Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов, Взаимодействие локально-максвелловских потоков в модели шероховатых сфер, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 2, 322–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:24:32

© 2013 г. В. Д. Гордевский*, А. А. Гукалов*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНО-МАКСВЕЛЛОВСКИХ ПОТОКОВ В МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТЫХ СФЕР

Для нелинейного кинетического уравнения Бриана–Пиддака построены новые приближенные явные решения. Они имеют вид линейных комбинаций двух локальных максвеллианов типа “ускорение–уплотнение” и минимизируют равномерно-интегральную невязку с весом между частями уравнения.

Ключевые слова: уравнение Бриана–Пиддака, приближенные явные решения, “ускорение–уплотнение”, невязка с весом.

DOI: 10.4213/tmf8457

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается модель шероховатых сфер [1]–[4], которую впервые ввел Бриан в 1894 г. [1]. Методы, развитые Чепменом и Энскогом для общих невращающихся сферических молекул, в 1922 г. были распространены Пиддаком [2] на модель Бриана. Преимущество этой модели перед всеми другими моделями, допускающими изменение состояния вращения молекул, состоит в том, что здесь не требуется никаких переменных, определяющих ориентацию молекулы в пространстве. Молекулы являются абсолютно упругими и абсолютно шероховатыми, что означает следующее. При столкновении двух молекул приходящие в соприкосновение точки в общем случае имеют разные скорости. Предполагается, что две сферы зацепляют друг друга без скольжения. В начальный момент сферы деформируют друг друга, а затем энергия деформации возвращается обратно в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения без каких-либо потерь. В результате относительная скорость сфер в точке их соприкосновения изменяется при ударе на обратную.

Уравнение Больцмана для модели шероховатых сфер (или уравнение Бриана–Пиддака) имеет вид [3]–[6]

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина.
E-mail: gordevskyy2006@yandex.ru, gukalex@ukr.net

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) \equiv \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \times \\ \times [f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1)]. \quad (3)$$

Здесь d – диаметр молекулы, который связан с моментом инерции I следующим соотношением:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \quad (4)$$

где $b \in (0, 2/3]$ – параметр, характеризующий изотропное распределение вещества внутри частицы газа, t – время, $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ – пространственная координата, $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $w = (w^1, w^2, w^3) \in \mathbb{R}^3$ – линейная и угловая скорости молекулы соответственно, $\partial f / \partial x$ – градиент функции f по переменной x (в дальнейшем будем также коротко обозначать его через f'), Σ – единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$, α – единичный вектор из $\mathbb{R}^3$, направленный вдоль линии, соединяющей центры сталкивающихся молекул,

$$B(V - V_1, \alpha) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \quad (5)$$

– столкновительный член.

Линейные (V^*, V_1^*) и угловые (w^*, w_1^*) скорости молекул после столкновения выражаются через соответствующие скорости до столкновения следующим образом:

$$V^* = V - \frac{1}{b+1} \left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2} \alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V) \right), \\ V_1^* = V_1 + \frac{1}{b+1} \left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2} \alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V) \right), \\ \omega^* = \omega + \frac{2}{d(b+1)} \left\{ \alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2} [\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1] \right\}, \\ \omega_1^* = \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)} \left\{ \alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2} [\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1] \right\}. \quad (6)$$

Общий вид максвелловского распределения для рассматриваемой модели был найден в работе [6]. В частности, там был получен явный вид максвелловского распределения, описывающего движение типа “ускорение–уплотнение” газа для этой модели. Нашей задачей является изучение процесса взаимодействия двух потоков указанного типа.

Будем использовать следующую невязку, впервые предложенную в работе [7] (равномерно-интегральная или “смешанная” невязка с весом):

$$\tilde{\Delta} = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)|. \quad (7)$$

Рассмотрим бимодальное распределение

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (8)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$ (индекс i здесь и всюду ниже принимает значения 1 и 2), а максвеллианы M_i соответствуют “ускоряющемуся–уплотняющемуся” движению и имеют следующий вид [6], [8]:

$$M_i = \rho_i I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 e^{-\beta_i((V - \bar{V}_i)^2 + I\omega^2)}, \quad (9)$$

где ρ_i – плотность газа:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i(\bar{V}_i^2 + 2\bar{u}_i x)}, \quad (10)$$

а

$$\bar{V}_i = \hat{V}_i - \bar{u}_i t, \quad (11)$$

– массовая скорость, $\beta_i = 1/2T$ – обратная температура, ρ_{0i} , $\bar{u}_i$, $\hat{V}_i$ – произвольные постоянные из пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$.

В разделе 2 получены результаты, приводящие к достаточным условиям минимизации невязки (7) за счет подходящего выбора коэффициентных функций φ_i и параметров распределения.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) e^{-2\beta_i \bar{u}_i x}, \quad (12)$$

где функции ψ_i таковы, что произведения множителя

$$e^{\beta_i(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \frac{1}{1 + |t|} \quad (13)$$

на величины

$$\psi_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, \quad \psi_i t, \quad t \left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \quad (14)$$

ограничены по t, x на $\mathbb{R}^4$. Пусть, кроме того, выполняются соотношения

$$\bar{u}_i = \frac{s_i \bar{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}, \quad (15)$$

$$\hat{V}_i = \frac{s_i \hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \quad (16)$$

где $\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ – некоторые фиксированные векторы, $s_i > 0$ – произвольная константа, а показатели степени k_i удовлетворяют неравенству

$$k_i \geq \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Тогда существует такая величина $\tilde{\Delta}'$, что

$$\tilde{\Delta} \leq \tilde{\Delta}', \quad (18)$$

причем она имеет следующие конечные пределы:

а) при $k_i > 1/2$ верно равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}' = & \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| \right\} + \\ & + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 s_i \rho_{0i} |\bar{u}_{0i}| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \psi_i \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

б) при $k_i = 1/2$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}' = & \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \right\} + \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \left(\frac{2s_i |\bar{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + s_i^2 (\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}) \right) \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \psi_i \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем сделать оценку сверху для невязки (7), мы оценим подынтегральное выражение (7). Используя формулы (2), (3) и (8) и с учетом того, что максвеллианы M_i обращают в нуль обе части уравнения (1), можно получить соотношения

$$\begin{aligned} D(f) = M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2) = & M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \\ Q(f, f) = & \varphi_1 \varphi_2 [Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Используем следующее разложение интеграла столкновений [9]:

$$Q(f, g) = G(f, g) - fL(g), \quad (22)$$

где уменьшаемое называют прибыточным членом:

$$G(f, g) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) f(t, x, V_1^*, \omega_1^*) g(t, x, V^*, \omega^*), \quad (23)$$

а $L(g)$ – затратный член интеграла столкновений (3), который допускает представление

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) g(t, x, V_1, \omega_1). \quad (24)$$

В работе [10] было показано, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega Q(M_i, M_j) = 0, \quad (25)$$

а это согласно разложению (22) означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega M_i L(M_j). \quad (26)$$

Тогда верно следующее неравенство:

$$|D(f) - Q(f, f)| \leq M_1(|D(\varphi_1)| + \varphi_1 \varphi_2 L(M_2)) + M_2(|D(\varphi_2)| + \varphi_1 \varphi_2 L(M_1)) + \varphi_1 \varphi_2 (G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1)). \quad (27)$$

Интегрируя последнее неравенство по всему пространству линейных и угловых скоростей и используя равенство (26), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| &\leq \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega M_i |D(\varphi_i)| + \\ &+ 4\varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega G(M_1, M_2). \end{aligned} \quad (28)$$

Используем формулу [5]

$$\int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega G(M_1, M_2) = \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \right|, \quad (29)$$

а именно подставим вместо интеграла от прибыточного члена в выражение (28) правую часть равенства (29) и учтем (11):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| &\leq \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + \\ &+ \frac{4\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Theta = \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \hat{V}_1 - \hat{V}_2 + (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)t \right|. \quad (31)$$

Далее воспользуемся следующим очевидным равенством:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\omega e^{-\beta_i I \omega^2} = \left(\frac{\pi}{\beta_i I} \right)^{3/2},$$

тогда правая часть неравенства (30) примет вид

$$\rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-\beta_i (V - \bar{V}_i)^2} + \frac{4\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta,$$

после чего, осуществляя замену переменных $p^2 = \beta_i(V - \bar{V}_i)^2$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_{\mathbb{R}^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| &\leq \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2} + \\ &+ \frac{4\varphi_1\varphi_2 d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Домножая обе части неравенства (32) на $1/(1 + |t|)$ и переходя к супремуму по всем $(t, x) \in \mathbb{R}^4$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} \leq \tilde{\Delta}' = \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} &\left[\sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} + \right. \\ &\left. + \frac{4\varphi_1\varphi_2 d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (33), как легко видеть, имеет смысл в силу выполнения условий (12)–(14). Теперь воспользуемся представлением функции φ_i (12) и вычислим ее производную по переменной t и пространственный градиент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{-2\beta_i \bar{u}_i x}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= e^{-2\beta_i \bar{u}_i x} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \bar{u}_i \psi_i \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, подставляя выражения для производных (34) и используя равенство (10), из оценки (33) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}' &= \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \hat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| + \\ &+ 2\beta_i \psi_i \left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} (\bar{u}_i, p) - (\bar{u}_i, \hat{V}_i) + \bar{u}_i^2 t \right) \left| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{\beta_i (\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} e^{-p^2} + \right. \\ &+ \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} \frac{4\psi_1\psi_2 d^2 \rho_{01}\rho_{02} e^{\beta_1 (\hat{V}_1 - \bar{u}_1 t)^2 + \beta_2 (\hat{V}_2 - \bar{u}_2 t)^2}}{\pi^2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta. \end{aligned} \quad (35)$$

Само существование величины $\tilde{\Delta}'$ вытекает из предположения об ограниченности величин (14) после умножения на функцию (13) и вида выражения (35). Далее осуществим низкотемпературный предельный переход ($\beta_i \rightarrow +\infty$) в утверждении (35), возможность которого обосновывается с помощью леммы 1 работы [11] и стандарт-

ных теорем о предельном переходе под знаком интеграла. Условия всех этих теорем легко проверяются благодаря структуре выражения (35), гладкости функций, которые входят в него, и хорошей сходимости всех интегралов.

Принимая во внимание соотношения (15), (16) и формулу (31), убеждаемся в том, что

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Theta = 0. \quad (36)$$

Используя вновь условия (15) и (16) теоремы, получаем

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} e^{\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} = \begin{cases} e^{s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2}, & k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{s_i^2(\widehat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2}, & k_i = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (37)$$

Кроме того, очевидно, существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_i}}(\bar{u}_i, p) - (\bar{u}_i, \widehat{V}_i) + \bar{u}_i^2 t \right) \right] = \\ = \begin{cases} 2\psi_i(ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 - s_i(\bar{u}_{0i}, p)), & k_i > \frac{1}{2}, \\ 2\psi_i(ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 - s_i^2(\bar{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i}) - s_i(\bar{u}_{0i}, p)), & k_i = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, с учетом (36)–(38) получаем, что результат перехода к низкотемпературному пределу в равенстве (35) при $k_i > 1/2$ с последующей оценкой сверху после вычисления соответствующих интегралов и выполнения элементарных преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}' &= \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i(ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 - s_i(\bar{u}_{0i}, p)) \right| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2} \leq \\ &\leq \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2} + \\ &+ \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp 2\psi_i s_i |\bar{u}_{0i}| |p| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| \right\} + \\ &+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 s_i \rho_{0i} |\bar{u}_{0i}| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \psi_i \right\}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение (19).

В случае $k_i = 1/2$, также используя результаты (36)–(38), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}' &= \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i (ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 - s_i^2 (\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}) - s_i(\bar{u}_{0i}, p)) \right| \times \\ &\quad \times \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} e^{-p^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i ts_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \right\} + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \left(\frac{2s_i |\bar{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + s_i^2 (\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}) \right) \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \psi_i \right\}, \end{aligned}$$

а это означает истинность утверждения (20). ■

Теперь рассмотрим несколько следствий, в которых указаны условия, достаточные для минимизации невязки $\tilde{\Delta}$ (7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функции ψ_i при $k_i > 1/2$ имеют вид

$$\psi_i(t, x) = C_i(x) e^{-s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2}, \quad (39)$$

где $C_i(x)$ – произвольные положительные, гладкие, ограниченные вместе со своими производными на $\mathbb{R}^3$ функции. Тогда невязка $\tilde{\Delta}$ является произвольно малой при достаточно малых значениях s_1, s_2, T_1, T_2 , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\beta_0 > 0$ такие, что для всех s_1, s_2 , удовлетворяющих неравенству $0 < s_1, s_2 < \delta$, и всех $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ выполнено неравенство $\tilde{\Delta} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала проверим, что функции ψ_i вида (39) при $k_i > 1/2$ и достаточно малых $T_1, T_2 > 0$ обеспечивают ограниченность функций (14), умноженных на функцию (13). Проверим это для одной из функций (14) (для остальных это проверяется аналогично):

$$\begin{aligned} t\psi_i e^{\beta_i (\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \frac{1}{1+|t|} &= \frac{t}{1+|t|} C_i(x) e^{\beta_i (\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 - s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2} = \\ &= \frac{t}{1+|t|} C_i(x) \exp \left[\beta_i \left(\frac{s_i \hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}} - \frac{s_i \bar{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}} t \right)^2 - s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2 \right] = \\ &= \frac{t}{1+|t|} C_i(x) \exp [s_i^2 \hat{V}_{0i}^2 \beta_i^{1-2k_i} - 2s_i^2 (\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}) t \beta_i^{1-k_i}]. \quad (40) \end{aligned}$$

Вычислим производную функции ψ_i по переменной t , которая входит в равенство (19):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = C_i(x) e^{-s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2} (-2s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t) = -2\psi_i s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t. \quad (41)$$

Подставляя выражение для производной (41) в равенство (19) и используя достаточно малость величин s_1, s_2, T_1, T_2 , получаем утверждение следствия 1. ■

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в случае $k_i = 1/2$ остаются верны все условия следствия 1 и выполняется еще одно условие:

$$\bar{u}_i \perp \hat{V}_i. \quad (42)$$

Тогда утверждение следствия 1 остается в силе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова проверим ограниченность одной из величин (14), умноженной на функцию (13), для функции ψ_i вида (39):

$$t\psi_i e^{\beta_i(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \frac{1}{1 + |t|} = \frac{t}{1 + |t|} C_i(x) e^{s_i^2 \hat{V}_{0i}^2 \beta_i^{1-2k_i}}.$$

Далее, используя производную (41) и малость величин s_1, s_2, T_1, T_2 , а также условие (42), помогающее обратить в нуль второе слагаемое в правой части равенства (20), вновь получаем утверждение следствия 1. ■

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеет место следующее представление:

$$\varphi_i(t, x) = C_i \left(x + \bar{u}_i \frac{(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \quad (43)$$

где C_i – неотрицательные, финитные или достаточно быстро убывающие на бесконечности гладкие функции. Пусть также имеют место соотношения

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{0i} \beta_i^{-n_i}, \quad (44)$$

$$\hat{V}_i = \hat{V}_{0i} \beta_i^{-k_i}, \quad (45)$$

$$n_i \geq 1; \quad k_i \geq \frac{1}{2}, \quad k_i \geq \frac{n_i}{2}. \quad (46)$$

Тогда верно утверждение

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta} = 0. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что функции

$$t\varphi_i \rho_i(t, x), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \rho_i(t, x), \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i(t, x), \quad t \left(\bar{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \rho_i(t, x)$$

после умножения на $1/(1 + |t|)$ ограничены на пространстве $\mathbb{R}^4$. Далее, в силу предположения, что φ_i – гладкая функция, получаем, что такое же “ограничение с весом” имеет место и для функций $\sqrt{|t|} \varphi_i \rho_i(t, x)$, $|t| \varphi_1 \varphi_2 \rho_1(t, x) \rho_2(t, x)$, а также для $\varphi_1 \varphi_2 \rho_1(t, x) \rho_2(t, x)$. Значит, корректно определена оценка (18).

Очевидно, что остается верным неравенство (33), а правая часть выражения (10) с учетом предположений (44), (45) имеет вид

$$\rho_{0i} \exp \left[\beta_i \left(\left(\frac{\hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}} - \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} t \right)^2 + \frac{2\bar{u}_{0i} x}{\beta_i^{n_i}} \right) \right]. \quad (48)$$

Найдем производные по t и x функции φ_i , используя ее представление (43):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= C'_i \left(x + \bar{u}_i \frac{(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= \frac{t\bar{u}_i^2 - (\bar{u}_i, \hat{V}_i)}{\bar{u}_i^2} \left(\bar{u}_i, C'_i \left(x + \frac{\bar{u}_i(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right) \right).\end{aligned}\quad (49)$$

Теперь перейдем к низкотемпературному пределу в правой части (33) (обоснование возможности такого перехода аналогично сделанному в доказательстве теоремы 1).

Таким образом, используя выражение (48) и условие (46), можно утверждать, что

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \rho_i = \rho_{0i} \eta_i(x), \quad (50)$$

где введено обозначение

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & n_i > 1, k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{2\bar{u}_{0i}x}, & n_i = 1, k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{\hat{V}_{0i}^2 + 2\bar{u}_{0i}x}, & n_i = 1, k_i = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (51)$$

Принимая во внимание условия (44), (45), перейдем также к пределу в самом выражении (43):

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \varphi_i = C(x + a_i), \quad (52)$$

где

$$a_i = \begin{cases} 0, & k_i > \frac{n_i}{2}, \\ \frac{\bar{u}_{0i} \hat{V}_{0i}^2}{2\bar{u}_{0i}^2}, & k_i = \frac{n_i}{2}. \end{cases} \quad (53)$$

Теперь вычислим пределы производных функции φ_i , пользуясь их явным видом (49), а также условиями (44), (45) теоремы:

$$\begin{aligned}\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= 0, \\ \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= C'_i(x + a_i).\end{aligned}\quad (54)$$

В случае функции вида (43) очевидно выполнение равенства (36). Тогда, используя ранее найденные значения (50)–(54), можно утверждать, что

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Delta' = 0, \quad (55)$$

а значит, справедливо и утверждение (47). ■

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции φ_i в распределении (8) имеют вид

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) e^{-\beta_i((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)}, \quad (56)$$

где $\psi_i(t, x)$ таковы, что выражения

$$t\psi_1\psi_2, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial t}, \quad t\psi_i, \quad \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \right|, \quad t\left(\bar{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \right), \quad (57)$$

умноженные на $1/(1+|t|)$, ограничены на $\mathbb{R}^4$. Пусть также выполняется представление (44) для $n_i > 1/2$.

Тогда верна оценка (18), причем

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Delta' &= \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \right| + \\ &+ 4\pi d^2 \rho_{01} \rho_{02} |\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} (\psi_1 \psi_2). \end{aligned} \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, остается верным неравенство (33). Найдем производные функции φ_i (56) по времени t и по пространственной координате x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} &= \rho_{0i} \rho_i^{-1}(t, x) \left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i ((\widehat{V}_i, \bar{u}_i) - t\bar{u}_i^2) \right], \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} &= \rho_{0i} \rho_i^{-1}(t, x) \left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \bar{u}_i \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставим найденные производные в неравенство (33):

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}' &= \pi^{-3/2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \rho_{0i} \rho_i^{-1}(t, x) \left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i ((\widehat{V}_i, \bar{u}_i) - t\bar{u}_i^2) \right] \right| + \\ &+ \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \rho_{0i} \rho_i^{-1}(t, x) \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \bar{u}_i \right) \Big| \rho_i e^{-p^2} + \\ &+ \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta. \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}' &= \pi^{-3/2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \frac{\partial\psi_i}{\partial x} - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\beta_i} \psi_i(\bar{u}_i, p) \right| \rho_{0i} e^{-p^2} + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta. \end{aligned} \quad (60)$$

Далее, снова выполняя предельный переход в равенстве (60) и принимая во внимание, что низкотемпературный предел величины (31) с учетом условия (44) теоремы имеет вид

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Theta = |\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2|, \quad (61)$$

видим, что соответствующий предел величины $\widetilde{\Delta}'$, описываемой равенством (60) при выполнении (44) и (61), будет иметь вид (58). ■

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функции ψ_i в (56) имеют вид

$$\psi_i = C_i(x - \widehat{V}_i t) \quad (62)$$

или

$$\psi_i = C_i([x \times \widehat{V}_i]), \quad (63)$$

где C_i – неотрицательные, гладкие, финитные функции.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если выполняется равенство

$$\text{supp } C_1 \cap \text{supp } C_2 = \emptyset \quad (64)$$

или

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2, \quad (65)$$

то верно утверждение (47);

2) при произвольных $C_1, C_2, \widehat{V}_1, \widehat{V}_2$ имеем

$$\lim_{d \rightarrow 0} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Delta' = 0. \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные функции ψ_i удовлетворяют условиям теоремы 3. Очевидно, что в случае (62)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -(\widehat{V}_i, C'_i), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = C'_i, \quad (67)$$

а в случае (63)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = [\widehat{V}_i \times C'_i]. \quad (68)$$

Найденные производные (67), (68) обращают в нуль первое слагаемое в правой части равенства (58), а дополнительные условия (64), (65) или условие $d \rightarrow 0$ обращают в нуль второе слагаемое в правой части равенства (58). Таким образом, выполняются утверждения (47) или (66) соответственно. ■

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что функции $\varphi_i(t, x)$ имеют вид

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}, \quad (69)$$

причем выражения

$$t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1\bar{u}_1x+2\beta_2\bar{u}_2x}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{2\beta_i\bar{u}_ix}, \quad t\psi_i e^{2\beta_i\bar{u}_ix}, \quad (70)$$

$$\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{2\beta_i\bar{u}_ix}, \quad t \left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) e^{2\beta_i\bar{u}_ix}$$

ограниченны с весом $1/(1+|t|)$, а условие (44) верно при $n_i \geq 1$.

Тогда имеет место оценка (18), причем в случае $n_i > 1$ выполняется утверждение (58), а при $n_i = 1$ низкотемпературный предел величины $\tilde{\Delta}'$ имеет вид

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \Delta' = & \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \mu_i(x) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| + \\ & + 4\pi d^2 \rho_{01} \rho_{02} |\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} [\mu_1(x) \mu_2(x) \psi_1(t, x) \psi_2(t, x)] + \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} |(\bar{u}_{0i}, \widehat{V}_i)| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} [\mu_i(x) \psi_i(t, x)], \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\mu_i(x) = e^{2\bar{u}_{0i}x}. \quad (72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем неравенство (33), которое, очевидно, сохраняет силу. Для этого сначала найдем производные функции φ_i вида (69) по переменным t и x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i((\bar{u}_i, \widehat{V}_i) - t\bar{u}_i^2) \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Найденные производные подставим в неравенство (33) и получим следующее выражение для $\tilde{\Delta}'$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}' = & \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i((\bar{u}_i, \widehat{V}_i) - t\bar{u}_i^2) + \right. \\ & + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left| \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \bar{u}_i x}}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} + \right. \\ & + \left. \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \frac{4\rho_{01}\rho_{02}\psi_1\psi_2 d^2 e^{2\beta_1 \bar{u}_1 x + 2\beta_2 \bar{u}_2 x}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta, \right. \end{aligned}$$

что не превосходит выражения

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{\mathbb{R}^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{2\beta_i \bar{u}_i x} e^{-p^2} + \\ & + \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \frac{4\rho_{01}\rho_{02}\psi_1\psi_2 d^2 e^{2x(\beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2)}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \Theta + \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{\mathbb{R}^3} dp \beta_i \psi_i |((\bar{u}_i, \widehat{V}_i) - t\bar{u}_i^2)| e^{2\beta_i \bar{u}_i x} e^{-p^2}. \end{aligned}$$

Далее, переходя к низкотемпературному пределу в последнем выражении и используя условие (44), получаем формулу (58) при $n_i > 1$, а в случае $n_i = 1$ имеем утверждение (71) с функциями $\mu_i(x)$ вида (72). ■

В теореме 4 получен предел величины $\tilde{\Delta}'$ из оценки (18), что позволяет сформулировать еще одно достаточное условие минимизации невязки (7).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполняются условие (44) при $n_i \geq 1$ и условие (42) следствия 2, а функции ψ_i имеют вид (62) или (63). Тогда справедливы утверждения (47) и (66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что данные функции при выполнении условий этого следствия удовлетворяют требованию теоремы 4. Выражение $t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1\bar{u}_1x+2\beta_2\bar{u}_2x}$ равно нулю в силу первого утверждения следствия 3, а в случае $\hat{V}_1 = \hat{V}_2$ сделаем замену $y = x - \hat{V}_i t$ и получим выражение $tC_1(y)C_2(y)e^{2y(\beta_1\bar{u}_1+\beta_2\bar{u}_2)}$, которое, учитывая финитность функции $C_i(y)$, после умножения на $1/(1+|t|)$ будет ограничено.

Если же функции ψ_i взять в виде (63) и снова предполагать, что $\hat{V}_1 = \hat{V}_2$, то после разложения вектора x по ортогональному базису $\bar{u}_i, \hat{V}_i, [\bar{u}_i \times \hat{V}_i]$ (вследствие (42)) функция $\psi_i = C_i([x \times \hat{V}_i])$ благодаря специфике своего аргумента обращается в нуль в тех направлениях в пространстве $\mathbb{R}^3$, по которым соответствующие экспоненты в условиях теоремы 4 возрастают.

Наконец, пользуясь утверждением теоремы 4, видим, что все слагаемые в (71) обращаются в нуль в силу условий данного следствия. ■

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Найденные в следствии 1 решения $\psi_i(t, x)$ вида (39) ранее для изучаемой здесь модели не встречались. Их особенностью является очень быстрое (быстрее любой степени экспоненты) убывание по времени, т.е. при $t \rightarrow \pm\infty$, а это и означает, что они являются “быстро релаксирующими решениями”. Подобные решения стали возможны только благодаря рассмотрению невязки с весом вида (7) в сочетании с условием бесконечной малости множителей s_i .

В следствиях 1, 2 описаны разные варианты поведения параметров, которые входят в уравнение Бриана–Пиддака и в само бимодальное распределение f , однако они приводят к одним и тем же результатам, а именно к бесконечной малости величины $\tilde{\Delta}$. Например, если векторы $\hat{V}_i$ стремятся к нулю быстрее (случай $k_i > 1/2$), то их направление в пространстве остается произвольным; если же скорость их убывания меньше, что соответствует $k_i = 1/2$, то необходимо привлечение дополнительного условия (42), которое обеспечивает ограниченность по t соответствующих выражений (14) с весом (13) (см. также второе слагаемое в (20)), а значит, конечность самой невязки (7) и ее предела.

Интересно, что при отказе от предположения (17) или при изменении степени знаменателя в (15), как можно убедиться, результаты предельных переходов по β_i становятся просто бесконечными или тривиальными.

Также отметим, что в теореме 1 параметр d , который входит в формулу (3), остается фиксированным, в то время как при получении других результатов рассматривается и предельный переход $d \rightarrow 0$. Физически это означает, что “быстро релаксирующие решения” возможны и для больцмановского газа, т.е. при конечных значениях числа Кнудсена [9], а не только в случае стремления числа Кнудсена к бесконечности (очень сильно разреженный газ).

Список литературы

- [1] G. H. Bryan, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, **64** (1894), 102–106.
- [2] F. B. Pidduck, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **101**:708 (1922), 101–112.
- [3] С. Чепмен, Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов*, ИЛ, М., 1960.
- [4] С. Cercignani, М. Lampic, *J. Statist. Phys.*, **53**:3–4 (1988), 655–672.
- [5] V. D. Gordevsky, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **23**:13 (2000), 1121–1137.
- [6] В. Д. Горdevский, А. А. Гукалов, *Укр. матем. журн.*, **63**:5 (2011), 629–639.
- [7] В. Д. Горdevский, *Докл. НАН Украины. Сер. Матем., естествознание и техн. науки*, **11** (2009), 13–16.
- [8] V. D. Gordevsky, N. V. Andriyasheva, *Журн. матем. физ., анал., геом.*, **1**:5 (2009), 38–53.
- [9] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [10] В. Д. Горdevский, А. А. Гукалов, *Вестн. Харьк. ун-та. Сер. Матем., прикл. матем. и механ.*, **990**:64 (2011), 27–41.
- [11] В. Д. Горdevский, *ТМФ*, **126**:2 (2001), 283–300.

Поступила в редакцию 13.12.2012