1|_p = \left| \sum_{i=0}^{n^j-1} C_{n^j}^i \xi^i \gamma^{n^j-i} \right|_p \leq |\gamma|_p < 1,$$

т.е. j -я итерация точки y принадлежит шару $\mathcal{U}_1^-(1) \subset A(1)$. Следовательно, $\mathcal{U}_1^-(\xi) \subset A(1)$. Эти шары с различными ξ не пересекаются, т.к. $|a - b| = 1$ для любых $a, b \in \Gamma_u$ при $a \neq b$.

2. Пусть $s = m^\alpha t$, $\alpha \geq 0$, $(s, p) = 1$, $(t, m) = 1$, $t \neq 1$ и $\xi \in \Gamma^{(s)} \setminus \Gamma^{(m^\alpha)}$. Тогда $\xi = uv$, где $u \in \Gamma^{(m^\alpha)}$, $v \in \Gamma^{(t)}$ и $v \neq 1$. Пусть $y = \xi + \gamma$, $|\gamma|_p < 1$. Тогда $y^{n^k} = \xi^{n^k} + \beta$, где $|\beta|_p < 1$, т.е. $y^{n^k} \in \mathcal{U}_1^-(\xi^{n^k})$. Остается доказать, что $\xi^{n^k} \in S_1(1)$ для всех достаточно больших k .

Во-первых, заметим, что если $k \geq \alpha$, то $u^{n^k} = 1$. Далее, пусть $n^k = jt + q$, где $q = 1, \dots, t-1$. Если $k \geq \alpha$, то $\xi^{n^k} = v^q$. Положим $v = \xi_t^\lambda$, $\lambda = 1, \dots, t-1$ (где ξ_t — простой корень с номером t). Тогда $v^q = \xi_t^{\lambda q}$. Наконец, мы должны доказать, что $\lambda q \not\equiv 0 \pmod t$. Допустим, что $\lambda q \equiv 0 \pmod t$. Отсюда следует, что $(q, t) = \omega \neq 1$. Поэтому $m^k p^{lk} = j'\omega$, что противоречит условию $(m, t) = (p, t) = 1$.

Итак, доказано, что $\mathcal{U}_1^-(\xi) \subset \mathbb{C}_p \setminus A(1)$ для любого числа ξ , которое является корнем порядка s из единицы, $(s, p) = 1$, и не является корнем порядка m^j из единицы при $j \geq 1$. Наконец, воспользуемся следующим фактом, который можно установить с помощью леммы 2 из работы [10, с. 103]:

$$S_1(1) = \bigcup \mathcal{U}_1^-(\xi),$$

где $\xi \in \Gamma_u$, $\xi \neq 1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть $n = p^l$, $l \geq 1$. Тогда $S_1(1)$ — инвариантная сфера динамической системы p_n .*

ПРИМЕРЫ.

1. Пусть $n = p^l$, $l \geq 1$. Тогда $A(1) = \mathcal{U}_1^-(1)$.
2. Пусть $p \neq 2$ и $n = 2p^l$, $l \geq 1$. Тогда $A(1) = \bigcup \mathcal{U}_1^-(\xi)$, где $\xi \in \Gamma_2$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Справедливо равенство $A(a_k) = \bigcup_{\xi} \mathcal{U}_1^-(\xi a_k)$, где $\xi \in \Gamma_m$, причем шары $\mathcal{U}_1^-(\xi)$ с различными ξ не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема — простое следствие леммы 4.1. Зададим отображение $T_k: \mathcal{U}_1(1) \rightarrow \mathcal{U}_1(a_k)$, $T_k x = a_k x$. Оно изометрично. Если $x_0 \in \mathcal{U}_1(1)$ и $x'_0 = T_k(x_0)$, то для итераций $x'_0 \in \mathcal{U}_1(a_k)$ имеем $x'_N = p_n^N(x'_0) = T_k(x_N)$, где $x_N = p_n^N(x_0)$. Итак, поведение динамической системы p_n в шаре $\mathcal{U}_1(a_k)$ можно получить как T_k -образ поведения в шаре $\mathcal{U}_1(1)$. $\square$

Динамическая система p_n не имеет отталкивающих точек в $\mathbb{C}_p$ при любом p . Следовательно, множество Жюлиа J_{p_n} пусто, а множество Фату F_{p_n} совпадает с $\mathbb{C}_p$. Поэтому множества Жюлиа в p -адическом случае не играют роли областей, “в которых нарастает хаос”. Интересно исследовать поведение динамических систем в промежуточных областях, определяемых как $INT_f = \mathcal{U} \setminus [(\bigcup_a A(a)) \cup (\bigcup_b SI(b))]$, где $\{a\}$ – все аттракторы и $\{b\}$ – все центры дисков Зигеля данной динамической системы. В случае $(n, p) = 1$ имеем $INT_{p_n} = S_1(0) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} SI(a_j)$; в случае $(n, p) \neq 1$ промежуточное множество имеет вид $INT_{p_n} = S_1(0) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A(a_j)$. Эти множества содержат циклы всевозможной длины.

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ПОЛЯХ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В этом разделе исследуется поведение динамической системы $p_n(x) = x^n$, $n = 2, 3, \dots$, в $\mathbb{Q}_p$. Используются установленные выше свойства аналогичной системы в $\mathbb{C}_p$ и результаты раздела 2 о корнях из единицы в $\mathbb{Q}_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Динамическая система p_n имеет $m = (n - 1, p - 1)$ неподвижных точек $a_j = \theta_{j,m}$, $j = 1, \dots, m$, на сфере $S_1(0)$ в $\mathbb{Q}_p$. Тип этих точек определяется теоремой 4.1. Неподвижные точки $a_j \neq 1$ принадлежат сфере $S_1(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из следствия 2.2. Остается только проверить, что все неподвижные точки $a_j \neq 1$ принадлежат $S_1(1)$. Поскольку $m = (n - 1, p - 1)$, справедливо равенство $(m, p) = 1$. Для завершения доказательства достаточно применить следствие 2.1. $\square$

Заметим, что число аттракторов или дисков Зигеля динамической системы p_n на сфере $S_1(0)$ не превосходит $(p - 1)$.

Чтобы исследовать k -циклы в $\mathbb{Q}_p$, мы используем числа $m_k = (l_k, p - 1)$, $k = 1, 2, \dots$, при $l_k = n^k - 1$ (т.е. $m \equiv m_1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Динамическая система p_n имеет k -циклы ($k \geq 2$) в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда m_k не является делителем чисел m_j , $j = 1, \dots, k - 1$. Все циклы лежат на сфере $S_1(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что m_k не является делителем m_j , $1 \leq j \leq k - 1$. Положим $a_1 = \xi_{m_k}$. Тогда $a_1^{n^k} = a_1$. Предположим, что $a_1^{n^s} = a_1$ при $s < k$. Тогда $a_1^{m_s} = 1$. Следовательно, m_k является делителем числа m_s . Это приводит к противоречию.

2. Предположим, что m_k является делителем числа m_j при некотором $j < k$. Пусть $a_1^{l_k} = 1$. Тогда $a_1^{m_k} = 1$ и, следовательно, $a_1^{m_j} = 1$. Итак, $a_1^{l_s} = 1$ и цикл $\gamma = \gamma(a_1)$ имеет длину, не превосходящую $s \leq k$. $\square$

Если $(n, p) = 1$, т.е. если все неподвижные точки и k -циклы – центры дисков Зигеля, сложного движения вокруг группы центров в $\mathcal{U}_1^-(1)$ ($= \mathcal{U}_{1/p}(1)$) не происходит.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Динамическая система p_n имеет только конечное число циклов в $\mathbb{Q}_p$ при любом p .*

ПРИМЕР. Пусть $n = p^l$, $l \geq 1$. Тогда $m_1 = p - 1$ и существуют $(p - 1)$ аттракторов $a_j = \theta_{j,p-1}$, $j = 1, \dots, p - 1$, с областями притяжения $A(a_j) = \mathcal{U}_{1/p}(a_j)$ и не существует k -циклов ($k \geq 2$). Поскольку можно положить $a_j = j \bmod p$, имеем $\mathcal{U}_{1/p}(a_j) = \mathcal{U}_{1/p}(j)$. Промежуточное множество пусто, т.к. $S_1(0) = \bigcup_{j=1}^{p-1} \mathcal{U}_{1/p}(j)$. В частности, если $p = 2$, то все точки сферы $S_1(0)$ притягиваются точкой a_1 .

Чтобы исследовать общий случай $n = qp^l$, $l \geq 1$, $(q, p) = 1$, мы воспользуемся следующим простым утверждением.

ЛЕММА 5.1. *Пусть $n = qp^l$, $l \geq 1$, $(q, p) = 1$. Тогда $m_k = (l_k, p - 1) = (q^k - 1, p - 1)$, $k = 1, 2, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = (q^k - 1, p - 1)$, $a' = (l_k, p - 1)$. Тогда $q^k = ab + 1$, $p = ac + 1$, где $a, b \in \mathbb{N}$. Следовательно, $l_k = n^k - 1 = (ab + 1)(ac + 1)^{kl} - 1$, $a \mid l_k$ и $a \mid a'$. С другой стороны, $n^k = a'd + 1$, $p = a'x + 1$, где $d, x \in \mathbb{N}$. Поэтому $q^k(a'x + 1)^{kl} = (q^k - 1)(a'x + 1)^{kl} + (a'x + 1)^{kl} = a'd + 1$ и, следовательно, $a' \mid (q^k - 1)(a'x + 1)^{kl}$, т.е. $a' \mid (q^k - 1)$. Итак, $a' \mid a$. $\square$

ПРИМЕРЫ.

1. Пусть $n = 2p$, $p \neq 2$. Тогда есть только один аттрактор $a_1 = 1$ на сфере $S_1(0)$ для любого p . Чтобы найти k -циклы ($k \geq 2$), мы должны рассмотреть числа m_k , $k = 2, \dots$. Однако по лемме 5.1 $m_k = (2^k - 1, p - 1)$. Следовательно, числа k -циклов у динамических систем p_{2p} и p_2 *одинаковы*. Детальный анализ динамической системы p_2 дан ниже после предложения 5.5. Конечно, нужно отметить, что поведения k -циклов у систем p_{2p} и p_2 различны. У системы p_{2p} k -циклы являются аттракторами, а у системы p_2 они центры дисков Зигеля.

2. Пусть $n = 3p$, $p \neq 2$. Существуют два аттрактора $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$ на $S_1(0)$ при всех p .

3. Пусть $n = 4p$. Тогда существуют один аттрактор при $p = 2, 3, 5, 11, 17, 23, \dots$ и три аттрактора при $p = 7, 13, 19, 29, 31, \dots$.

4. Пусть $n = 5p$. Тогда имеются один аттрактор при $p = 2$, два аттрактора при $p = 3, 7, 11, 23, 31, \dots$ и четыре аттрактора при $p = 5, 13, 17, \dots$.

Рассмотрим теперь области притяжения в случае $n = qp^l$, $l \geq 1$, $(q, p) = 1$. Как следствие нашего анализа динамических систем в $\mathbb{C}_p$ мы получаем, что $A(1) = \bigcup_{\xi} \mathcal{U}_{1/p}(\xi)$, где $\xi \in \Gamma_q \cap \mathbb{Q}_p$. Мы имеем $\Gamma_q \cap \mathbb{Q}_p \neq \{1\}$ тогда и только тогда, когда $(q, p - 1) \neq 1$.

ПРИМЕРЫ.

1. Пусть $p = 5$ и $n = 10$, т.е. $q = 2$. Тогда $\Gamma_2 \cap \mathbb{Q}_5 = \Gamma^{(4)}$ и $A(1) = \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{U}_{1/5}(\theta_{j,4})$, т.к. $(q^2, p - 1) = 4$. Итак, $A(1) = S_1(0)$. Все точки сферы $S_1(0)$ притягиваются точкой $a_1 = 1$.

2. Пусть $p = 7$ и $n = 21$, т.е. $q = 3$. Тогда $m_1 = (q - 1, p - 1) = 2$. Следовательно, есть два аттрактора. Ими являются точки $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$. Поскольку все

$m_j = (q^k - 1, p - 1) = 2$ при $j = 1, 2, \dots$, не существует k -циклов при $k \geq 2$. Чтобы найти области притяжения, заметим, что $(q, p - 1) = 3$. Следовательно, $A(1)$ — это объединение шаров $\mathcal{U}_{1/7}(\theta_{j,3})$, $j = 1, 2, 3$. Очевидно, что $\theta_{2,3} = 2$, $\theta_{3,3} = 4 \pmod 7$. Поэтому $A(1) = \mathcal{U}_{1/7}(1) \cup \mathcal{U}_{1/7}(2) \cup \mathcal{U}_{1/7}(4)$ и $A(-1) = \mathcal{U}_{1/7}(-1) \cup \mathcal{U}_{1/7}(3) \cup \mathcal{U}_{1/7}(5)$, т.к. $2(-1) = 5$, $4(-1) = 3 \pmod 7$.

3. Пусть $p = 7$ и $n = 14$, т.е. $(q, p - 1) = 2$. Тогда $\Gamma_2 \cap \mathbb{Q}_7 = \Gamma^{(2)}$ и $A(1) = \mathcal{U}_{1/7}(1) \cup \mathcal{U}_{1/7}(6)$. В данном случае $INT_{p_{14}} = \cup_{j=2}^5 \mathcal{U}_{1/7}(j)$. В $INT_{p_{14}}$ существуют 2-циклы, т.к. $m_2 = 3$. Легко проверить, что 2-цикл единственный и $\gamma = (b_1, b_2)$, где $b_1 = 2$, $b_2 = 4 \pmod 7$. Этот цикл порождает цикл шаров на сфере $S_1(1)$: $\gamma^{(f)} = (\mathcal{U}_{1/7}(2), \mathcal{U}_{1/7}(4))$ (так называемый “пушистый” цикл). Два других шара на $S_1(1)$, т.е. $\mathcal{U}_{1/7}(3)$ и $\mathcal{U}_{1/7}(5)$, притягиваются циклом $\gamma^{(f)}$ (точнее, шарами $\mathcal{U}_{1/7}(2)$ и $\mathcal{U}_{1/7}(4)$, соответственно).

Последний пример показывает, что иногда бывает полезно исследовать не циклы точек, а циклы шаров. Мы предлагаем следующее общее определение.

Пусть $x \rightarrow g(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$ — динамическая система. Если существуют непересекающиеся шары $U_r(a_j)$, $j = 1, \dots, n$, $r = p^l$, $l = 0, \pm 1, \dots$, такие, что динамическая система порождает цикл шаров $\gamma^{(f)} = (U_r(a_1), \dots, U_r(a_n))$, то $\gamma^{(f)}$ называется пушистым циклом длины n и радиуса r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Существует взаимнооднозначное соответствие между циклами и пушистыми циклами радиуса $r = 1/p$ динамической системы p_n в $\mathbb{Q}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть $\gamma = (a_1, \dots, a_k)$ — k -цикл динамической системы p_n . Тогда $p_n: \mathcal{U}_{1/p}(a_j) \rightarrow \mathcal{U}_{1/p}(a_{j+1})$, где $a_{k+1} = a_1$, т.е. $\gamma^{(f)} = (\mathcal{U}_{1/p}(a_1), \dots, \mathcal{U}_{1/p}(a_k))$ — пушистый цикл.

2. Пусть $\gamma^{(f)} = (\mathcal{U}_{1/p}(b_1), \dots, \mathcal{U}_{1/p}(b_k))$ — пушистый цикл. Тогда $b_1^{n^k - 1} = 1 \pmod p$, т.е. b_1 удовлетворяет уравнению $\phi(x) = x^{m_k} - 1 = 0 \pmod p$ (см. замечание после следствия 2.2). По лемме Хензеля существует число $a = b_1 \pmod p$ такое, что $\phi(a) = 0$ в $\mathbb{Q}_p$. Поскольку $a \in \mathcal{U}_{1/p}(b_1)$, справедливо включение $a^{n^j} \in \mathcal{U}_{1/p}(b_j)$. Шары $\mathcal{U}_{1/p}(b_j)$, $j = 1, \dots, k$, не пересекаются. Поэтому точка a порождает цикл длины k .

Пушистые циклы радиуса $r < 1/p$ могут не соответствовать обычным циклам. Например, пусть $p = 3$ и $n = 2$. Тогда пушистый 2-цикл $\gamma^{(f)} = (4, 7)$ радиуса $r = 1/9$ не соответствует никакому обычному циклу. Существуют также пушистые 6-циклы с $r = 1/27$, пушистые 18-циклы с $r = 1/81$ и т.д., которые не соответствуют обычным циклам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Каждая точка $x \in INT_{p_n}$ притягивается некоторым циклом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5.3 достаточно доказать, что каждая точка $x_0 \in INT_{p_n}$ притягивается некоторым пушистым циклом. Справедливо равенство $INT_{p_n} = \bigcup_{l=1}^{p^{m_1}-1} \mathcal{U}_{1/p}(q_l)$, где $m_1 = (n - 1, p - 1)$, а q_l — натуральные числа такие, что $2 \leq q_l \leq p - 1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением итераций чисел $q_l \pmod p$. Однако существует лишь конечное число различных $q_l^{n^k} \pmod p$.

ПРИМЕРЫ (для $n = 2$).

1. Пусть $p = 2$. Тогда существует только одна неподвижная точка $a_1 = 1$ на $S_1(0)$. Эта точка – аттрактор и $A(1) = \mathcal{U}_{1/2}(1) = S_1(0)$. Следовательно, $\mathbb{Q}_2 = A(0) \cup A(1) \cup A(\infty)$ и $INT_{p_2} = \emptyset$.

2. Пусть $p \neq 2$. Тогда точка $a_1 = 1$ – это центр диска Зигеля $\mathcal{U}_{1/p}(1)$ и

$$\begin{aligned} INT_{p_2} &= S_1(0) \setminus \mathcal{U}_{1/p}(1) = \\ &= \{x = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^n + \dots : \alpha_j = 0, 1, \dots, p-1, \alpha_0 \neq 0, 1\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поведение динамической системы на промежуточном множестве не описывается нашими теоремами. Поэтому его нужно исследовать отдельно в каждом конкретном случае.

3. Числа l_k – нечетные. Поэтому m_k должно быть нечетным числом. Следовательно, не существует k -циклов, если p – простое число вида $p = 2^k + 1$ [14]. При этом INT_{p_2} не содержит периодических точек. В силу предложения 5.4 множество INT_{p_2} притягивается диском Зигеля $\mathcal{U}_{1/p}(1)$.

4. Положим $p = 7$. Тогда m_k может быть равным 1 или 3. При $m_2 = 3$ существуют только 2-циклы. Нетрудно проверить, что 2-цикл единствен. В силу предложения 5.4 множество INT_{p_2} притягивается диском Зигеля $\mathcal{U}_{1/p}(1)$ и пушистым 2-циклом $\gamma^{(f)} = (\mathcal{U}_{1/p}(2), \mathcal{U}_{1/p}(4))$, который соответствует обычному 2-циклу.

5. Пусть $p = 11$. Тогда m_k может равняться 1 или 5. Существует только один k -цикл $\gamma(\xi_5)$ при $k = 4$, т.к. $m_2 = m_3 = 1$ и $m_4 = 5$.

6. Пусть $p = 13$. Тогда $m_k = 1$ или 3. Существует только один k -цикл при $k = 2$.

7. Пусть $p = 19$. Тогда $m_k = 1$, $m_k = 3$ или $m_k = 9$. Существует единственный 2-цикл, т.к. $m_2 = 3$. Однако, хотя $m_4 = 3$, не существует 4-циклов, т.к. m_3 делится на m_4 . Поскольку числа $m_2, \dots, m_5$ не делятся на $m_6 = 9$, существует единственный 6-цикл $\gamma(\xi_9)$ и нет k -циклов с $k > 6$.

8. Пусть $p = 23$. Тогда $m_k = 1$ или $m_k = 11$. Непосредственные вычисления показывают, что нет k -циклов при $k = 2, \dots, 8$. Для других значений k вычисления сложны. В связи с этим примером возникает следующий вопрос: существует ли число k такое, что l_k делится на 11?

9. Пусть $p = 29$. Тогда $m_k = 1$ или $m_k = 7$. Существуют только 3-циклы, т.к. $m_3 = 7$ и $m_2 = 1$. Легко проверить, что имеются два 3-цикла $\gamma(\xi_7)$ и $\gamma(\xi_7^3)$.

10. Пусть $p = 31$. Тогда m_k может равняться 1, 3, 5 или 15. Существует единственный 2-цикл, т.к. $m_2 = 3$. Имеются три 4-цикла $\gamma(\xi_{15})$, $\gamma(\xi_{15}^3)$ и $\gamma(\xi_{15}^7)$, т.к. $m_4 = 15$ и $m_3 = 1$. Не существует k -циклов при $k \neq 2, 4$.

11. Пусть $p = 37$. Тогда m_k может равняться 1, 3 или 9. Существует единственный 2-цикл, т.к. $m_2 = 3$. Поскольку $m_6 = 9$, $m_2 = m_4 = 3$ и $m_3 = m_5 = 1$, имеются 6-циклы. Нетрудно проверить, что есть только один 6-цикл $\gamma(\xi_9)$. Не существует k -циклов при $k \neq 2, 6$.

12. Пусть $p = 41$. Тогда $m_k = 1$ или $m_k = 5$. Поскольку $m_4 = 5$ и $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, существуют 4-циклы. Нетрудно проверить, что $\gamma(\xi_5)$ – единственный 4-цикл. При $k \neq 4$ k -циклов нет.

Продолжить эти вычисления довольно трудно.

Интересно отметить, что мы не обнаружили 5- или 7-циклов. Существуют ли они? В нашем подходе этот вопрос сводится к следующему: существуют ли простые числа p такие, что $p \equiv 1 \pmod{31}$ или $\pmod{127}$? Поскольку 31 и 127 – простые числа, из теоремы Дирихле (см., например, [14, с. 129]) следует, что множество таких p бесконечно.

Исследуем теперь динамическую систему p_2 на промежуточных множествах. Мы рассмотрим случай $p \neq 2$, в котором промежуточное множество определяется равенством (7). Будем использовать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть $p \neq 2$ и $n = 2$. Предположим, что каноническое разложение p -адического числа $x_0 \in INT_{p_2}$ имеет вид $x = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m \dots$, где $\alpha_0 = \dots = \alpha_k = p - 1$ и $\alpha_{k+1} \neq p - 1$. Тогда первая итерация точки x_0 принадлежит сфере $S_{1/p^{k+1}}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство $x_0 = (1 + \alpha_{k+1})p^{k+1} - 1 \pmod{p^{k+2}}$. Поэтому $x_1 = x_0^2 = 1 - 2(1 + \alpha_{k+1})p^{k+1} \pmod{p^{k+2}}$. Заметим теперь, что $2(1 + \alpha_{k+1}) \not\equiv p \pmod{p}$. $\square$

В силу предложения 5.5 множество $\mathcal{U}_{1/p}(p - 1)$ притягивается диском Зигеля $SI(1) = \mathcal{U}_{1/p}$ после первой итерации.

ПРИМЕРЫ (для $n = 2$).

1. Пусть $p = 3$. Тогда все точки промежуточного множества удовлетворяют условию предложения 5.5. Поэтому после первой итерации множество INT_{p_2} притягивается диском Зигеля $SI(1)$.

2. Пусть $p = 5$. Тогда $INT_{p_2} = \mathcal{U}_{1/5}(2) \cup \mathcal{U}_{1/5}(3) \cup \mathcal{U}_{1/5}(4)$. Шар $\mathcal{U}_{1/5}(4)$ притягивается диском Зигеля $SI(1)$ после первой итерации. Непосредственные вычисления показывают, что шары $\mathcal{U}_{1/5}(j)$, $j = 2, 3$, притягиваются диском $SI(1)$ после второй итерации. Итак, после двух итераций конфигурационное пространство динамической системы на $S_1(0)$ сужается до $SI(1)$.

3. Пусть $p = 7$. Рассмотрим шары $\mathcal{U}_{1/7}(j)$, $j = 2, 3, 4, 5$ (случай $j = 6$ описывается предложением 5.5). Очевидно, что существует пушистый цикл, а именно $\gamma^{(f)} = (\mathcal{U}_{1/7}(2), \mathcal{U}_{1/7}(4))$. Итак, после первой итерации каждая точка $x_0 \in INT_{p_2}$ попадает на диск Зигеля $\mathcal{U}_{1/7}(1)$ или $\mathcal{U}_{1/7}(2) \cup \mathcal{U}_{1/7}(4)$.

Следует отметить, что поле комплексных p -адических чисел $\mathbb{C}_p$ – это бесконечномерное линейное пространство над $\mathbb{Q}_p$. Поэтому динамические системы в $\mathbb{C}_p$ являются в действительности бесконечномерными динамическими системами над $\mathbb{Q}_p$.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУШИСТЫХ ЦИКЛОВ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

Нижеследующие результаты были получены с помощью комплекса программ p -ADIC, созданного С. де Шмедтом [23] на основе пакета “Математика” [24].

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $p_3(x) = x^3$ в $\mathbb{Q}_5$. Тогда мы обнаружим следующие пушистые циклы:

Циклы длины 2:

$$U_{\frac{1}{5}}(2) - U_{\frac{1}{5}}(3), \quad U_{\frac{1}{25}}(7) - U_{\frac{1}{25}}(18), \quad U_{\frac{1}{125}}(57) - U_{\frac{1}{125}}(68).$$

Циклы длины 4:

$$\begin{aligned} &U_{\frac{1}{25}}(6) - U_{\frac{1}{25}}(16) - U_{\frac{1}{25}}(21) - U_{\frac{1}{25}}(11), \quad U_{\frac{1}{25}}(2) - U_{\frac{1}{25}}(8) - U_{\frac{1}{25}}(12) - U_{\frac{1}{25}}(3), \\ &U_{\frac{1}{25}}(22) - U_{\frac{1}{25}}(23) - U_{\frac{1}{25}}(17) - U_{\frac{1}{25}}(13), \quad U_{\frac{1}{25}}(9) - U_{\frac{1}{25}}(4) - U_{\frac{1}{25}}(14) - U_{\frac{1}{25}}(19), \\ &U_{\frac{1}{125}}(7) - U_{\frac{1}{125}}(93) - U_{\frac{1}{125}}(107) - U_{\frac{1}{125}}(43), \\ &U_{\frac{1}{125}}(26) - U_{\frac{1}{125}}(76) - U_{\frac{1}{125}}(101) - U_{\frac{1}{125}}(51), \\ &U_{\frac{1}{125}}(18) - U_{\frac{1}{125}}(82) - U_{\frac{1}{125}}(112) - U_{\frac{1}{125}}(32), \\ &U_{\frac{1}{125}}(24) - U_{\frac{1}{125}}(74) - U_{\frac{1}{125}}(99) - U_{\frac{1}{125}}(49). \end{aligned}$$

Цикл длины 20:

$$\begin{aligned} &U_{\frac{1}{125}}(6) - U_{\frac{1}{125}}(91) - U_{\frac{1}{125}}(71) - U_{\frac{1}{125}}(36) - U_{\frac{1}{125}}(31) - U_{\frac{1}{125}}(41) - U_{\frac{1}{125}}(46) - \\ &- U_{\frac{1}{125}}(86) - U_{\frac{1}{125}}(56) - U_{\frac{1}{125}}(116) - U_{\frac{1}{125}}(21) - U_{\frac{1}{125}}(11) - U_{\frac{1}{125}}(81) - U_{\frac{1}{125}}(66) - \\ &- U_{\frac{1}{125}}(121) - U_{\frac{1}{125}}(61) - U_{\frac{1}{125}}(106) - U_{\frac{1}{125}}(16) - U_{\frac{1}{125}}(96) - U_{\frac{1}{125}}(111). \end{aligned}$$

Возможно, что существуют и другие пушистые циклы различных длин.

Рассмотрим функцию $p_7(x)$ в $\mathbb{Q}_7$. Соответствующая динамическая система имеет следующие аттракторы на $S_1(0)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= -1, \\ x_3 &= 2.46302624344521214611\dots, & x_4 &= 3.46302624344521214611\dots, \\ x_5 &= 4.20364042322145452055\dots, & x_6 &= 5.20364042322145452055\dots \end{aligned}$$

Комплекс p -ADIC дает возможность изучать более сложные динамические системы. Однако мы не можем находить точные циклы с помощью компьютера вследствие его ограниченной точности, а можем только пушистые циклы.

Мы определяем пушистые аттракторы и пушистые диски Зигеля как непосредственное обобщение соответствующих понятий для точечных циклов. Пусть $f(x) = x^2 + x$. В случае, когда p — простое число, меньше 100, мы нашли пушистые циклы длины 2 при $p = 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97$.

Кроме того, мы доказали следующее общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$. Тогда динамическая система $f(x) = x^2 + x$ имеет пушистые циклы длины 2. В случае $p = 5$ эти циклы – пушистые аттракторы, в остальных случаях – это диски Зигеля.

Помимо циклов длины 2, мы обнаружили следующие циклы:

Циклы длины 3 при $p = 11, 41, 43, 59, 67, 89$ (два), 97. В случае $p = 89$ один из пушистых циклов – аттрактор, все другие – диски Зигеля.

Циклы длины 4 при $p = 19, 43, 47, 71$ (все – диски Зигеля).

Циклы длины 5 при $p = 23, 41, 71, 73$ (все – диски Зигеля).

Циклы длины 6 при $p = 47, 83, 89$ (все – диски Зигеля).

Циклы длины 7 при $p = 29, 53, 59, 67$ (циклические аттракторы в случае $p = 29$).

Циклы длины 8 при $p = 61$ (все – диски Зигеля).

Циклы длины 9 при $p = 31$ (все – диски Зигеля).

Заметим, что для некоторых простых чисел динамическая система имеет пушистые циклы различной длины. Так, при $p = 89$ существуют пушистые циклы длины 2, 3 и 6; при $p = 41$ – пушистые циклы длины 2, 3 и 5.

Некоторые из этих циклов (мы думаем, что все, но это не доказано) содержат субциклы. Например, в случае $p = 11$ имеем цикл длины 3 $U_{1/11}(2) - U_{1/11}(6) - U_{1/11}(9)$, который содержит следующие субциклы длины 15:

$$\begin{aligned} &U_{1/121}(112) - U_{1/121}(72) - U_{1/121}(53) - U_{1/121}(79) - U_{1/121}(28) - U_{1/121}(86) - \\ &\quad - U_{1/121}(101) - U_{1/121}(17) - U_{1/121}(64) - U_{1/121}(46) - U_{1/121}(105) - \\ &\quad - U_{1/121}(119) - U_{1/121}(2) - U_{1/121}(6) - U_{1/121}(42), \\ &U_{1/121}(35) - U_{1/121}(50) - U_{1/121}(9) - U_{1/121}(90) - U_{1/121}(83) - U_{1/121}(75) - \\ &\quad - U_{1/121}(13) - U_{1/121}(61) - U_{1/121}(31) - U_{1/121}(24) - U_{1/121}(116) - \\ &\quad - U_{1/121}(20) - U_{1/121}(57) - U_{1/121}(39) - U_{1/121}(108) \end{aligned}$$

и др.

В случае $p = 13$ система имеет цикл длины 2 $U_{1/13}(4) - U_{1/13}(7)$, который содержит субцикл длины 8:

$$\begin{aligned} &U_{1/169}(4) - U_{1/169}(20) - U_{1/169}(82) - U_{1/169}(36) - \\ &\quad - U_{1/169}(134) - U_{1/169}(7) - U_{1/169}(56) - U_{1/169}(150), \end{aligned}$$

в свою очередь, содержащий субциклы длины 104.

Одной из задач, возникающих в компьютерных исследованиях p -адических динамических систем, является создание p -адических картин, которые могли бы иллюстрировать наши численные результаты. Это главная проблема p -адического подхода, т.к. человеческий мозг может воспринимать только картины в реальном пространстве.

Один из авторов (А. Ю. Хренников) благодарит М. Эндо за консультации по p -адическому анализу и за гостеприимство.

Список литературы

- [1] *I. V. Volovich*. Number theory as the ultimate physical theory. Preprint TH.4781/87.
- [2] *I. V. Volovich*. Class. Quantum Gravit. 1987. V. 4. P. L83–L87.
- [3] *P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191–195.
- [4] *E. Marinari, G. Parisi*. Phys. Lett. B. 1988. V. 203. P. 52–56.
- [5] *I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich*. Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. № 24. P. 4341–4358.
- [6] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*. p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [7] *A. Yu. Khrennikov*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 932–937.
- [8] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic valued distributions in mathematical physic. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [9] *А. Н. Колмогоров*. Основные понятия теории вероятности. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [10] *W. Schikhof*. Ultrametric Calculus. In: Cambridge Studies in Adv. Math. 4. Cambridge: Cambridge Univ., 1984.
- [11] *A. Escassut*. Analytic elements in p -adic analysis. Singapore: World Scientific, 1995.
- [12] *H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe*. Chaos and Fractals. Heidelberg–New York: Springer, 1992.
- [13] Fractals in Science. Eds A. Bunde, S. Havlin. Heidelberg–New York: Springer, 1994.
- [14] *W. Sierpinski*. Elementary theory of numbers. Amsterdam: North-Holland, 1988.
- [15] *S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov*. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 5515–5527.
- [16] *S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov*. Int. J. Mod. Phys. B. 1996. V. 10. P. 1665–1673.
- [17] *A. Yu. Khrennikov*. Foundations of Phys. 1996. V. 26. № 8. P. 1033–1054.
- [18] *B. Dragovic*. Adelic wave function of the universe. In: Proc. 3d A. Friedmann Int. Seminar on Grav. and Cosmology. St. Petersburg: Univ. Press, 1995.
- [19] *B. Dragovic*. Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2349–2365.
- [20] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic classification of fractals chaos. Preprint Ruhr-University, Bochum SFB-237. № 288. 1995.
- [21] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic model of population growth. In: Proc. Int. Conf. “Fractals in Biology and Medicine”. Ascona, 1996. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997. P. 123–126.
- [22] *S. Albeverio, A. Khrennikov, B. Tirozzi*. p -Adic neural networks. Preprint Ruhr-University. Bochum: Ruhr-University, 1997.
- [23] *S. De Smedt*. p -Adic arithmetic. Mathematica in education and research. 1998. № 2 (in print).
- [24] *S. Wolfram*. Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Reading (Mass.): Addison–Wesley, 1989.

Поступила в редакцию 28.VIII.1997 г.