Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. П. Кисиеловски, Новые переменные типа Фаддеева–
Ниими для статической теории Янга–Миллса, *ТМФ*,
2013, том 176, номер 2, 222–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:14:06

© 2013 г.

М. Кисиеловски^{*†}

НОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ТИПА ФАДДЕЕВА–НИЕМИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Фаддеев и Ниemi ввели нелинейную сигма-модель в качестве естественного обобщения киральной S^2 -модели Фаддеева. Полями в обобщенной модели являются два киральных поля, принимающих значения в группах $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ и $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$. Шабанов показал, что функционал энергии расширенной модели ограничен снизу величиной топологического инварианта, поэтому возможны возмущения типа узлов и массовая щель. Для статической $SU(3)$ -теории Янга–Миллса введены новые переменные типа Фаддеева–Ниemi, которые показывают структуру нелинейной сигма-модели в лагранжиане.

Ключевые слова: поле Янга–Миллса, переменные Фаддеева–Ниemi, струноподобные солитоны, максимальная абелева калибровка, модель Скирмы–Фаддеева.

DOI: 10.4213/tmf8458

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Фаддеева и Ниemi были введены новые переменные для описания $SU(2)$ -теории Янга–Миллса, лагранжиан которой имеет структуру нелинейной S^2 -сигма-модели [2]. Можно ожидать, что в нелинейной сигма-модели будут появляться топологически нетривиальные возбуждения: в статическом случае граничные условия приводят к компактификации области на сферу S^3 , а киральное поле, осуществляющее отображение из S^3 в S^2 , характеризуется третьей группой $\pi_3(S^2)$ гомотопий сферы. Соответствующий топологический заряд, задаваемый интегралом Хопфа, является нижней гранью для функционала энергии данной модели [3]. Это свойство предполагает, что модель допускает топологически нетривиальные решения. И в самом деле, результаты численных расчетов [4]–[6] (см. также видеопрезентации на сайте <http://users.utu.fi/hietarin/knots/index.html>) показывают, что такие решения существуют. Применение этой модели в $SU(2)$ -теории Янга–Миллса приводит к весьма интересным последствиям. Наличие нижней грани

^{*}Institute of Theoretical Physics, University of Warsaw, Warsaw, Poland.
E-mail: Marcin.Kisielowski@fuw.edu.pl

[†]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

свидетельствует в пользу того, что у сигма-модели имеется массовая щель, а потому считается, что применение переменных Фаддеева–Ниеми подкрепляет гипотезу о существовании массовой щели в $SU(2)$ -теории Янга–Миллса. Кроме того, возмущения нелинейной $\mathbb{S}^2$ -сигма-модели могут иметь структуру узлов: поднятие симплектической формы Кириллова–Костанта на $\mathbb{S}^2$ с помощью отображения, задаваемого киральным полем, можно интерпретировать как магнитное поле, силовые линии которого образуют замкнутые заузленные переплетения. Из этих свойств можно предположить, что частицы в теории Янга–Миллса представляют собой заузленные солитоны [6], [7].

Особенно интересно расширить рассмотрение на случай $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Можно ожидать, что глюонные струны будут при этом связывать кварки. Когда кварки устраниаются, струны не исчезают. Расширенный сценарий Фаддеева–Ниеми предполагает, что струны образуют заузленные переплетения. Более того, этот механизм мог бы подтвердить существование массовой щели в $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Одно возможное расширение концепции переменных Фаддеева–Ниеми на случай $SU(3)$ -теории Янга–Миллса было предложено в работе [8]. В нем использовалась та же $\mathbb{S}^2$ -сигма-модель, что и в случае группы $SU(2)$. Однако представляется возможным, что расширение сигма-модели окажется важным для $SU(3)$ -теории Янга–Миллса.

Возможное обобщение сигма-модели было предложено в работе [9]. В этой модели роль кирального поля на многообразии $\mathbb{S}^2 = SU(2)/U(1)$ играют два киральных поля, принимающих значения в $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ и $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$, т. е. на обеих орбитах действия группы $SU(3)$ на подалгебре Картана алгебры $su(3)$:

$$n := -\frac{i}{\sqrt{2}} g^\dagger \lambda_3 g, \quad m := -\frac{i}{\sqrt{2}} g^\dagger \lambda_8 g,$$

где $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow SU(3)$; здесь и далее $i = \sqrt{-1}$. Модель задается действием

$$S = \int d^4x \left((\partial_\mu n, \partial^\mu n) + (\partial_\mu m, \partial^\mu m) + \frac{1}{e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{e^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right), \quad (1.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (n, [\partial_\mu n, \partial_\nu n] + [\partial_\mu m, \partial_\nu m]), \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (m, [\partial_\mu n, \partial_\nu n] + [\partial_\mu m, \partial_\nu m]) \quad (1.2)$$

являются обратными образами симплектических форм Кириллова–Костанта на $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ и $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$ соответственно, а через $(\cdot, \cdot)$ обозначено $SU(3)$ -инвариантное скалярное произведение на $su(3)$: $(A, B) = -\text{Tr } AB$. Индексы пространства-времени μ, ν поднимаются и опускаются с помощью пространственно-временной метрики Минковского $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. В статическом случае предполагается выполнение граничных условий

$$n|_\infty = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], \quad m|_\infty = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],$$

которые отвечают компактификации области на $\mathbb{S}^3$. Поскольку [9]

$$\pi_3(SU(3)/(U(1) \times U(1))) = \mathbb{Z},$$

в модели могут возникать узлоподобные возмущения. В работе [10] было показано, что функционал статической энергии, отвечающий действию (1.1), ограничен снизу соответствующим топологическим зарядом. Это подтверждает уверенность в том, что в нелинейной сигма-модели имеются топологически нетривиальные возмущения и массовая щель. Мы ожидаем, что после определенной замены переменных структура расширенной нелинейной сигма-модели в $SU(3)$ -теории Янга–Миллса может проявиться таким же образом, как переменные Фаддеева–Ниemi раскрывают структуру S^2 -сигма-модели.

Объект исследования и структура статьи. В настоящей работе исследуется статический предел лагранжиана $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Под статическим пределом мы подразумеваем случай, в котором:

- производная связности A по времени равна нулю, т. е. $\partial_0 A_\mu \equiv 0$;
- временная компонента связности A также равна нулю, $A_0 \equiv 0$.

Статический лагранжиан допускает интерпретацию плотности энергии в пределе нулевых импульсов и оказывается полезным при выводе свойств вакуумного состояния теории.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 дается интерпретация разложения Фаддеева–Ниemi, которая оправдывает наш выбор переменных для $SU(3)$ -теории. В разделе 3 вводятся переменные для $SU(3)$ -теории Янга–Миллса и обсуждается их связь с киральной моделью (1.1). Так как структуры нашего разложения и разложения Фаддеева–Ниemi для $SU(2)$ -теории Янга–Миллса весьма схожи, многие вычисления в случае $SU(3)$ оказываются аналогичными вычислениям в случае $SU(2)$. Основные свойства модели суммируются в разделе 4, а затем в разделе 5 обсуждаются результаты и перспективы дальнейших исследований.

2. СТАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ФАДДЕЕВА–НИЕМИ В СЛУЧАЕ $SU(2)$

В настоящем разделе мы представляем интерпретацию статических переменных Фаддеева–Ниemi в случае $SU(2)$, на основе которой строится разложение, описанное в следующем разделе.

2.1. Разложение связности. В оригинальной статье [1] Фаддеева и Ниemi было представлено разложение $SU(2)$ -связности $A_\mu = A_\mu^p \sigma^p$, $p \in \{1, 2, 3\}$, в базисе Картана–Вейля алгебры Ли $su(2)$:

$$A_\mu = A_\mu \sigma^3 + X_\mu^+ \sigma^- + X_\mu^- \sigma^+,$$

где $\sigma^\pm = (\sigma^1 \pm i\sigma^2)/2$ и $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ – матрицы Паули.

Так как мы рассматриваем только статический случай, исключительно статическая составляющая разложения Фаддеева–Ниemi важна для наших дальнейших рассуждений. Мы интерпретируем компоненту $X_j^+(x)$ как компоненту ковектора $X^+ := (X_1^+, X_2^+, X_3^+)$. Рассмотрим действие группы $SO(3)$ на этот ковектор: $\mathcal{O} \cdot X^+ := X^+ \mathcal{O}^T$, где $\mathcal{O} \in SO(3)$. Идея разложения Фаддеева–Ниemi основана на следующем наблюдении: если векторы $\text{Re } X^+$ и $\text{Im } X^+$ не коллинеарны, то существует элемент группы $SO(3)$, под действием которого третья координата обращается

в ноль:

$$\mathcal{O} \cdot X^+ = (\Phi_1, \Phi_2, 0). \quad (2.1)$$

Обоснованием для такой конструкции служит то, что A_i^1 и A_i^2 можно записать в ортонормированном базисе e_i^1 , e_i^2 плоскости, натянутой на A_i^1 и A_i^2 :

$$X^+ = A^1 + iA^2 = \Phi_1 e^1 + \Phi_2 e^2. \quad (2.2)$$

Таким образом, матрица $\mathcal{O}$ представляет собой $SO(3)$ -матрицу, две первые строки которой суть e^1 и e^2 , а третья строка есть $e^1 \times e^2$, где символ $\times$ обозначает векторное произведение.

Введем обозначение $\Phi := (\Phi_1, \Phi_2, 0)$ и представим Φ в виде произведения нормированного вектора $\mathcal{Q}$ и скалярного поля ρ :

$$\mathcal{Q} = (\phi_1, \phi_2, 0) := \frac{1}{\sqrt{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2}} (\Phi_1, \Phi_2, 0), \quad \rho = \sqrt{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2}.$$

Разложение X^+ принимает при этом следующий вид:

$$X^+ = \mathcal{Q} \rho \mathcal{O}. \quad (2.3)$$

Важно отметить, что $\mathcal{Q}$ однозначно задает $SU(2)$ -матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}$$

(см. также работу [11]).

2.2. Калибровочные преобразования.

2.2.1. Внешние калибровочные преобразования. Имеется $U(1)$ -симметрия действия, которая называется внешней калибровочной симметрией и обозначается через $U_C(1)$. Эта симметрия обусловлена тем, что максимальная абелева калибровка не полностью фиксирует калибровку. Остаточные калибровочные преобразования действуют на Q правыми сдвигами. Соответствующая ковариантная производная имеет вид

$$D_i Q := \partial_i Q + iA_i Q \sigma_3, \quad D_i Q^\dagger := \partial_i Q^\dagger - iA_i \sigma_3 Q^\dagger.$$

2.2.2. Внутренние калибровочные преобразования. Имеется также $U(1)$ -симметрия действия, связанная с $U(1)$ -неоднозначностью в разложении (2.3). Соответствующие калибровочные преобразования называются внутренними калибровочными преобразованиями [1] и обозначаются символом $U_1(1)$. Неоднозначность связана с тем, что элемент $\mathcal{O}$ группы $SO(3)$ и вектор Φ (2.1) определены неоднозначно. При

$$\mathcal{G} := \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

третья компонента X^+ обращается в ноль под действием обеих матриц $\mathcal{O}$ и $\mathcal{G}\mathcal{O}$. В явном виде симметрию можно записать как $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{G}^{-1}\mathcal{O}$, $\Phi \mapsto \Phi\mathcal{G}$. Другими

словами, $U_I(1)$ -неоднозначность появляется благодаря свободе выбора ортонормированного базиса e_i^1, e_i^2 (2.2). Калибровочные преобразования $U_I(1)$ действуют на Q и на $\mathcal{O}$ правыми сдвигами. В работе [1] был построен калибровочный потенциал C_i , отвечающий этим преобразованиям. В наших обозначениях этот потенциал имеет вид

$$C_i := \frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_3 \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T), \quad (2.4)$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ обозначают матрицы представления со спином один алгебры Ли $SU(2)$,

$$(\epsilon_k)_{ij} := \epsilon_{kij}, \quad k, i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.5)$$

а ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивита. Производная, ковариантная по отношению к калибровочным преобразованиям $U_I(1)$ и $U_C(1)$, имеет вид

$$D_i^C Q = D_i Q - i C_i \sigma_2 Q, \quad D_i^C Q^\dagger = D_i Q^\dagger + i C_i Q^\dagger \sigma_2. \quad (2.6)$$

2.3. Киральные поля и суперток. Далее, действие $SU(2)$ -теории Янга–Миллса в работе [1] интерпретируется в терминах киральных полей и супертоков. Определим их следующим образом.

2.3.1. Киральные поля. Первое киральное поле ассоциировано с переменной Q :

$$\mathbf{t} := \frac{1}{\sqrt{2}} Q \sigma_3 Q^\dagger, \quad \mathbf{t}_i := \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}(\sigma_i \mathbf{t}), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Отождествим $\mathbf{t}$ с единичным векторным полем в $\mathbb{R}^3$ с компонентами $\mathbf{t}_i$. Будем использовать одни и те же обозначения для векторного поля и для соответствующего поля, принимающего значения в алгебре $su(2)$. Это не должно привести к недоумению, поскольку формулы будут записываться или в терминах матричных операций (с помощью взятия следа или коммутатора), или в терминах векторных операций (скалярного или векторного произведений).

Второе киральное поле задается матрицей $\mathcal{O}(x)$. Оно определено следующим образом:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}^T \epsilon_3 \mathcal{O}. \quad (2.7)$$

Координаты этого вектора задаются равенствами

$$l_i := -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}(\epsilon_i \mathbf{l}), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Обозначим через $\mathbf{l}$ нормированное векторное поле в $\mathbb{R}^3$ с компонентами l_i . Легко проверить, что это векторное поле совпадает с полем $\mathbf{l}$ из работы [1]. Однако введенное выше поле $\mathbf{t}$ отличается от поля $\mathbf{t}$, определенного в работе [1]. Это отличие будет обсуждаться в п. 2.9.

2.3.2. Суперток. Зададим суперток следующим равенством:

$$J_i = \frac{i}{2} \text{Tr}(\sigma_3 Q^\dagger D_i^C Q). \quad (2.8)$$

Он совпадает с $(U_I(1) \times U_C(1))$ -инвариантным супертоком из работы [1].

2.4. Статический лагранжиан. Далее в работе [1] лагранжиан $SU(2)$ -теории Янга–Миллса был переписан в новых переменных (киральных полях и супертоках). При этом была частично фиксирована калибровка путем наложения условия максимальной абелевой калибровки. Лагранжиан статического $SU(2)$ -поля Янга–Миллса с членами, фиксирующими калибровку, и с полями духов, опущенными в работе [1], имеет вид

$$L_{SU(2)} = \frac{1}{4}(F_{ij} + 2P_{ij})^2 + \frac{1}{2}|D_i X_j^+|^2 - \frac{3}{4}P_{ij}^2, \quad (2.9)$$

где

$$D_i X_j^\pm = (\partial_i \pm iA_i)X_j^\pm, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad P_{ij} = \frac{i}{2}(X_i^+ X_j^- - X_j^+ X_i^-).$$

2.5. Член $|D_i X_j^+|^2/2$ второго порядка. Лагранжиан в статическом случае можно естественным образом разбить на две части. Первая часть – это $|D_i X_j^+|^2/2$. Она содержит члены стандартного гамильтониана сигма-модели для обоих киральных полей.

2.5.1. *Применение разложения (2.3).* Перепишем сначала член $|D_i X_j^+|^2/2$, применив разложение $X^+ = \mathcal{Q}\rho\mathcal{O}$, введенное в п. 2.1:

$$\frac{1}{2}|D_i X_j^+|^2 = \frac{1}{2}(D_i \mathcal{Q} \rho \mathcal{O} + \mathcal{Q} \partial_i \rho \mathcal{O} + \mathcal{Q} \rho \partial_i \mathcal{O}) \cdot (\mathcal{O}^T \rho D_i \mathcal{Q}^\dagger + \mathcal{O}^T \partial_i \rho \mathcal{Q}^\dagger + \partial_i \mathcal{O}^T \rho \mathcal{Q}^\dagger),$$

где точкой обозначено естественное действие ковектора на вектор. С помощью несложного вычисления можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|D_i X_j^+|^2 &= \frac{\rho^2}{2} D_i \mathcal{Q} \cdot D_i \mathcal{Q}^\dagger + \frac{1}{2}(\partial_i \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \partial_i \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) + \\ &+ \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) - \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}((D_i \mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} |\phi_1|^2 & \bar{\phi}_1 \phi_2 & 0 \\ \bar{\phi}_2 \phi_1 & |\phi_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 D_i \phi_1 & \bar{\phi}_1 D_i \phi_2 & 0 \\ \bar{\phi}_2 D_i \phi_1 & \bar{\phi}_2 D_i \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_i \mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} D_i \bar{\phi}_1 \phi_1 & D_i \bar{\phi}_1 \phi_2 & 0 \\ D_i \bar{\phi}_2 \phi_1 & D_i \bar{\phi}_2 \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и $D_i \phi_1 = \partial_i \phi_1 + iA_i \phi_1$, $D_i \phi_2 = \partial_i \phi_2 + iA_i \phi_2$. В силу свойств ковариантной производной каждый член в выражении (2.10) оказывается $U_C(1)$ -калибровочно-инвариантным. Однако $U_1(1)$ -калибровочно-инвариантен не каждый член в этом выражении, а лишь все выражение в целом. В следующем пункте это выражение переписано в виде суммы членов, каждый из которых $U_1(1)$ -калибровочно-инвариантен; эту форму записи мы будем называть явно калибровочно-инвариантной.

2.5.2. *Явно калибровочно-инвариантная форма записи.* Заметим, что $\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T$ принимает значения в алгебре Ли группы $SO(3)$; базис этой алгебры состоит из векторов $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Поскольку третья строка и третий столбец матрицы $\mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q}$ нулевые, только составляющая, отвечающая ϵ_3 , не обращается в ноль. Отсюда

$$\rho^2 \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) - \frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{Tr}(\epsilon_3 (\mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q})) \operatorname{Tr}(\epsilon_3 \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -C_i \rho^2 D_i \mathcal{Q} \epsilon_3 \mathcal{Q}^\dagger.$$

Схожим образом получаем

$$\rho^2 \operatorname{Tr}((D_i \mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -C_i \rho^2 \mathcal{Q} \epsilon_3 D_i \mathcal{Q}^\dagger.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{2} D_i \mathcal{Q} \cdot D_i \mathcal{Q}^\dagger + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes D_i \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) - \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((D_i \mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = \\ = \frac{\rho^2}{2} D_i^C \mathcal{Q} \cdot D_i^C \mathcal{Q}^\dagger - \frac{\rho^2}{2} C_i^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где ковариантные производные $D_i^C \mathcal{Q}$ и $D_i^C \mathcal{Q}^\dagger$ согласованы с соотношениями (2.6):

$$\begin{aligned} D_i^C \mathcal{Q} &= (D_i^C \phi_1, D_i^C \phi_2, 0), & D_i^C \mathcal{Q}^\dagger &= (D_i^C \mathcal{Q}^\dagger)^\dagger, \\ D_i^C \phi_1 &= \partial_i \phi_1 + i A_i \phi_1 - C_i \phi_2, & D_i^C \phi_2 &= \partial_i \phi_2 + i A_i \phi_2 + C_i \phi_1. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{O} \mathcal{O}^T = \mathcal{O}^T \mathcal{O} = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ – единичная матрица, можно показать, что

$$\frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \partial_i \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -\frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T).$$

Используя соотношение

$$(\epsilon_i \epsilon_j)_{mn} = \epsilon_{imm'} \epsilon_{jm'n} = -\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{mj} \quad (2.12)$$

и тот факт, что третий столбец и третья строка матрицы $\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}$ нулевые, можно показать, что

$$\operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) - C_i^2, \quad (2.13)$$

где $\mathbb{P}: so(3) \rightarrow so(3)$ – оператор ортогонального проецирования на подпространство, натянутое на векторы ϵ_1 и ϵ_2 . Теперь из равенств (2.11) и (2.13) получаем, что

$$\frac{1}{2} |D_i X_j^+|^2 = \frac{\rho^2}{2} D_i^C \mathcal{Q} \cdot D_i^C \mathcal{Q}^\dagger + \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 - \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)). \quad (2.14)$$

Важно отметить, что проекция $\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)$ является $U_1(1)$ -калибровочно-ковариантной; при калибровочных преобразованиях $U_1(1)$ она преобразуется следующим образом: $\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mapsto \mathcal{G}^{-1} \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathcal{G}$. На основе этого можно непосредственно показать, что каждый член в выражении (2.14) оказывается $(U_C(1) \times U_1(1))$ -калибровочно-инвариантным.

2.5.3. Член $(\rho^2/2)D_i^C \mathcal{Q} \cdot D_i^C \mathcal{Q}^\dagger$. Можно интерпретировать данный член в терминах кирального поля $\mathbf{t}$ и супертока J_i . Заметим сначала, что

$$\frac{\rho^2}{2} D_i^C \mathcal{Q} \cdot D_i^C \mathcal{Q}^\dagger = \frac{\rho^2}{4} \text{Tr}(D_i^C \mathcal{Q}^\dagger D_i^C \mathcal{Q}) = -\frac{\rho^2}{4} \text{Tr}(\mathcal{Q} D_i^C \mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q} D_i^C \mathcal{Q}^\dagger).$$

Используя, что $[\mathbf{t}, [\mathbf{t}, \cdot]]/2$ представляет собой ортогональную проекцию на пространство, ортогональное $\mathbf{t}$, и то обстоятельство, что ортогональная проекция матрицы $\mathcal{Q} D_i^C \mathcal{Q}^\dagger$ на пространство, натянутое на $\mathbf{t}$, имеет вид $i\sqrt{2}J_i$, можно показать, что (ср., например, с работами [9], [12])

$$\mathcal{Q} D_i^C \mathcal{Q}^\dagger = \frac{1}{2}[\mathbf{t}, D_i^C \mathbf{t}] + i\sqrt{2}J_i \mathbf{t}, \quad (2.15)$$

где $D_i^C \mathbf{t} = \partial_i \mathbf{t} - iC_i[\sigma_2, \mathbf{t}]$. В результате

$$\frac{\rho^2}{2} D_i^C \mathcal{Q} \cdot D_i^C \mathcal{Q}^\dagger = \frac{\rho^2}{8} (D_i^C \mathbf{t})^2 + \frac{\rho^2}{2} (J_i)^2. \quad (2.16)$$

Если интерпретировать ρ как конденсат, то первое слагаемое в правой части этого равенства становится гамильтонианом стандартной сигма-модели, а второе – массовым членом для супертока J_i .

2.5.4. Член $-(\rho^2/2) \text{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q})\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T))$. Этот член приводит к гамильтониану стандартной сигма-модели для кирального поля $\mathbf{l}$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q})\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) &= \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}_i^1 \mathfrak{R}_i^1 - \mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_i^2) \mathbf{t}_3 + \mathfrak{R}_i^1 \mathfrak{R}_i^2 \mathbf{t}_1, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{R}_i = \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T$ – поднятие правоинвариантной формы на $SO(3)$, а $\mathfrak{R}_i^p$ – его составляющие в базисе $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i^p \epsilon_p, \quad \mathfrak{R}_i^p = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_p \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T), \quad p \in \{1, 2, 3\}.$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -[\epsilon_3, [\epsilon_3, \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T]].$$

Отсюда $\mathcal{O}^T \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathcal{O} = 2[\mathbf{l}, [\mathbf{l}, \mathcal{O}^T \partial_i \mathcal{O}]]$. Легко показать, что $\partial_i \mathbf{l} = [\mathbf{l}, \mathcal{O}^T \partial_i \mathcal{O}]$, и в результате $\mathcal{O}^T \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathcal{O} = 2[\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]$. Мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)\mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) &= 4 \text{Tr}([\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}] [\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]) = \\ &= 2 \text{Tr}(\partial_i \mathbf{l} \partial_i \mathbf{l}) = -2 \partial_i l_j \partial_i l_j = -2(\partial_i \mathbf{l})^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i^1 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_1 \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_1 \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) = -\text{Tr}(\mathcal{O}^T \epsilon_1 \mathcal{O} [\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]), \\ \mathfrak{R}_i^2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_2 \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_2 \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) = -\text{Tr}(\mathcal{O}^T \epsilon_2 \mathcal{O} [\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]). \end{aligned}$$

Введем два вспомогательных единичных вектора

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}^T \epsilon_1 \mathcal{O}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}^T \epsilon_2 \mathcal{O}. \quad (2.18)$$

Векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ аналогичны, но вообще говоря не равны векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ из работы [1] (однако они лежат в той же плоскости, а потому в каждой точке векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ связаны с векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ поворотом из группы $SO(2)$). Отсюда следует, что выражение $(\mathfrak{R}_i^1 \mathfrak{R}_i^1 - \mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_i^2) \mathbf{t}_3 / 2 + \mathfrak{R}_i^1 \mathfrak{R}_i^2 \mathbf{t}_1$ имеет вид, отличный от того, который был представлен в работе [1].

Заметим, что

$$[\mathbf{k}, \mathbf{l}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{m}, \quad [\mathbf{l}, \mathbf{m}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}, \quad [\mathbf{m}, \mathbf{k}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{l}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R}_i^1 = -\sqrt{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{k}[\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]) = -\operatorname{Tr}(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l}), \quad \mathfrak{R}_i^2 = -\sqrt{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{m}[\mathbf{l}, \partial_i \mathbf{l}]) = \operatorname{Tr}(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}).$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) = \\ & = \frac{\rho^2}{4} (\partial_i \mathbf{l})^2 + \frac{\rho^2}{4} (\operatorname{Tr}^2(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) - \operatorname{Tr}^2(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l})) \mathbf{t}_3 + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) \operatorname{Tr}(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l}) \mathbf{t}_1. \end{aligned}$$

Этот член порождает гамильтониан $(\partial_i \mathbf{l})^2$ стандартной сигма-модели для кирального поля $\mathbf{l}$.

2.5.5. *Окончательное выражение для члена $|D_i X_j^+|^2/2$.* Используя формулы, приведенные выше, можно записать рассматриваемый член в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |D_i X_j^+|^2 &= \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 + \frac{\rho^2}{8} (D_i^C \mathbf{t})^2 + \frac{\rho^2}{2} (J_i)^2 + \frac{\rho^2}{4} (\partial_i \mathbf{l})^2 + \\ &+ \frac{\rho^2}{4} (\operatorname{Tr}^2(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) - \operatorname{Tr}^2(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l})) \mathbf{t}_3 + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) \operatorname{Tr}(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l}) \mathbf{t}_1. \end{aligned}$$

Член $|D_i X_j^+|^2/2$ порождает два гамильтониана $(D_i^C \mathbf{t})^2$, $(\partial_i \mathbf{l})^2$ стандартной сигма-модели и члены $(\rho^2/2)(J_i)^2$, которые придают массу супертоку J_i .

2.6. Тензор P_{ij} . Напомним, что

$$P_{ij} = \frac{i}{2} (X_i^+ X_j^- - X_j^+ X_i^-).$$

Матрица $P_{ij}(x)$ описывает вложение вещественного ориентированного грассманиана $\tilde{G}(3, 2) = SO(3)/SO(2)$ в трехмерное пространство 2-форм в $\mathbb{R}^3$, т. е. в пространство $(\mathbb{R}^3)^* \wedge (\mathbb{R}^3)^*$. Удобно ввести в рассмотрение тензор $P_k := \epsilon_{ijk} P_{ij} = i \epsilon_{ijk} X_i^+ X_j^-$ вместо тензора P_{ij} . Очевидно, последнее равенство можно обратить:

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} P_k.$$

В терминах матриц ϵ_i , введенных в (2.5), можно записать $P_k = iX^+ \epsilon_k (X^+)^{\dagger}$. Применив разложение (2.3), получим

$$P_k = iQ\rho\mathcal{O}\epsilon_k\mathcal{O}^T\rho Q^{\dagger} = i\rho^2 \operatorname{Tr}((Q^{\dagger} \otimes Q)\mathcal{O}\epsilon_k\mathcal{O}^T).$$

Поскольку $\mathcal{O}\epsilon_k\mathcal{O}^T$ принимает значения в алгебре Ли $so(3)$, вклад дадут только те компоненты $Q^{\dagger} \otimes Q$, которые отвечают $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Третья строка и третий столбец матрицы $Q^{\dagger} \otimes Q$ нулевые, поэтому вклад дают только компоненты, отвечающие ϵ_3 . Таким образом, $P_k = \rho^2 t_2 l_k$. В результате получим, что

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \rho^2 t_2 l_k.$$

Это выражение задает явный вид вложения: l_k суть координаты нормированного векторного поля l в $\mathbb{R}^3$, $l(x) \in \mathbb{S}^2 = SO(3)/SO(2) = \tilde{G}(3, 2)$.

2.7. Тензор Максвелла F_{ij} . Далее в работе [1] $(U_C(1) \times U_I(1))$ -калибровочно-инвариантный суперток J_i подставлен вместо $U_C(1)$ -калибровочного потенциала A_i . Из определения (2.8) супертока J_i следует, что

$$J_i = \frac{i}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_3 Q^{\dagger} \partial_i Q) - A_i + t_2 C_i.$$

Рассматривая J_i как независимую переменную, мы получаем

$$A_i = \frac{i}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_3 Q^{\dagger} \partial_i Q) - J_i + t_2 C_i.$$

Тензор Максвелла имеет вид

$$F_{ij} = \frac{i}{2} \partial_{[i} \operatorname{Tr}(\sigma_3 Q^{\dagger} \partial_{j]} Q) - \partial_{[i} J_{j]} + \partial_{[i} (t_2 C_{j]}),$$

где скобка обозначает антисимметризацию по индексам: $A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$. Член $\partial_{[i} \operatorname{Tr}(\sigma_3 Q^{\dagger} \partial_{j]} Q)$ представляет собой поднятие симплектической формы Кириллова–Костанта на многообразие $\mathbb{S}^2$. В терминах полей t , принимающих значения в $\mathbb{S}^2$, оно имеет следующий вид:

$$\partial_{[i} \operatorname{Tr}(\sigma_3 Q^{\dagger} \partial_{j]} Q) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Tr}(t [\partial_i t, \partial_j t]).$$

Отсюда получаем

$$F_{ij} = \frac{i\sqrt{2}}{4} \operatorname{Tr}(t [\partial_i t, \partial_j t]) - \partial_{[i} J_{j]} + \partial_{[i} (t_2 C_{j]}).$$

Далее, можно показать, что

$$F_{ij} = \frac{i\sqrt{2}}{4} \operatorname{Tr}(t [D_i^C t, D_j^C t]) + t_2 \partial_{[i} C_{j]} - \partial_{[i} J_{j]}.$$

Заметим, что каждое слагаемое в этой формуле оказывается $U_I(1)$ -калибровочно-инвариантным. На первый взгляд, представляется странным, откуда в этом вы-

ражении появляется мнимая единица. Напомним, однако, что в этой формуле использованы матричные обозначения. В векторных обозначениях мнимая единица отсутствует:

$$F_{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot (D_i^C \mathbf{t} \times D_j^C \mathbf{t}) + \mathbf{t}_2 \partial_{[i} C_{j]} - \partial_{[i} J_{j]},$$

где $D_i^C \mathbf{t}_j = \partial_i \mathbf{t}_j - 2C_i \epsilon_{2jk} \mathbf{t}_k$. Член $\partial_{[i} C_{j]}$ можно также интерпретировать в терминах поля $\mathbf{l}$ (или, эквивалентно, в терминах поля $\mathbf{l}$):

$$\partial_{[i} C_{j]} = \sqrt{2} \text{Tr}(\mathbf{l} [\partial_i \mathbf{l}, \partial_j \mathbf{l}]) = -\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}),$$

где $-\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l})$ – снова поднятие симплектической формы Кириллова–Костанта на $\mathbb{S}^2$. В результате тензор Максвелла приобретает следующий вид:

$$F_{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot (D_i^C \mathbf{t} \times D_j^C \mathbf{t}) - \mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}) \mathbf{t}_2 - \partial_{[i} J_{j]}.$$

Это выражение задает максвелловские члены $(\mathbf{t} \cdot (D_i^C \mathbf{t} \times D_j^C \mathbf{t}))^2$ и $(\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}))^2$ для соответствующих киральных полей $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$. Вместе с членами гамильтониана стандартной сигма-модели эти члены описывают, каким образом $\mathbb{S}^2$ -сигма-модель [2] появляется в лагранжиане.

2.8. Статический лагранжиан в переменных Фаддеева–Ниеми. Запишем теперь статический лагранжиан (2.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{SU(2)} = & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot (D_i^C \mathbf{t} \times D_j^C \mathbf{t}) + (\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}) - \rho^2 \epsilon_{ijk} l_k) \mathbf{t}_2 + \partial_{[i} J_{j]} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 - \frac{3}{8} \rho^4 \mathbf{t}_2^2 + \frac{\rho^2}{8} (D_i^C \mathbf{t})^2 + \frac{\rho^2}{2} (J_i)^2 + \frac{\rho^2}{4} (\partial_i \mathbf{l})^2 + \\ & + \frac{\rho^2}{4} (\text{Tr}^2(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) - \text{Tr}^2(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l})) \mathbf{t}_3 + \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) \text{Tr}(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l}) \mathbf{t}_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Эта форма записи наглядно показывает присутствие членов нелинейной сигма-модели в лагранжиане статической $SU(2)$ -теории Янга–Миллса. Здесь киральные поля суть $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$, и в обоих этих полях могут развиваться узлоподобные возмущения. Заметим, что между полями $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$ наблюдается существенная структурная дуальность. Поле $\mathbf{t}$ интерпретируется как “электрический”, а поле $\mathbf{l}$ – как “магнитный” параметр порядка [1].

Выражение (2.19) следует сравнить с формулами (81)–(84) из работы [1]. Точного соответствия не наблюдается ввиду того, что наши переменные слегка отличаются от оригинальных переменных Фаддеева–Ниеми. Как отмечалось выше, основное отличие содержится в слагаемых в третьей строке формулы (2.19) (ср. с соотношением (84) в работе [1]), и это связано с тем, что введенные нами поля $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ в общем случае не эквивалентны полям $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ из работы [1]. Поля $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ преобразуются ковариантно при калибровочных преобразованиях $U_I(1)$, в то время как выражение в последней строке формулы (2.19) оказывается инвариантным относительно обоих калибровочных преобразований $U_I(1)$ и $U_C(1)$. В отличие от нашего случая, переменные $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ из работы [1] инвариантны относительно калибровочных преобразований $U_I(1)$ и $U_C(1)$.

Однако отметим, что поле $\mathbf{k}$, равно как и параметр η из работы [1], не определяются однозначно в статическом режиме (в работе [1] этот режим возникает при $\mathbf{p} = 0$; уравнение (28) из работы [1] становится при этом сингулярным, и величина $\mathbf{k}$, равно как и параметр η , не фиксируются однозначно уравнением (34) из работы [1]). Это связано с тем, что грассманиан, соответствующий статическому случаю, есть $\tilde{G}(3, 2) = SO(3)/SO(2)$, а не $\tilde{G}(4, 2) = SO(4)/(SO(2) \times SO(2))$, и параметр η оказывается излишним. Мы избавляемся от этого лишнего параметра, выбирая $\mathbf{k} = \mathbf{k}$ и $\eta = 0$, при этом налагая условие $U_1(1)$ -калибровочной инвариантности на η и условие $U_1(1)$ -калибровочной ковариантности на $\mathbf{k}$. В результате в формуле (2.19) вместо поля $\mathbf{n}$ из работы [1] возникает поле $\mathbf{t}$ (напомним, что $\mathbf{n} = \mathbf{t}$ при $\eta = 0$). Наше поле $\mathbf{t}$ связано с полем $\mathbf{t}$ работы [1] глобальным поворотом (в частности $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3$). Это будет показано в следующем пункте¹⁾.

2.9. Подход Фаддеева–Ниеми в исходной формулировке. Хотя разложение (2.3) эквивалентно исходному разложению Фаддеева–Ниеми, эти два разложения не совпадают. Соответствие с переменными Фаддеева–Ниеми $\psi_1, \psi_2, e_i, \bar{e}_i$ задается с помощью $U(3)$ -матрицы

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

следующим образом: $X^+ = \psi \mathcal{S}$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2, 0) = \Phi \mathcal{I}^\dagger$ и $\mathcal{S} := \mathcal{I} \mathcal{O}$. Строки матрицы $\mathcal{S}$ имеют вид

$$e := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + i, e^2), \quad \bar{e} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 - i, e^2), \quad e^1 \times e^2.$$

Тем самым разложение принимает вид $X_j^+ = \psi_1 e_j + \psi_2 \bar{e}_j$. Поскольку

$$\mathcal{I} \mathcal{G} = \text{diag}(e^{i\lambda}, e^{-i\lambda}, 1) \mathcal{I},$$

при калибровочном преобразовании $U_1(1)$ поле ψ и векторы e_i преобразуются следующим образом: $\psi_1 \mapsto \psi_1 e^{i\lambda}$, $\psi_2 \mapsto \psi_2 e^{-i\lambda}$ и $e_i \mapsto e^{-i\lambda} e_i$. Это и есть законы преобразования из работы [1].

Введем $SU(2)$ -матрицу

$$R = \frac{1}{\sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}} \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Имеются также отличия в коэффициентах. Это связано с несколькими опечатками, оставшимися в работе [1]. Коэффициент перед слагаемым $(\partial_i \mathbf{l})^2$ оказывается другим, так как в уравнении (54) из работы [1] имеется опечатка: в тексте $\rho^2 |(\partial_a + iC_a) \mathbf{e}| = (\rho^2/2)((\partial_a \mathbf{p})^2 + (\partial_a \mathbf{q})^2)$, в то время как должно быть $\rho^2 |(\partial_a + iC_a) \mathbf{e}|^2 = 2\rho^2((\partial_a \mathbf{p})^2 + (\partial_a \mathbf{q})^2)$. Коэффициент перед членом $\epsilon_{ijk} l_k$ другой, так как имеется опечатка в первом уравнении раздела IX: имеем $H_{ij} = (1/2\sqrt{2})\epsilon_{ijk} l_k$, в то время как должно быть $H_{ij} = (1/2)\epsilon_{ijk} l_k$. Коэффициент перед членом $\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l})$ другой, так как имеется опечатка во втором уравнении раздела IX: вместо $\partial_i \hat{C}_j - \partial_j \hat{C}_i = -(1/2\sqrt{2})\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l})$ должно быть $\partial_i \hat{C}_j - \partial_j \hat{C}_i = -\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l})$.

Киральное поле $\mathbf{t}$ имеет вид

$$\mathbf{t} := \frac{1}{\sqrt{2}} R \sigma_3 R^\dagger,$$

и его координаты определяются равенствами

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}(\sigma_i \mathbf{t}), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Простое вычисление показывает, что векторное поле $\mathbf{t}$ с координатами t_i совпадает с полем $\mathbf{t}$ из работы [1], т. е.

$$t_i = \frac{1}{\rho^2} (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \sigma_i \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Применяя это уравнение и равенство $\psi = \Phi \mathcal{I}^\dagger$, нетрудно показать, что $t_1 = t_3$, $t_2 = -t_1$ и $t_3 = t_2$. Таким образом, наше поле $\mathbf{t}$ и поле $\mathbf{t}$ из исходной формулировки Фаддеева–Ниеми отличаются только глобальным $O(3)$ -преобразованием.

Напомним, что киральное поле $\mathbf{l}$, равно как и калибровочный потенциал C_i , совпадают в обоих представлениях. Единственное отличие состоит в том, что поля $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ в общем случае не совпадают с полями $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ из работы [1]. Однако в каждой точке они лежат в одной и той же плоскости и связаны преобразованием вращения из группы $SO(2)$.

3. СТАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В СЛУЧАЕ $SU(3)$

В настоящем разделе мы построим на основе разложения Фаддеева–Ниеми для статической $SU(2)$ -связности новую параметризацию статической $SU(3)$ -связности. Чтобы показать преемственность нашего разложения и для удобства сравнения, мы придадим настоящему разделу структуру, напоминающую структуру предыдущего раздела.

3.1. Обозначения. Обозначим через λ_a , $a \in \{1, \dots, 8\}$, матрицы Гелл-Манна. Выберем базис алгебры $su(3)$ в виде $\kappa_a = -(i/\sqrt{2})\lambda_a$. Этот базис нормирован относительно скалярного произведения

$$(v, w) := \text{Tr}(v^\dagger w), \quad v, w \in su(3) \otimes \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

В результате для $v = v_a \kappa_a$ и $w = w_a \kappa_a$ получим $(v, w) = \bar{v}_a w_a$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Обозначим через f^{abc} , $a, b, c \in \{1, \dots, 8\}$, структурные константы алгебры $su(3)$, т. е. $[\kappa_a, \kappa_b] = f^{abc} \kappa_c$. Структурные константы полностью антисимметричны и принимают значения

$$f^{123} = \sqrt{2}, \quad f^{147} = f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

В настоящей статье мы будем использовать следующий базис (Картана–Вейля):

$$\kappa_1^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_1 \pm i\kappa_2), \quad \kappa_2^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_4 \mp i\kappa_5), \quad \kappa_3^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_6 \pm i\kappa_7), \quad \kappa_3, \quad \kappa_8.$$

Этот базис ортонормирован относительно скалярного произведения (3.1).

3.2. Сингулярное разложение связности. По аналогии со случаем $SU(2)$ выразим калибровочный потенциал A_μ в базисе Картана–Вейля:

$$A_\mu = B_\mu^1 \kappa_1^+ + B_\mu^2 \kappa_2^+ + B_\mu^3 \kappa_3^+ + \overline{B}_\mu^1 \kappa_1^- + \overline{B}_\mu^2 \kappa_2^- + \overline{B}_\mu^3 \kappa_3^- + A_\mu^3 \kappa_3 + A_\mu^8 \kappa_8, \quad \mu \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

В статическом пределе (т. е. при $\partial_0 A_\mu \equiv 0$, $A_0 \equiv 0$) поле B можно рассматривать как матрицу размера 3×3 (в настоящей работе матрица B предполагается обратимой). Запишем матрицу $B_j^i(x)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, используя ее сингулярное разложение:

$$B = U \rho V^\dagger, \quad (3.2)$$

где $U(x)$ и $V(x)$ суть унитарные (3×3) -матрицы, а $\rho(x)$ – диагональная матрица с положительными элементами ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Такое разложение неоднозначно. Можно частично фиксировать произвол, потребовав, чтобы $V(x)$ была матрицей из группы $SU(3)$. Матрица $U(x)$ представляет собой матрицу из группы $U(3)$, и ее определитель может быть произвольным комплексным числом с единичным модулем. Положим $e^{3i\phi} := \det U$. Мы не полностью фиксируем произвол, поскольку всегда имеется $(U(1) \times U(1))$ -симметрия разложения.

Сравнение формулы (3.2) с формулой (2.3) обнаруживает сильное структурное родство между нашим разложением и разложением Фаддеева–Ниеми. Эта аналогия играет фундаментальную роль в настоящем разделе: в силу структурного сходства легко перенести определения киральных полей, собственного калибровочного потенциала и супертоков из предыдущего раздела; также схожими оказываются и многие вычисления.

3.2.1. Интерпретация переменных. Прежде чем продвигаться вперед, представим интерпретацию разложения, которая позволяет более ясно увидеть аналогии между нашим разложением для $SU(3)$ -связности и исходным разложением Фаддеева–Ниеми для $SU(2)$ -связности.

Вторые степени полей ρ_1, ρ_2, ρ_3 суть собственные значения матрицы

$$h^{pq} := B_i^p \overline{B}_i^q. \quad (3.3)$$

Эта матрица является эрмитовой и полуположительно определенной. Тем самым поля ρ_1, ρ_2, ρ_3 оказываются аналогичными скалярному полю ρ в случае $SU(2)$ (которое представляет собой собственное значение (1×1) -матрицы $X_i^+ \overline{X}_i^+$). Матрица $h(x)$ диагонализуется с помощью $U(3)$ -матрицы: $h = U \rho^2 U^\dagger$. Введем вспомогательные векторы v_i^1, v_i^2, v_i^3 так, чтобы $v_i^p := U_q^\dagger{}^p B_i^q$. Эти векторы удовлетворяют равенствам $v_i^p \overline{v}_i^q = \rho_p^2 \delta^{pq}$ (здесь суммирование по индексу p не производится). Это означает, что они ортогональны относительно скалярного произведения $(A|B) := (A_i, B_i)$.

Как мы уже отмечали, мы рассматриваем случай обратимой матрицы B , т. е. $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ и $\rho_3 \neq 0$. Поэтому ни один из векторов v_i^1, v_i^2, v_i^3 не является

нулевым, и векторы v_i^p образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^3$. Нормируем этот базис, т. е. введем тройку комплексных векторных полей

$$e_i^1 := \frac{1}{\rho_1} v_i^1, \quad e_i^2 := \frac{1}{\rho_2} v_i^2, \quad e_i^3 := \frac{1}{\rho_3} v_i^3.$$

Они ортонормированы, и мы считаем их аналогичными паре полей $e_i, \bar{e}_i$. Матрица U определена неоднозначно, равно как и векторы e_i^p . Произвол можно частично фиксировать, налагая условие, что указанные векторы образуют $SU(3)$ -матрицу V :

$$(V^\dagger)_q^p = e_q^p, \quad p, q \in \{1, 2, 3\}.$$

3.3. Калибровочные преобразования.

3.3.1. Внешние калибровочные преобразования. Имеет место $(U(1) \times U(1))$ -симметрия лагранжиана, которая остается после максимальной абелевой (частичной) калибровки. Будем называть эту симметрию внешней калибровочной симметрией и обозначать ее как $U_C(1) \times U_C(1)$. Соответствующая ковариантная производная действует на U следующим образом:

$$\begin{aligned} D_i U &:= \partial_i U + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} A_i^3 + \frac{1}{2} A_i^8 \right) \kappa_3 U + \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} A_i^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_i^8 \right) \kappa_8 U, \\ D_i U^\dagger &:= \partial_i U^\dagger - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} A_i^3 + \frac{1}{2} A_i^8 \right) U^\dagger \kappa_3 - \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} A_i^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_i^8 \right) U^\dagger \kappa_8. \end{aligned}$$

3.3.2. Внутренние калибровочные преобразования. Как отмечалось выше, разложение (3.2) неоднозначно определено. Имеет место $(U(1) \times U(1))$ -симметрия этого разложения: $U \mapsto UG$, $V \mapsto VG$, где $G = e^{-i\omega^3 \lambda_3 - i\omega^8 \lambda_8}$ принимает значения в диагональной подгруппе $U(1) \times U(1)$ группы $SU(3)$. Будем называть эту симметрию внутренней и обозначать как $U_I(1) \times U_I(1)$. Определим $(U_I(1) \times U_I(1))$ -калибровочный потенциал $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_i^3 \kappa_3^\dagger + \mathfrak{C}_i^8 \kappa_8^\dagger$:

$$\mathfrak{C}_i^3 = \text{Tr}(\kappa_3 V^\dagger \partial_i V), \quad \mathfrak{C}_i^8 = \text{Tr}(\kappa_8 V^\dagger \partial_i V). \quad (3.4)$$

Этот калибровочный потенциал аналогичен $U_I(1)$ -калибровочному потенциалу C_i , заданному в (2.4). Введем в рассмотрение производную

$$\mathfrak{D}_i U = D_i U - U \mathfrak{C}_i, \quad \mathfrak{D}_i U^\dagger = D_i U^\dagger + \mathfrak{C}_i U^\dagger.$$

Она ковариантна относительно обоих калибровочных преобразований $U_C(1) \times U_C(1)$ и $U_I(1) \times U_I(1)$, а также относительно глобальных сдвигов фазы матрицы U .

3.4. Разложение ρ^2 . След матрицы ρ^2 можно интерпретировать как конденсат. Выделим эту часть с помощью новых переменных

$$\begin{aligned} \chi^2 &:= \frac{1}{6} \text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{6} (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2), \\ u &:= -\frac{i}{2\sqrt{6}} \text{Tr}(\kappa_3^\dagger \rho^2) = \frac{1}{4\sqrt{3}} (\rho_1^2 - \rho_2^2), \\ v &:= -\frac{i}{2\sqrt{6}} \text{Tr}(\kappa_8^\dagger \rho^2) = \frac{1}{12} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_3^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку данные соотношения обратимы, эти переменные заменяют (положительные) скалярные поля ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Введем также полярные переменные r, α формулами

$$u = -r \sin 2\alpha, \quad v = r \cos 2\alpha. \quad (3.6)$$

Будем интерпретировать ρ_1, ρ_2, ρ_3 как функции, определяющиеся из соответствий $\chi^2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \pmod{\pi}$ (в этой интерпретации будем предполагать, что величины ρ_1^2, ρ_2^2 и ρ_3^2 , определяемые уравнениями (3.5), суть положительные числа; это налагает определенные ограничения на χ^2, r, α , и мы считаем, что эти ограничения выполнены).

3.5. Киральные поля и супертоки.

3.5.1. Киральные поля. Киральные поля, отвечающие U , имеют следующую структуру:

$$\mathbf{n} := U^\dagger \kappa_3 U, \quad \mathbf{m} := U^\dagger \kappa_8 U. \quad (3.7)$$

Как и в случае $SU(2)$, поля $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ оказываются $(U_C(1) \times U_C(1))$ -инвариантными. Ковариантная производная $\mathfrak{D}_i$ естественным образом переписывается для полей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ как

$$\mathfrak{D}_i \mathbf{n} = \partial_i \mathbf{n} + [\mathfrak{C}_i, \mathbf{n}], \quad \mathfrak{D}_i \mathbf{m} = \partial_i \mathbf{m} + [\mathfrak{C}_i, \mathbf{m}].$$

Киральные поля, соответствующие V , имеют вид

$$\mathbf{q} := V \kappa_3^\alpha V^\dagger, \quad \mathbf{p} := V \kappa_8^\alpha V^\dagger, \quad (3.8)$$

где $\kappa_3^\alpha := \kappa_3 \cos \alpha - \kappa_8 \sin \alpha$ и $\kappa_8^\alpha := \kappa_3 \sin \alpha + \kappa_8 \cos \alpha$. Переменная α определяется из уравнений (3.6). Важно отметить, что структурное отличие между (3.8) и (3.7) содержится не только в параметре α , но также и в местах расположения эрмитовых сопряжений. В результате поля $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ становятся $(U_I(1) \times U_I(1))$ -инвариантными. Это имитирует $U_I(1)$ -инвариантность поля $\mathbf{l}$ (2.7).

3.5.2. Супертоки. Супертоки определяются равенствами (ср. с формулой (2.8))

$$\mathfrak{J}_i^3 := \text{Tr}(\kappa_3 U \mathfrak{D}_i U^\dagger), \quad \mathfrak{J}_i^8 := \text{Tr}(\kappa_8 U \mathfrak{D}_i U^\dagger). \quad (3.9)$$

3.6. Статический лагранжиан $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Как и в случае $SU(2)$, калибровку можно частично фиксировать, налагая условие максимальной абелевой калибровки $D^\mu B_\mu^p = 0$, $p \in \{1, 2, 3\}$, где ковариантная производная задается равенствами

$$\begin{aligned} D_\mu B_\nu^1 &:= \partial_\mu B_\nu^1 - i\sqrt{2} A_\mu^3 B_\nu^1, & D_\mu \overline{B}_\nu^1 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^1 + i\sqrt{2} A_\mu^3 \overline{B}_\nu^1, \\ D_\mu B_\nu^2 &:= \partial_\mu B_\nu^2 + i\frac{\sqrt{2}}{2} A_\mu^3 B_\nu^2 + i\frac{\sqrt{6}}{2} A_\mu^8 B_\nu^2, & D_\mu \overline{B}_\nu^2 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^2 - i\frac{\sqrt{2}}{2} A_\mu^3 \overline{B}_\nu^2 - i\frac{\sqrt{6}}{2} A_\mu^8 \overline{B}_\nu^2, \\ D_\mu B_\nu^3 &:= \partial_\mu B_\nu^3 + i\frac{\sqrt{2}}{2} A_\mu^3 B_\nu^3 - i\frac{\sqrt{6}}{2} A_\mu^8 B_\nu^3, & D_\mu \overline{B}_\nu^3 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^3 - i\frac{\sqrt{2}}{2} A_\mu^3 \overline{B}_\nu^3 + i\frac{\sqrt{6}}{2} A_\mu^8 \overline{B}_\nu^3. \end{aligned}$$

Введем следующие тензоры:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu}^1 &= -i\sqrt{2} B_{[\mu}^1 \overline{B}_{\nu]}^1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} B_{[\mu}^2 \overline{B}_{\nu]}^2 + i\frac{\sqrt{2}}{2} B_{[\mu}^3 \overline{B}_{\nu]}^3, \\ \mathcal{P}_{\mu\nu}^2 &= i\frac{\sqrt{6}}{2} B_{[\mu}^2 \overline{B}_{\nu]}^2 - i\frac{\sqrt{6}}{2} B_{[\mu}^3 \overline{B}_{\nu]}^3. \end{aligned}$$

Тензоры $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ представляют собой аналог тензора P в лагранжиане (2.9) $SU(2)$ -теории Янга–Миллса.

Исследуем статический предел. В этом случае лагранжиан записывается в явном виде (см. работу [8] и приложение к настоящей работе):

$$L_{SU(3)} = \frac{1}{2} |D_i B_j^p + i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2 - \text{Tr}^2 h + \text{Tr} h^2 + \\ + \frac{1}{4} (\partial_{[i} A_{j]}^3 + 2\mathcal{P}_{ij}^1)^2 + \frac{1}{4} (\partial_{[i} A_{j]}^8 + 2\mathcal{P}_{ij}^2)^2 - \frac{3}{4} (\mathcal{P}_{ij}^1)^2 - \frac{3}{4} (\mathcal{P}_{ij}^2)^2. \quad (3.10)$$

Напомним, что матрица h задается формулой (3.3). Она удовлетворяет соотношениям $\text{Tr} h = \text{Tr} \rho^2$, $\text{Tr} h^2 = \text{Tr} \rho^4$.

3.7. Член $|D_i B_j^p + i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2/2$. Как и в случае $SU(2)$, лагранжиан (3.10) естественным образом разбивается на две части. Первая из них – это слагаемое $|D_i B_j^p + i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2/2$. Оно содержит гамильтонианы стандартной сигма-модели для киральных полей.

3.7.1. Член $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}$. Сравнивая статический лагранжиан (3.10) для $SU(3)$ -модели со статическим лагранжианом (2.9) в случае $SU(2)$ -модели, видим, что между ними существует структурное различие. Оно содержится в члене $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}$. В результате в окончательном выражении появляются члены, не соответствующие ни одному из членов в случае $SU(2)$.

Объясним член $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}$ с помощью матричного представления для $B(x)$. Напомним, что в настоящей работе рассматривается невырожденный случай, т. е. предполагается, что матрица $B(x)$ обратима. Поэтому можно записать

$$i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r} = i\epsilon^{sqr} \overline{B_k^s B_i^q B_j^r} (\overline{B}^{-1})_p^k = i \det \overline{B} \epsilon_{kij} (\overline{B}^{-1})_p^k.$$

Напомним также, что мы ввели три матрицы (2.5), которые допускают представление в терминах матриц Гелл-Манна:

$$\epsilon_{1ij} = -\sqrt{2} (\kappa_7)_{ij}, \quad \epsilon_{2ij} = \sqrt{2} (\kappa_5)_{ij}, \quad \epsilon_{3ij} = -\sqrt{2} (\kappa_2)_{ij}.$$

Используя эти матрицы, мы можем записать $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r} = -i \det \overline{B} ((\overline{B}^{-1})^* \epsilon_i)_j^p$, где операция $*$ обозначает матричное транспонирование.

3.7.2. Применение сингулярного разложения. Применим теперь к калибровочному потенциалу сингулярное разложение:

$$i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r} = -i e^{-3i\phi} \det \rho (U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i)_j^p.$$

Член $|D_i B_j^p + i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2/2$ дает следующее матричное представление:

$$\frac{1}{2} \|D_i (U \rho V^\dagger) - i e^{-3i\phi} \det \rho U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i\|^2,$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма Гильберта–Шмидта: $\|M\|^2 := \text{Tr}(M^\dagger M)$.

Разлагая полученное выражение, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |D_i B_j^p + i \epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(D_i U \rho^2 D_i U^\dagger) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_i \rho \partial_i \rho) + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}(D_i V \rho^2 D_i V^\dagger) + \det^2 \rho \text{Tr} \rho^{-2} + \text{Tr}(U^\dagger D_i U \rho V^\dagger \partial_i V \rho) - \\ &- \frac{i}{2} e^{3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger D_i U \rho V^\dagger \epsilon_i V \rho^{-1}) + \frac{i}{2} e^{-3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger D_i U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i V \rho) - \\ &- i \cos 3\phi \det \rho \text{Tr}(\rho^{-1} \partial_i \rho V^\dagger \epsilon_i V) + \sin 3\phi \det \rho \text{Tr}(V \partial_i V^\dagger \epsilon_i). \end{aligned}$$

Как и в случае $SU(2)$ (см. п. 2.5.2), запишем это выражение в виде суммы членов, каждый из которых инвариантен относительно калибровочных преобразований $U_1(1) \times U_1(1)$. Полученное выражение будем называть явно калибровочно-инвариантной формой записи.

3.7.3. Явно калибровочно-инвариантная форма записи. Пусть $P: su(3) \rightarrow su(3)$ – оператор ортогонального проецирования на подпространство, ортогональное подалгебре Картана, натянутой на элементы κ_3 и κ_8 :

$$P(v) = v - (v, \kappa_3) \kappa_3 - (v, \kappa_8) \kappa_8.$$

Важно отметить, что $P(V^\dagger \partial_i V)$ является $(U_1(1) \times U_1(1))$ -калибровочно-ковариантным оператором:

$$P(V^\dagger \partial_i V) \mapsto G^\dagger P(V^\dagger \partial_i V) G.$$

Оператор проецирования P аналогичен проектору $\mathbb{P}$ в случае $SU(2)$ (см. п. 2.5.2). Применив проектор P и ковариантные производные, введенные в п. 3.3, можно записать член $|D_i B_j^p + i \epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2/2$ в виде, который оказывается явно инвариантным относительно обоих калибровочных преобразований $U_C(1) \times U_C(1)$ и $U_1(1) \times U_1(1)$ (т. е. каждое слагаемое обладает $(U_C(1) \times U_C(1))$ - и $(U_1(1) \times U_1(1))$ -калибровочной инвариантностью):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |D_i B_j^p + i \epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^2 U^\dagger \mathfrak{D}_i U) + \\ &+ \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho P(V^\dagger \partial_i V) \rho) - \frac{1}{2} \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)) - \\ &- \frac{i}{2} e^{3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho V^\dagger \epsilon_i V \rho^{-1}) + \frac{i}{2} e^{-3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i V \rho) - \\ &- i \cos 3\phi \det \rho \text{Tr}(\rho^{-1} \partial_i \rho V^\dagger \epsilon_i V) - \sin 3\phi \det \rho \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger \epsilon_i V) + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_i \rho \partial_i \rho) + \det^2 \rho \text{Tr}(\rho^{-2}). \end{aligned}$$

3.7.4. Член $-\text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^2 U^\dagger \mathfrak{D}_i U)/2$. Заметим, что член $|D_i B_j^p + i \epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}|^2/2$ содержит зависимость от U через 1-форму $U^\dagger \mathfrak{D}_i U$. Применив прием, аналогичный тому, который приводит к возникновению соотношения (2.15) в случае $SU(2)$, можно выразить эту 1-форму в терминах кирального поля и супертоков. Для этого разложим $U^\dagger \mathfrak{D}_i U$ на составляющую, параллельную подалгебре Картана, натянутой на матрицы $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$, и составляющую, ортогональную этой подалгебре. Данное разложение основано на следующем наблюдении из работы [9]: оператор $P: u(3) \rightarrow u(3)$,

определяемый соотношением

$$Pv := -\frac{1}{2}([n, [n, v]] + [m, [m, v]]), \quad v \in u(3),$$

представляет собой оператор ортогонального проецирования на подпространство в $u(3)$, которое ортогонально подалгебре Картана, натянутой на элементы n , m и 1 . Имеем

$$P(U^\dagger \mathfrak{D}_i U) = -\frac{1}{2}([n, [n, U^\dagger \mathfrak{D}_i U]] + [m, [m, U^\dagger \mathfrak{D}_i U]]).$$

Заметим, что $\mathfrak{D}_i n = [n, U^\dagger \mathfrak{D}_i U]$ и $\mathfrak{D}_i m = [m, U^\dagger \mathfrak{D}_i U]$. Следовательно,

$$P(U^\dagger \mathfrak{D}_i U) = -\frac{1}{2}([n, \mathfrak{D}_i n] + [m, \mathfrak{D}_i m]).$$

С другой стороны, из определения оператора P получаем, что

$$P(U^\dagger \mathfrak{D}_i U) = U^\dagger \mathfrak{D}_i U - (n, U^\dagger \mathfrak{D}_i U)n - (m, U^\dagger \mathfrak{D}_i U)m - \frac{1}{3} \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U)1.$$

В результате разложение принимает следующий вид (см. также работу [12]):

$$U^\dagger \mathfrak{D}_i U = -\frac{1}{2}([n, \mathfrak{D}_i n] + [m, \mathfrak{D}_i m]) + \mathfrak{J}_i^3 n + \mathfrak{J}_i^8 m + i \partial_i \phi 1. \quad (3.11)$$

Напомним, что $\mathfrak{J}_i^3$ и $\mathfrak{J}_i^8$ суть супертоки, определяемые уравнением (3.9). Используя переменные χ^2 , r и α из п. 3.4 и формулу (3.11), можно показать, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^2 U^\dagger \mathfrak{D}_i U) &= \frac{1}{2} \chi^2 (\mathfrak{D}_i n, \mathfrak{D}_i n) + \frac{1}{2} \chi^2 (\mathfrak{D}_i m, \mathfrak{D}_i m) + \\ &+ \chi^2 (\mathfrak{J}_i^3)^2 + \chi^2 (\mathfrak{J}_i^8)^2 + 3 \chi^2 (\partial_i \phi)^2 - \\ &- i \sqrt{6} r \text{Tr} \left(\left(-\frac{1}{2} ([n, \mathfrak{D}_i n] + [m, \mathfrak{D}_i m]) + \mathfrak{J}_i^3 n + \mathfrak{J}_i^8 m + i \partial_i \phi \right)^2 \kappa_8^{-2\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\kappa_8^{-2\alpha} = \kappa_3 \sin(-2\alpha) + \kappa_8 \cos(-2\alpha)$. Члены, зависящие от χ^2 , содержат **гамильтониан стандартной сигма-модели**, как и ожидалось по аналогии с работой [9], члены, придающие массу супертокам $\mathfrak{J}_i^3$, $\mathfrak{J}_i^8$, а также член, квадратичный по производным от ϕ . Это уравнение аналогично уравнению (2.16) в случае $SU(2)$ -теории.

3.7.5. Члены $-\text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V))/2$ и $-\sin 3\phi \det \rho \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger \epsilon_i V)$. Два указанных члена естественно анализировать вместе, поскольку они зависят от $P(V^\dagger \partial_i V)$ и не зависят от U , и мы можем применить одинаковую технику анализа. Исследуем левоинвариантную форму $V^\dagger \partial_i V$ аналогично тому, как это сделано для формы $U^\dagger \mathfrak{D}_i U$ в предыдущем пункте, и выразим эти два члена, используя киральные поля q и p . Заметим, что имеет место тонкое различие между процедурой, выражающей форму $U^\dagger \mathfrak{D}_i U$ в терминах киральных полей и супертоков, и процедурой, выражающей форму $P(V^\dagger \partial_i V)$ в терминах киральных полей. Это отличие состоит в размещении эрмитовых сопряжений в определениях полей q , p и n , m .

Начнем рассмотрение с члена

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)).$$

Как можно ожидать на основании предыдущих результатов, он порождает члены гамильтониана стандартной сигма-модели.

Разложим $V^\dagger \partial_i V$ по базису Картана–Вейля алгебры Ли $su(3)$:

$$\mathcal{J}_i^p \kappa_p^+ + \overline{\mathcal{J}_i^p} \kappa_p^- - \mathfrak{C}_i^3 \kappa_3 - \mathfrak{C}_i^8 \kappa_8 := V^\dagger \partial_i V.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \rho^2 \kappa_1^+ &= \rho_1^2 \kappa_1^+, & \rho^2 \kappa_2^+ &= \rho_3^2 \kappa_2^+, & \rho^2 \kappa_3^+ &= \rho_2^2 \kappa_3^+, \\ \rho^2 \kappa_1^- &= \rho_2^2 \kappa_1^-, & \rho^2 \kappa_2^- &= \rho_1^2 \kappa_2^-, & \rho^2 \kappa_3^- &= \rho_3^2 \kappa_3^-. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что

$$-\text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)) = (\rho_1^2 + \rho_2^2) \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + (\rho_1^2 + \rho_3^2) \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + (\rho_2^2 + \rho_3^2) \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3. \quad (3.14)$$

В такой форме записи этот член можно интерпретировать, используя поля $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p}$.

Нетрудно заметить, что

$$\partial_i \mathfrak{q} = [\mathfrak{q}, V \partial_i V^\dagger] - \partial_i \alpha \mathfrak{p}, \quad \partial_i \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}, V \partial_i V^\dagger] + \partial_i \alpha \mathfrak{q}. \quad (3.15)$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} (\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) - (\partial_i \alpha)^2 &= ([\mathfrak{q}, V \partial_i V^\dagger], [\mathfrak{q}, V \partial_i V^\dagger]) = \\ &= -([\mathfrak{q}, [\mathfrak{q}, V \partial_i V^\dagger]], V \partial_i V^\dagger) = -([\kappa_3^\alpha, [\kappa_3^\alpha, V^\dagger \partial_i V]], V^\dagger \partial_i V) = \\ &= 4 \cos^2 \alpha \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + 4 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + 4 \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$(\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) - (\partial_i \alpha)^2 = 4 \sin^2 \alpha \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + 4 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + 4 \sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3.$$

Целесообразно использовать следующие линейные комбинации:

$$(\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) + (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) - 2(\partial_i \alpha)^2 = 4 \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + 4 \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + 4 \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) - (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) &= 4 \cos 2\alpha \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + \\ &+ 4 \cos \left(2\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + 4 \cos \left(2\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Оказывается, что выражение (3.14) представляет собой линейную комбинацию членов (3.16) и (3.17) с коэффициентами χ^2 и r :

$$\begin{aligned} \chi^2 ((\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) + (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) - 2(\partial_i \alpha)^2) + r ((\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) - (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p})) &= \\ = (\rho_1^2 + \rho_2^2) \overline{\mathcal{J}_i^1} \mathcal{J}_i^1 + (\rho_1^2 + \rho_3^2) \overline{\mathcal{J}_i^2} \mathcal{J}_i^2 + (\rho_2^2 + \rho_3^2) \overline{\mathcal{J}_i^3} \mathcal{J}_i^3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подводя итог, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)) &= \frac{\chi^2}{2} (\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) + \frac{\chi^2}{2} (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) + \\ &+ \frac{r}{2} (\partial_i \mathfrak{q}, \partial_i \mathfrak{q}) - \frac{r}{2} (\partial_i \mathfrak{p}, \partial_i \mathfrak{p}) - \chi^2 (\partial_i \alpha)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Как и в п. 3.7.4, член, зависящий от χ^2 , является **гамильтонианом стандартной сигма-модели**, что и ожидалось по аналогии с работой [9]. Тем самым это уравнение оказывается аналогичным уравнению (2.17) в случае $SU(2)$. Заметим, что $\chi^2 > r$, и этот член допускает еще одну форму записи:

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)) = \frac{\chi^2 + r}{2} (\partial_i \mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q}) + \frac{\chi^2 - r}{2} (\partial_i \mathbf{p}, \partial_i \mathbf{p}) - \chi^2 (\partial_i \alpha)^2. \quad (3.20)$$

Отсюда следует, что обобщение модели (1.1) также может играть важную роль в сценарии заузливания $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. В этом обобщении векторы κ_3 и κ_8 поворачиваются на угол α , а коэффициент при $(\partial_i \mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q})$ в общем случае отличается от коэффициента при $(\partial_i \mathbf{p}, \partial_i \mathbf{p})$. Мы возвращаемся к расширенной модели Фаддеева–Ниemi (1.1) [9], [10], если эти коэффициенты совпадают. Остаточный параметр α при этом описывает скрытую симметрию расширенной модели Фаддеева–Ниemi. Заметим также, что ограничение Шабанова доставляет нижнюю грань для обобщенной модели (3.20): чтобы это увидеть, достаточно просто применить тот факт, что все три члена в правой части равенства (3.18) положительно определены, а коэффициенты $\rho_1^2 + \rho_2^2$, $\rho_1^2 + \rho_3^2$ и $\rho_2^2 + \rho_3^2$ ограничены снизу величиной минимального из них. Из такого обобщения следует, что все три поля ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 следует интерпретировать как конденсаты. В настоящей работе основное внимание уделяется сценарию, в котором поле χ^2 становится конденсатом и применяется соотношение (3.19).

Проведем теперь анализ второго члена. Заметим, что

$$P(V^\dagger \partial_i V) = -\frac{1}{2} [\kappa_3^\alpha, [\kappa_3^\alpha, V^\dagger \partial_i V]] - \frac{1}{2} [\kappa_8^\alpha, [\kappa_8^\alpha, V^\dagger \partial_i V]].$$

В результате получим

$$VP(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger = \frac{1}{2} [\mathbf{q}, [\mathbf{q}, V \partial_i V^\dagger]] + \frac{1}{2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, V \partial_i V^\dagger]].$$

Из уравнений (3.15) следует, что

$$VP(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger = \frac{1}{2} [\mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q}] + \frac{1}{2} [\mathbf{p}, \partial_i \mathbf{p}]. \quad (3.21)$$

Наконец, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & -\sin 3\phi \det \rho \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger \epsilon_i V) = \\ & = \frac{\sin 3\phi}{2} \det \rho (\partial_i \mathbf{q}, [\epsilon_i, \mathbf{q}]) + \frac{\sin 3\phi}{2} \det \rho (\partial_i \mathbf{p}, [\epsilon_i, \mathbf{p}]). \end{aligned}$$

В статическом лагранжиане $SU(2)$ -теории Янга–Миллса такие члены отсутствуют.

3.7.6. Члены взаимодействия. Обсудим члены $\text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho P(V^\dagger \partial_i V) \rho)$ и

$$-\frac{i}{2} e^{3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho V^\dagger \epsilon_i V \rho^{-1}) + \frac{i}{2} e^{-3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i V \rho),$$

ответственные за взаимодействие между двумя нелинейными сигма-моделями. Эти члены содержат зависимости как от U , так и от V .

Применим расширенный вариант соотношений (3.13). Рассмотрим две диагональные матрицы $G = \text{diag}(g_1, g_2, g_3)$ и $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} G\kappa_1^+ H &= g_1 h_2 \kappa_1^+, & G\kappa_2^+ H &= g_3 h_1 \kappa_2^+, & G\kappa_3^+ H &= g_2 h_3 \kappa_3^+, \\ G\kappa_1^- H &= g_2 h_1 \kappa_1^-, & G\kappa_2^- H &= g_1 h_3 \kappa_2^-, & G\kappa_3^- H &= g_3 h_2 \kappa_3^-. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Введем шесть киральных полей, представляющих собой вещественные и мнимые части следующих векторов:

$$\mathbf{u} = V\kappa_1^+ V^\dagger, \quad \mathbf{v} = V\kappa_2^+ V^\dagger, \quad \mathbf{w} = V\kappa_3^+ V^\dagger. \quad (3.23)$$

Эти поля в совокупности с $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ аналогичны триплету полей $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$, заданных в формулах (2.7), (2.18) в случае $SU(2)$. Используя эти поля, из соотношений (3.11) и (3.21) получим

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho P(V^\dagger \partial_i V) \rho) = \\ &= -\frac{\rho_1 \rho_2}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_1^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_1^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_1^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_1^+) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{p}])) + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_2}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_1^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_1^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_1^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_1^-) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{u}, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{u}, \mathbf{p}])) - \\ &- \frac{\rho_1 \rho_3}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_2^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_2^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_2^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_2^+) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{p}])) + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_3}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_2^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_2^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_2^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_2^-) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{v}, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{v}, \mathbf{p}])) - \\ &- \frac{\rho_2 \rho_3}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_3^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_3^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_3^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_3^+) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{p}])) + \\ &+ \frac{\rho_2 \rho_3}{4} ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_3^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_3^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_3^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_3^-) ((\partial_i \mathbf{q}, [\mathbf{w}, \mathbf{q}]) + (\partial_i \mathbf{p}, [\mathbf{w}, \mathbf{p}])), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_i^\pm := (\mathbf{n}, \kappa_i^\pm)$, $\mathbf{m}_i^\pm := (\mathbf{m}, \kappa_i^\pm)$. С помощью аналогичной техники можно вычислить и оставшиеся члены:

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{2} e^{3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho V^\dagger \epsilon_i V \rho^{-1}) + \frac{i}{2} e^{-3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i V \rho) = \\ &= \frac{i}{4} \rho_3 (\rho_1^2 e^{3i\phi} - \rho_2^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_1^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_1^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_1^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_1^+) (\epsilon_i, \mathbf{u}^\dagger) - \\ &- \frac{i}{4} \rho_3 (\rho_2^2 e^{3i\phi} - \rho_1^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_1^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_1^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_1^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_1^-) (\epsilon_i, \mathbf{u}) + \\ &+ \frac{i}{4} \rho_2 (\rho_3^2 e^{3i\phi} - \rho_1^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_2^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_2^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_2^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_2^+) (\epsilon_i, \mathbf{v}^\dagger) - \\ &- \frac{i}{4} \rho_2 (\rho_1^2 e^{3i\phi} - \rho_3^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_2^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_2^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_2^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_2^-) (\epsilon_i, \mathbf{v}) + \\ &+ \frac{i}{4} \rho_1 (\rho_2^2 e^{3i\phi} - \rho_3^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_3^+, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_3^+, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_3^+ - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_3^+) (\epsilon_i, \mathbf{w}^\dagger) - \\ &- \frac{i}{4} \rho_1 (\rho_3^2 e^{3i\phi} - \rho_2^2 e^{-3i\phi}) ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_3^-, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_3^-, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_3^- - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_3^-) (\epsilon_i, \mathbf{w}) + \\ &+ \frac{\sin 3\phi}{2} \det \rho ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_3, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_3, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_3 - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_3) (\epsilon_i, \mathbf{q} \cos \alpha + \mathbf{p} \sin \alpha) + \\ &+ \frac{\sin 3\phi}{2} \det \rho ((\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, [\kappa_8, \mathbf{n}]) + (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, [\kappa_8, \mathbf{m}]) - 2\mathfrak{J}_i^3 \mathbf{n}_8 - 2\mathfrak{J}_i^8 \mathbf{m}_8) (\epsilon_i, -\mathbf{q} \sin \alpha + \mathbf{p} \cos \alpha), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_3 := (\mathbf{n}, \kappa_3)$, $\mathbf{m}_8 := (\mathbf{m}, \kappa_8)$.

3.7.7. Член $-i \cos 3\phi \det \rho \operatorname{Tr}(\rho^{-1} \partial_i \rho V^\dagger \epsilon_i V)$. Рассматриваемый в данном пункте член имеет нулевой порядок по производным полей $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$. Он модифицирует динамику скалярных полей ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Разложим $-i\rho^{-1}\partial_i\rho$ по базису диагональных матриц $\mathbb{1}, \kappa_3^\alpha, \kappa_8^\alpha$:

$$\begin{aligned} -i\rho^{-1}\partial_i\rho = & -\frac{i}{3}\left(\frac{\partial_i\rho_1}{\rho_1} + \frac{\partial_i\rho_2}{\rho_2} + \frac{\partial_i\rho_3}{\rho_3}\right)\mathbb{1} + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\partial_i\rho_1}{\rho_1} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\frac{\partial_i\rho_2}{\rho_2} + \sin\alpha\frac{\partial_i\rho_3}{\rho_3}\right)\kappa_3^\alpha + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\partial_i\rho_1}{\rho_1} + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\frac{\partial_i\rho_2}{\rho_2} - \cos\alpha\frac{\partial_i\rho_3}{\rho_3}\right)\kappa_8^\alpha. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} -i \cos 3\phi \det \rho \operatorname{Tr}(\rho^{-1} \partial_i \rho V^\dagger \epsilon_i V) = \\ = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 3\phi \det \rho \frac{\partial_i \rho_1}{\rho_1} \left(\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)(\mathbf{q}, \epsilon_i) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)(\mathbf{p}, \epsilon_i) \right) + \\ + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 3\phi \det \rho \frac{\partial_i \rho_2}{\rho_2} \left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)(\mathbf{q}, \epsilon_i) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)(\mathbf{p}, \epsilon_i) \right) - \\ - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 3\phi \det \rho \frac{\partial_i \rho_3}{\rho_3} (\sin \alpha (\mathbf{q}, \epsilon_i) - \cos \alpha (\mathbf{p}, \epsilon_i)). \end{aligned}$$

Заметим, что в эти выражения входят скалярные поля только с производными первого порядка. Аналогичные члены отсутствуют в лагранжиане статической $SU(2)$ -теории, в который вносят вклад только члены второго и нулевого порядка по производным скалярного поля.

3.8. Член $(\partial_{[i} A_{j]}^3 + 2\mathcal{P}_{ij}^1)^2/4 + (\partial_{[i} A_{j]}^8 + 2\mathcal{P}_{ij}^2)^2/4 - 3(\mathcal{P}_{ij}^1)^2/4 - 3(\mathcal{P}_{ij}^2)^2/4$. Покажем в этом пункте, что данный член порождает максвелловские составляющие лагранжианов нелинейных сигма-моделей. Также дадим объяснение тензоров $\mathcal{P}_{ij}^1$ и $\mathcal{P}_{ij}^2$.

3.8.1. *Максвелловские члены.* Как и в случае $SU(2)$, заменим калибровочные потенциалы A_i^3 и A_i^8 на $(U_1(1) \times U_1(1))$ - и $(U_C(1) \times U_C(1))$ -калибровочно-инвариантные супертоки $\mathfrak{J}_i^3$ и $\mathfrak{J}_i^8$. Супертоки имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_i^3 &= \operatorname{Tr}(\kappa_3 U \partial_i U^\dagger) + \frac{3}{2} A_i^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_i^8 + \operatorname{Tr}(\mathbf{n} \mathfrak{E}_i), \\ \mathfrak{J}_i^8 &= \operatorname{Tr}(\kappa_8 U \partial_i U^\dagger) + \frac{\sqrt{3}}{2} A_i^3 - \frac{3}{2} A_i^8 + \operatorname{Tr}(\mathbf{m} \mathfrak{E}_i). \end{aligned}$$

Следовательно, калибровочные потенциалы A_i^3 и A_i^8 можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i^3 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{J}_i^3 - \operatorname{Tr}(\kappa_3 U \partial_i U^\dagger) - \operatorname{Tr}(\mathbf{n} \mathfrak{E}_i)) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (\mathfrak{J}_i^8 - \operatorname{Tr}(\kappa_8 U \partial_i U^\dagger) - \operatorname{Tr}(\mathbf{m} \mathfrak{E}_i)), \\ A_i^8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\mathfrak{J}_i^3 - \operatorname{Tr}(\kappa_3 U \partial_i U^\dagger) - \operatorname{Tr}(\mathbf{n} \mathfrak{E}_i)) - \frac{1}{2} (\mathfrak{J}_i^8 - \operatorname{Tr}(\kappa_8 U \partial_i U^\dagger) - \operatorname{Tr}(\mathbf{m} \mathfrak{E}_i)). \end{aligned}$$

Далее вычислим максвелловские тензоры $\partial_{[i} A_{j]}^3$ и $\partial_{[i} A_{j]}^8$.

Заметим, что $\partial_{[i} \text{Tr}(\kappa_3 U \partial_{j]} U^\dagger)$ и $\partial_{[i} \text{Tr}(\kappa_8 U \partial_{j]} U^\dagger)$ суть поднятия симплектических форм Кириллова–Костанта на $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ и на $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$ соответственно. Эти формы можно выразить в терминах киральных полей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ [9]:

$$\begin{aligned}\partial_{[i} \text{Tr}(\kappa_3 U \partial_{j]} U^\dagger) &= \frac{1}{2} (\mathbf{n}, [\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}] + [\partial_i \mathbf{m}, \partial_j \mathbf{m}]), \\ \partial_{[i} \text{Tr}(\kappa_8 U \partial_{j]} U^\dagger) &= \frac{1}{2} (\mathbf{m}, [\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}] + [\partial_i \mathbf{m}, \partial_j \mathbf{m}]).\end{aligned}$$

Аналогично, $\partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^3$ и $\partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^8$ представляют собой поднятия симплектических форм Кириллова–Костанта на $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ и $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$ соответственно (напомним, что $\mathfrak{C}_i^3 = \text{Tr}(\kappa_3 V^\dagger \partial_i V)$, $\mathfrak{C}_i^8 = \text{Tr}(\kappa_8 V^\dagger \partial_i V)$, см. (3.4)). Эти формы можно выразить в терминах киральных полей $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^3 - \sin \alpha \partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^8 &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]), \\ \sin \alpha \partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^3 + \cos \alpha \partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^8 &= \frac{1}{2} (\mathbf{p}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]).\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^3 &= \frac{\cos \alpha}{2} (\mathbf{q}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]) + \frac{\sin \alpha}{2} (\mathbf{p}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]), \\ \partial_{[i} \mathfrak{C}_{j]}^8 &= -\frac{\sin \alpha}{2} (\mathbf{q}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]) + \frac{\cos \alpha}{2} (\mathbf{p}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]).\end{aligned}$$

С учетом того что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\mathbf{n}, [\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, \mathfrak{D}_j \mathbf{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, \mathfrak{D}_j \mathbf{m}]) &= \frac{1}{2} (\mathbf{n}, [\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}] + [\partial_i \mathbf{m}, \partial_j \mathbf{m}]) - (\partial_{[i} \mathbf{n}, \mathfrak{C}_{j]}), \\ \frac{1}{2} (\mathbf{m}, [\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, \mathfrak{D}_j \mathbf{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, \mathfrak{D}_j \mathbf{m}]) &= \frac{1}{2} (\mathbf{m}, [\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}] + [\partial_i \mathbf{m}, \partial_j \mathbf{m}]) - (\partial_{[i} \mathbf{m}, \mathfrak{C}_{j]}),\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\partial_{[i} (\text{Tr}(\kappa_3 U \partial_{j]} U^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{n} \mathfrak{C}_{j]}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{n}, [\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, \mathfrak{D}_j \mathbf{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, \mathfrak{D}_j \mathbf{m}]) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{n}_3 \cos \alpha - \mathbf{n}_8 \sin \alpha) (\mathbf{q}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{n}_3 \sin \alpha + \mathbf{n}_8 \cos \alpha) (\mathbf{p}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]), \\ \partial_{[i} (\text{Tr}(\kappa_8 U \partial_{j]} U^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{m} \mathfrak{C}_{j]}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{m}, [\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, \mathfrak{D}_j \mathbf{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, \mathfrak{D}_j \mathbf{m}]) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{m}_3 \cos \alpha - \mathbf{m}_8 \sin \alpha) (\mathbf{q}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{m}_3 \sin \alpha + \mathbf{m}_8 \cos \alpha) (\mathbf{p}, [\partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q}] + [\partial_i \mathbf{p}, \partial_j \mathbf{p}]).\end{aligned}$$

Окончательное выражение для членов, исследуемых в данном пункте, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(\partial_{[i}A_{j]}^3 + 2\mathcal{P}_{ij}^1)^2 + \frac{1}{4}(\partial_{[i}A_{j]}^8 + 2\mathcal{P}_{ij}^2)^2 - \frac{3}{4}(\mathcal{P}_{ij}^1)^2 - \frac{3}{4}(\mathcal{P}_{ij}^2)^2 = \\ & = \frac{1}{12}(\mathcal{M}_{ij}^3 - \mathfrak{n}_3^\alpha \mathcal{K}_{ij}^3 - \mathfrak{n}_8^\alpha \mathcal{K}_{ij}^8 + \mathcal{L}_{ij}^3 - 6\mathcal{P}_{ij}^3)^2 + \\ & + \frac{1}{12}(\mathcal{M}_{ij}^8 - \mathfrak{m}_3^\alpha \mathcal{K}_{ij}^3 - \mathfrak{m}_8^\alpha \mathcal{K}_{ij}^8 + \mathcal{L}_{ij}^8 - 6\mathcal{P}_{ij}^8)^2 - 9(\mathcal{P}_{ij}^3)^2 - 9(\mathcal{P}_{ij}^8)^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij}^3 &:= \frac{1}{2}(\mathfrak{n}, [\mathfrak{D}_i \mathfrak{n}, \mathfrak{D}_j \mathfrak{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathfrak{m}, \mathfrak{D}_j \mathfrak{m}]), & \mathcal{M}_{ij}^8 &:= \frac{1}{2}(\mathfrak{m}, [\mathfrak{D}_i \mathfrak{n}, \mathfrak{D}_j \mathfrak{n}] + [\mathfrak{D}_i \mathfrak{m}, \mathfrak{D}_j \mathfrak{m}]), \\ \mathcal{K}_{ij}^3 &:= -\frac{1}{2}(\mathfrak{q}, [\partial_i \mathfrak{q}, \partial_j \mathfrak{q}] + [\partial_i \mathfrak{p}, \partial_j \mathfrak{p}]), & \mathcal{K}_{ij}^8 &:= -\frac{1}{2}(\mathfrak{p}, [\partial_i \mathfrak{q}, \partial_j \mathfrak{q}] + [\partial_i \mathfrak{p}, \partial_j \mathfrak{p}]), \\ \mathcal{L}_{ij}^3 &:= -\partial_{[i} \mathfrak{J}_{j]}^3, & \mathcal{L}_{ij}^8 &:= -\partial_{[i} \mathfrak{J}_{j]}^8, \\ \mathcal{P}_{ij}^3 &:= \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}\mathcal{P}_{ij}^1 + \mathcal{P}_{ij}^2), & \mathcal{P}_{ij}^8 &:= \frac{1}{4\sqrt{3}}(\mathcal{P}_{ij}^1 - \sqrt{3}\mathcal{P}_{ij}^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

и $\mathfrak{n}_3^\alpha := (\mathfrak{n}, \kappa_3^\alpha)$, $\mathfrak{n}_8^\alpha := (\mathfrak{n}, \kappa_8^\alpha)$, $\mathfrak{m}_3^\alpha := (\mathfrak{m}, \kappa_3^\alpha)$, $\mathfrak{m}_8^\alpha := (\mathfrak{m}, \kappa_8^\alpha)$.

Формулу (3.24) следует сравнить с первым членом в выражении (2.19) для лагранжиана $SU(2)$ -теории Янга–Миллса. Равенство (3.24) задает **максвелловские члены** $(\mathcal{M}_{ij}^3)^2 + (\mathcal{M}_{ij}^8)^2$ и $(\mathcal{K}_{ij}^3)^2 + (\mathcal{K}_{ij}^8)^2$ лагранжиана нелинейной сигма-модели. В результате эта формула вместе с соотношениями (3.12) и (3.19) описывает, каким образом ожидаемый лагранжиан сигма-модели (1.1) появляется в статическом лагранжиане $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Он возникает в двух местах: один раз для полей $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ и второй раз для полей $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p}$. Нетрудно заметить, что существует дуальность между полями $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ и полями $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$. Эта дуальность аналогична дуальности между полями $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{l}$ в случае $SU(2)$.

3.8.2. Тензоры $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$. Тензоры $\mathcal{P}_{ij}^1$ и $\mathcal{P}_{ij}^2$ аналогичны тензору P_{ij} в случае $SU(2)$ (тензор P_{ij} исследовался в п. 2.6). Аналогично случаю $SU(2)$ -теории можно интерпретировать члены в терминах киральных и скалярных полей.

Как и в случае $SU(2)$ -теории, удобно применить следующие тензоры:

$$\mathcal{P}_k^1 := \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_{ij}^1, \quad \mathcal{P}_k^2 := \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_{ij}^2.$$

Эти соотношения можно обратить: $\mathcal{P}_{ij}^1 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_k^1$, $\mathcal{P}_{ij}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_k^2$. Применяя матричное представление для B , получим

$$\mathcal{P}_k^1 = \text{Tr}(\tau_1 B \epsilon_k B^\dagger), \quad \mathcal{P}_k^2 = \text{Tr}(\tau_2 B \epsilon_k B^\dagger),$$

где $\tau_1 = \text{diag}(-i\sqrt{2}, i\sqrt{2}, i\sqrt{2})$ и $\tau_2 = \text{diag}(0, i\sqrt{6}, -i\sqrt{6})$. Матрицы τ_1 и τ_2 могут быть записаны в базисе κ_3 , κ_8 как $\tau_1 = 3\kappa_3 + \sqrt{3}\kappa_8$, $\tau_2 = \sqrt{3}\kappa_3 - 3\kappa_8$. В результате

$$\mathcal{P}_k^1 = \text{Tr}(U^\dagger(3\kappa_3 + \sqrt{3}\kappa_8)U\rho V^\dagger \epsilon_k V\rho), \quad \mathcal{P}_k^2 = \text{Tr}(U^\dagger(\sqrt{3}\kappa_3 - 3\kappa_8)U\rho V^\dagger \epsilon_k V\rho).$$

Напомним, что

$$\mathcal{P}_{ij}^3 := \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}\mathcal{P}_{ij}^1 + \mathcal{P}_{ij}^2), \quad \mathcal{P}_{ij}^8 := \frac{1}{4\sqrt{3}}(\mathcal{P}_{ij}^1 - \sqrt{3}\mathcal{P}_{ij}^2).$$

Положим $\mathcal{P}_k^3 := \epsilon_{ijk}\mathcal{P}_{ij}^3$ и $\mathcal{P}_k^8 := \epsilon_{ijk}\mathcal{P}_{ij}^8$. В явном виде мы имеем $\mathcal{P}_k^3 = \text{Tr}(\mathbf{n}\rho V^\dagger \epsilon_k V \rho)$ и $\mathcal{P}_k^8 = \text{Tr}(\mathbf{m}\rho V^\dagger \epsilon_k V \rho)$.

Применив формулы (3.22), можно записать тензоры $\mathcal{P}_{ij}^3$ и $\mathcal{P}_{ij}^8$ в терминах полей ρ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (напомним, что последние три поля задаются выражениями (3.23)):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^3 = & -\rho_1\rho_2(\mathbf{n}_1^+ \mathbf{u}_k - \mathbf{n}_1^- \mathbf{u}_k^\dagger) - \rho_1\rho_3(\mathbf{n}_2^+ \mathbf{v}_k - \mathbf{n}_2^- \mathbf{v}_k^\dagger) - \rho_2\rho_3(\mathbf{n}_3^+ \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_3^- \mathbf{w}_k^\dagger) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\rho_1^2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \rho_2^2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)\mathbf{n}_3 \mathbf{q}_k - \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\rho_1^2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \rho_2^2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)\mathbf{n}_3 \mathbf{p}_k + \\ & + \frac{1}{3}\left(\rho_1^2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \rho_2^2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 2\rho_3^2 \sin \alpha\right)\mathbf{n}_8 \mathbf{q}_k - \\ & - \frac{1}{3}\left(\rho_1^2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \rho_2^2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 2\rho_3^2 \cos \alpha\right)\mathbf{n}_8 \mathbf{p}_k, \\ \mathcal{P}_k^8 = & -\rho_1\rho_2(\mathbf{m}_1^+ \mathbf{u}_k - \mathbf{m}_1^- \mathbf{u}_k^\dagger) - \rho_1\rho_3(\mathbf{m}_2^+ \mathbf{v}_k - \mathbf{m}_2^- \mathbf{v}_k^\dagger) - \rho_2\rho_3(\mathbf{m}_3^+ \mathbf{w}_k - \mathbf{m}_3^- \mathbf{w}_k^\dagger) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\rho_1^2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \rho_2^2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)\mathbf{m}_3 \mathbf{q}_k - \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\rho_1^2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \rho_2^2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)\mathbf{m}_3 \mathbf{p}_k + \\ & + \frac{1}{3}\left(\rho_1^2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \rho_2^2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 2\rho_3^2 \sin \alpha\right)\mathbf{m}_8 \mathbf{q}_k - \\ & - \frac{1}{3}\left(\rho_1^2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \rho_2^2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 2\rho_3^2 \cos \alpha\right)\mathbf{m}_8 \mathbf{p}_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p^\pm &= (\mathbf{n}, \kappa_p^\pm), & \mathbf{m}_p^\pm &= (\mathbf{m}, \kappa_p^\pm), & p &\in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbf{n}_3 &= (\mathbf{n}, \kappa_3), & \mathbf{n}_8 &= (\mathbf{n}, \kappa_8), & \mathbf{m}_3 &= (\mathbf{m}, \kappa_3), & \mathbf{m}_8 &= (\mathbf{m}, \kappa_8), \\ \mathbf{u}_k &= (\mathbf{u}, \epsilon_k), & \mathbf{v}_k &= (\mathbf{v}, \epsilon_k), & \mathbf{w}_k &= (\mathbf{w}, \epsilon_k), & \mathbf{q}_k &= (\mathbf{q}, \epsilon_k), & \mathbf{p}_k &= (\mathbf{p}, \epsilon_k). \end{aligned}$$

Заметим, что в вышеприведенные выражения входят не только киральные поля $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и скалярные поля ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , но и киральные поля $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Это отличает наш случай от случая $SU(2)$ -теории, в котором поля $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$ (поля $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ аналогичны полям $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$) отсутствуют в выражениях для P_{ij} . Это вызвано различиями в матричных структурах соответствующих разложений: U и V представляют собой матрицы размера 3×3 , в то время как $\mathcal{Q}$ – ковектор, а $\mathcal{O}$ – матрица размера 3×3 .

4. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы ввели новые переменные для статической $SU(3)$ -теории Янга–Миллса. Наша идея состоит в том, чтобы взять поле B – составляющую калибровочного потенциала, ортогональную подалгебре Картана $su(3)$, – в виде комплекснозначной (3×3) -матрицы. После этого можно применить сингулярное разложение:

$$B = U \rho V^\dagger, \quad (4.1)$$

где $U(x)$ – матрица из группы $U(3)$, $V(x)$ – матрица из группы $SU(3)$, а $\rho(x)$ – диагональная (3×3) -матрица. В этих переменных статический лагранжиан принимает следующий вид (A_i^3 и A_i^8 суть компоненты в направлении подалгебры Картана):

$$\begin{aligned} L_{SU(3)} = & -\frac{1}{2} \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^2 U^\dagger \mathfrak{D}_i U) - \frac{1}{2} \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 P(V^\dagger \partial_i V)) + \\ & + \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho P(V^\dagger \partial_i V) \rho) + \frac{1}{4} (\partial_{[i} A_{j]}^3 + 2P_{ij}^1)^2 + \frac{1}{4} (\partial_{[i} A_{j]}^8 + 2P_{ij}^2)^2 + \\ & + \text{члены, зависящие от глобального сдвига фазы} + \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_i \rho \partial_i \rho) + \det^2 \rho \text{Tr}(\rho^{-2}) - \text{Tr}^2(\rho^2) + \text{Tr}(\rho^4) - \frac{3}{4} (P_{ij}^1)^2 - \frac{3}{4} (P_{ij}^2)^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Члены, зависящие от глобальных сдвигов фазы поля B_i^p , появляются потому, что члены $D_i B_j^p$ и $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}$ статического лагранжиана (3.10) преобразуются по-разному при глобальных сдвигах фазы. Члены, аналогичные $i\epsilon^{pqr} \overline{B_i^q B_j^r}$, отсутствуют в $SU(2)$ -теории Янга–Миллса, а потому их не с чем сравнивать в случае $SU(2)$. Имеются следующие члены, содержащие зависимость от глобального сдвига фазы:

- член взаимодействия, зависящий от производных первого порядка от киральных полей $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$:

$$-\frac{i}{2} e^{3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho V^\dagger \epsilon_i V \rho^{-1}) + \frac{i}{2} e^{-3i\phi} \det \rho \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^{-1} V^\dagger \epsilon_i V \rho);$$

- член, зависящий от производных первого порядка от киральных полей $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p}$:

$$-\sin 3\phi \det \rho \text{Tr}(P(V^\dagger \partial_i V) V^\dagger \epsilon_i V);$$

- член, зависящий от производных первого порядка от поля ρ :

$$-i \cos 3\phi \det \rho \text{Tr}(\rho^{-1} \partial_i \rho V^\dagger \epsilon_i V).$$

Анализ статического лагранжиана $SU(3)$ -модели базируется на том наблюдении, что разложение Фаддеева–Ниеми $SU(2)$ -связности записывается в похожем виде:

$$X^+ = \mathcal{Q} \rho \mathcal{O}, \quad (4.3)$$

ТАБЛИЦА 1. Сводка основных свойств разложений.

Свойства	$SU(2)$ -теория Янга-Миллса	$SU(3)$ -теория Янга-Миллса
Разложение связности	$X^+ = Q\rho\mathcal{O}$	$B = U\rho V^\dagger$
Внешняя калибровочная симметрия	$U_C(1)$	$U_C(1) \times U_C(1)$
Внутренняя калибровочная симметрия	$U_1(1)$	$U_1(1) \times U_1(1)$
Калибровочные потенциалы	$C_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_3 \mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)$	$\mathfrak{C}_i^3 = \text{Tr}(\kappa_3 V^\dagger \partial_i V), \quad \mathfrak{C}_i^8 = \text{Tr}(\kappa_8 V^\dagger \partial_i V)$
Киральные поля	$\mathbf{t} := \frac{1}{\sqrt{2}} Q \sigma_3 Q^\dagger, \quad \mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}^T \epsilon_3 \mathcal{O}$	$\mathbf{n} = U^\dagger \kappa_3 U, \quad \mathbf{m} = U^\dagger \kappa_8 U, \quad \mathbf{q} := V \kappa_3 V^\dagger, \quad \mathbf{p} := V \kappa_8 V^\dagger$
Супергоки	$J_i = \frac{i}{2} \text{Tr}(\sigma_3 Q^\dagger D_i^C Q)$	$\mathfrak{J}_i^3 = \text{Tr}(\kappa_3 U \mathfrak{D}_i U^\dagger), \quad \mathfrak{J}_i^8 = \text{Tr}(\kappa_8 U \mathfrak{D}_i U^\dagger)$
Стандартные лагранжианы и массовые члены для супертока	$-\frac{\rho^2}{4} \text{Tr}(Q D_i^C Q^\dagger Q D_i^C Q^\dagger) = \frac{\rho^2}{8} (D_i^C \mathbf{t})^2 + \frac{\rho^2}{2} (J_i)^2$	$-\frac{1}{2} \text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho^2 U^\dagger \mathfrak{D}_i U) = \frac{\chi^2}{2} (\mathfrak{D}_i \mathbf{n}, \mathfrak{D}_i \mathbf{n}) + \frac{\chi^2}{2} (\mathfrak{D}_i \mathbf{m}, \mathfrak{D}_i \mathbf{m}) + \chi^2 (\mathfrak{J}_i^3)^2 + \chi^2 (\mathfrak{J}_i^8)^2 + 3\chi^2 (\partial_i \phi)^2$ + члены, не зависящие от χ^2
	$-\frac{\rho^2}{2} \text{Tr}((\mathcal{Q}^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) =$ $= \frac{\rho^2}{4} (\partial_i \mathbf{l})^2 + \frac{\rho^2}{4} (\text{Tr}^2(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) - \text{Tr}^2(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l})) \mathbf{t}_3 + \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}(\mathbf{k} \partial_i \mathbf{l}) \text{Tr}(\mathbf{m} \partial_i \mathbf{l}) \mathbf{t}_1$	$-\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{P}(V^\dagger \partial_i V) \rho^2 \mathbb{P}(V^\dagger \partial_i V)) =$ $= \frac{\chi^2}{2} (\partial_i \mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q}) + \frac{\chi^2}{2} (\partial_i \mathbf{p}, \partial_i \mathbf{p}) + \frac{r}{2} (\partial_i \mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q}) - \frac{r}{2} (\partial_i \mathbf{p}, \partial_i \mathbf{p}) - \chi^2 (\partial_i \alpha)^2$
Максвелловские члены	$\frac{1}{4} (F_{ij} + 2P_{ij})^2 = \frac{1}{4} (L_{ij} + M_{ij} - t_2 K_{ij} - 2P_{ij})^2$	$\frac{1}{4} (\partial_i A_{[i}^3 A_{j]}^3 + 2\mathcal{P}_{ij}^1)^2 + \frac{1}{4} (\partial_i A_{[i}^8 A_{j]}^8 + 2\mathcal{P}_{ij}^2)^2 =$ $= \frac{1}{12} (\mathcal{L}_{ij}^3 + \mathcal{M}_{ij}^3 - \mathbf{n}_3^3 \mathcal{K}_{ij}^3 - \mathbf{n}_8^8 \mathcal{K}_{ij}^8 - 6\mathcal{P}_{ij}^3)^2 + \frac{1}{12} (\mathcal{L}_{ij}^8 + \mathcal{M}_{ij}^8 - \mathbf{m}_3^3 \mathcal{K}_{ij}^3 - \mathbf{m}_8^8 \mathcal{K}_{ij}^8 - 6\mathcal{P}_{ij}^8)^2$

где комплекснозначный ковектор $X^+(x)$ есть компонента связности, ортогональная подалгебре Каратана, $\mathcal{Q}(x)$ – нормированный ковектор, который тем самым задает матрицу $Q(x)$ из группы $SU(2)$, $\rho(x)$ – скаляр, а $\mathcal{O}(x)$ – матрица из группы $SO(3)$. В таких переменных лагранжиан статической $SU(2)$ -теории Янга–Миллса принимает вид

$$L_{SU(2)} = -\frac{\rho^2}{4} \text{Tr}(Q D_i^C Q^\dagger Q D_i^C Q^\dagger) - \frac{\rho^2}{2} \text{Tr}((Q^\dagger \otimes \mathcal{Q}) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T) \mathbb{P}(\mathcal{O} \partial_i \mathcal{O}^T)) + \\ + \frac{1}{4} (\partial_i A_j + 2P_{ij})^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 - \frac{3}{4} P_{ij}^2. \quad (4.4)$$

Благодаря структурному сходству разложений (4.1) и (4.3), а также в силу структурного сходства статических лагранжианов (4.2) и (4.4) многие из свойств введенного нами разложения оказываются аналогичными свойствам разложения Фаддеева–Ниеми.

Эти свойства сведены воедино в табл. 1. В последней строке таблицы в формулах для максвелловских членов использованы обозначения

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot (D_i^C \mathbf{t} \times D_j^C \mathbf{t}), \quad K_{ij} = -\mathbf{l} \cdot (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}), \quad L_{ij} = \partial_i J_j$$

и определения (3.25).

Важно отметить, что имеет место дуальность между полями $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$. Эта дуальность аналогична дуальности между полями $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$ в случае $SU(2)$. Для обеих пар полей $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ в лагранжиане содержатся члены, которые могут способствовать развитию узлоподобных возмущений (похожим образом члены нелинейной сигма-модели появляются для полей $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$ в случае $SU(2)$). Киральная модель, связанная с $SU(3)$ -теорией Янга–Миллса оказывается моделью, которую предвидели Фаддеев и Ниеми и исследовал Шабанов [9], [10] (эта модель задается действием (1.1)).

Заметим, что в случае $SU(2)$ член, аналогичный $\text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho \mathbb{P}(V^\dagger \partial_i V) \rho)$ для случая $SU(3)$, отсутствует. Это связано с матричной структурой разложения: в разложении (4.1) $U(x)$ и $V(x)$ представляют собой (3×3) -матрицы, в то время как в разложении (4.3) $\mathcal{Q}(x)$ – ковектор, а $\mathcal{O}(x)$ – (3×3) -матрица (относительно подробностей этого явления см. вычисления в п. 2.5.4). В результате в случае $SU(3)$ появляются члены, описывающие взаимодействие двух киральных моделей, они имеют второй порядок по производным киральных полей и содержат производные от киральных полей $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, а также производные от киральных полей $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$. В этих членах имеется дуальность между полями $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$. Отметим, что в случае $SU(2)$ члены, которые описывают взаимодействие киральных полей $\mathbf{t}$ и $\mathbf{l}$ и содержат производные от обоих этих киральных полей, возникают только в максвелловской части (т.е. только в первом члене разложения (2.19)). В случае $SU(3)$ аналогичные члены появляются в максвелловском члене (3.10); в дополнение член $\text{Tr}(U^\dagger \mathfrak{D}_i U \rho \mathbb{P}(V^\dagger \partial_i V) \rho)$ описывает взаимодействие двух киральных моделей в стандартном члене гамильтониана стандартной сигма-модели.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В нашем разложении киральные поля принимают значения в

$$SU(3)/(SU(2) \times U(1)) \quad \text{и} \quad SU(3)/(U(1) \times U(1)).$$

Благодаря тому что $\pi_3(SU(3)/(U(1) \times U(1))) = \mathbb{Z}$, в этих переменных могут разбиваться узлоподобные возмущения. Это свойство также выполняется для переменных, введенных в работе [8], где киральные поля принимают значения на $\mathbb{S}^2$. Другие разложения были предложены в работах [13], [14], но в этих работах соответствующие киральные поля принимают значения в $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$, а потому сценарий узлоподобных возмущений реализоваться не может.

В подходе, предложенном в настоящей работе, появляются три скалярных поля; они представляют собой собственные значения (3×3) -матрицы $B_\mu^p \bar{B}_\nu^q \eta^{\mu\nu}$. Условие максимальной абелевой калибровки описывает экстремумы калибровочных орбит интеграла $\int d^4x \operatorname{Tr}(B^\mu \bar{B}_\mu)$. Поэтому экстремали интеграла оказываются калибровочными инвариантами, а поле $\chi^2 = \operatorname{Tr}(B^\mu \bar{B}_\mu)/6$ можно интерпретировать как конденсат. Применяя условие максимальной абелевой калибровки, получим, что собственные значения матрицы $B_\mu^p \bar{B}_\nu^q \eta^{\mu\nu}$ являются $(U(1) \times U(1))$ -калибровочно-инвариантными. Таким образом, интересно исследовать возможность интерпретации всех трех скалярных полей как конденсатов. В такой интерпретации модель, ответственная за инфракрасный предел $SU(3)$ -теории Янга–Миллса, может оказаться расширением модели Фаддеева–Ниеми–Шабанова (см. соотношения (3.8), (3.20) и обсуждение после (3.20)): расширение допускает наличие линейной комбинации гамильтоновых членов стандартной сигма-модели (3.20) (с положительными коэффициентами, отличными друг от друга в общем случае) и $SO(2)$ -поворот подалгебры (3.8) Картана алгебры $su(3)$.

Также представляется интересным обобщить разложение на случай (статической) $SU(N)$ -теории Янга–Миллса. В этом случае матрица $B(x)$ имеет размер $d \times 3$, где $d = N(N-1)/2$ – число корневых векторов. Матрица $U(x)$ представляет собой матрицу из $U(d)$, матрица $\rho(x)$ – прямоугольная диагональная матрица размера $d \times 3$, а $V(x)$ – матрица из $SU(3)$. Внешняя калибровочная симметрия имеет вид $(U_C(1))^{N-1}$, внутренняя калибровочная симметрия – вид $U_I(1) \times U_I(1) \times U_I(d-3)$, если $N \geq 3$, и вид $U_I(1)$, если $N = 2$. При этом $U_I(d-3)$ -составляющая симметрии оставляет $V(x)$ инвариантным и нетривиально преобразует только потенциал $U(x)$. В случае $N \geq 3$ число степеней свободы равно $d^2 + 3 + 8 - (d-3)^2 - 2 = 6d$ и совпадает с числом степеней свободы комплекснозначной $(d \times 3)$ -матрицы $B(x)$.

В настоящей работе рассматривался только статический случай, и было бы любопытно развить наши идеи на нестатический случай. Можно рассмотреть разложение вида $B = U\rho V^\dagger$, где $U(x) \in U(3)$ и $\rho(x)$ есть прямоугольная диагональная (3×4) -матрица, а $V(x) \in SU(4)$ – евклидов вариант $V(x) \in SU(1, 3)$ в лоренцевом случае. Также должна присутствовать внешняя калибровочная $(U_C(1) \times U_C(1))$ -симметрия и внутренняя калибровочная $(U_I(1) \times U_I(1) \times U_I(1))$ -симметрия. Число степеней свободы разложения тем самым равно $9 + 3 + 15 - 3 = 24$ и совпадает с числом степеней свободы комплекснозначной (3×4) -матрицы $B(x)$. Поскольку $\pi_3(SU(3)/(U(1) \times U(1))) = \mathbb{Z}$ и $\pi_3(SU(4)/(U(1) \times U(1) \times U(1))) = \mathbb{Z}$, в получаемой при этом нелинейной сигма-модели могут присутствовать узлоподобные возмущения. Это отвечает аналогии с разложением Фаддеева–Ниеми, в котором узлоподобные возмущения соответствующей нелинейной сигма-модели могут появляться, поскольку гомотопические группы $\pi_3(SU(2)/U(1)) = \mathbb{Z}$ и $\pi_3(SO(4)/(SO(2) \times SO(2))) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ нетривиальны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лагранжиан $SU(3)$ -теории Янга–Миллса в базисе Картана–Вейля

В базисе Картана–Вейля тензор напряженности поля принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{+1} &= dB^1 - i\sqrt{2}A^3 \wedge B^1 + i\overline{B^2} \wedge \overline{B^3}, & \mathcal{F}^{-1} &= d\overline{B^1} + i\sqrt{2}A^3 \wedge \overline{B^1} - iB^2 \wedge B^3, \\
 \mathcal{F}^{+2} &= dB^2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}A^3 \wedge B^2 + & \mathcal{F}^{-2} &= d\overline{B^2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}A^3 \wedge \overline{B^2} - \\
 &\quad + i\frac{\sqrt{6}}{2}A^8 \wedge B^2 + i\overline{B^3} \wedge \overline{B^1}, & &\quad - i\frac{\sqrt{6}}{2}A^8 \wedge \overline{B^2} - iB^3 \wedge B^1, \\
 \mathcal{F}^{+3} &= dB^3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}A^3 \wedge B^3 - & \mathcal{F}^{-3} &= d\overline{B^3} - i\frac{\sqrt{2}}{2}A^3 \wedge \overline{B^3} + \\
 &\quad - i\frac{\sqrt{6}}{2}A^8 \wedge B^3 + i\overline{B^1} \wedge \overline{B^2}, & &\quad + i\frac{\sqrt{6}}{2}A^8 \wedge \overline{B^3} - iB^1 \wedge B^2, \\
 \mathcal{F}^3 &= dA^3 - i\sqrt{2}B^1 \wedge \overline{B^1} + & F^8 &= dA^8 + i\frac{\sqrt{6}}{2}B^2 \wedge \overline{B^2} - \\
 &\quad + i\frac{\sqrt{2}}{2}B^2 \wedge \overline{B^2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}B^3 \wedge \overline{B^3}, & &\quad - i\frac{\sqrt{6}}{2}B^3 \wedge \overline{B^3}.
 \end{aligned}$$

Частично фиксируем калибровку, налагая условие максимальной абелевой калибровки. Таким образом, мы вводим ковариантную производную D относительно остальных калибровочных преобразований $U(1) \times U(1)$:

$$\begin{aligned}
 D_\mu B_\nu^1 &:= \partial_\mu B_\nu^1 - i\sqrt{2}A_\mu^3 B_\nu^1, & D_\mu \overline{B}_\nu^1 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^1 + i\sqrt{2}A_\mu^3 \overline{B}_\nu^1, \\
 D_\mu B_\nu^2 &:= \partial_\mu B_\nu^2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}A_\mu^3 B_\nu^2 + i\frac{\sqrt{6}}{2}A_\mu^8 B_\nu^2, & D_\mu \overline{B}_\nu^2 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^2 - i\frac{\sqrt{2}}{2}A_\mu^3 \overline{B}_\nu^2 - i\frac{\sqrt{6}}{2}A_\mu^8 \overline{B}_\nu^2, \\
 D_\mu B_\nu^3 &:= \partial_\mu B_\nu^3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}A_\mu^3 B_\nu^3 - i\frac{\sqrt{6}}{2}A_\mu^8 B_\nu^3, & D_\mu \overline{B}_\nu^3 &:= \partial_\mu \overline{B}_\nu^3 - i\frac{\sqrt{2}}{2}A_\mu^3 \overline{B}_\nu^3 + i\frac{\sqrt{6}}{2}A_\mu^8 \overline{B}_\nu^3.
 \end{aligned}$$

Лагранжиан теории Янга–Миллса с членами, фиксирующими калибровку (с опущенной духовой частью), имеет вид

$$L = \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{+p}\mathcal{F}^{-p\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^3\mathcal{F}^{3\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^8\mathcal{F}^{8\mu\nu} + \frac{\xi}{2}D^\mu B_\mu^p D^\nu \overline{B}_\nu^p.$$

Другими словами,

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{4}(D_{[\mu}B_{\nu]}^p + i\epsilon^{pqr}\overline{B}_\mu^q\overline{B}_\nu^r)(D^{[\mu}\overline{B}^{p\nu]} - i\epsilon^{pqr}B_\mu^qB_\nu^r) + \\
 &\quad + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^3\mathcal{F}^{3\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^8\mathcal{F}^{8\mu\nu} + \frac{\xi}{2}D^\mu B_\mu^p D^\nu \overline{B}_\nu^p.
 \end{aligned}$$

Лагранжиан можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}(D_\mu B_\nu^p + i\epsilon^{pqr}\overline{B}_\mu^q\overline{B}_\nu^r)(D^\mu \overline{B}^{p\nu} - i\epsilon^{pqr}B_\mu^qB_\nu^r) - (B_\mu^q\overline{B}_\mu^q)^2 + B_\mu^r\overline{B}_\mu^q B_\nu^q\overline{B}_\nu^r + \\
 &\quad + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^3\mathcal{F}^{3\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^8\mathcal{F}^{8\mu\nu} + \frac{\xi}{2}D^\mu B_\mu^p D^\nu \overline{B}_\nu^p - \frac{1}{2}D_\mu B_\nu^p D^\nu \overline{B}^{p\mu}.
 \end{aligned}$$

Как было отмечено в работе [8], при $\xi = 1$ два последних слагаемых удваивают перекрестные члены в $\mathcal{F}_{\mu\nu}^3 \mathcal{F}^{3\mu\nu}/4$ и в $\mathcal{F}_{\mu\nu}^8 \mathcal{F}^{8\mu\nu}/4$. В результате лагранжиан записывается как (положим $\xi = 1$ и опустим граничные члены):

$$L = \frac{1}{2}(D_\mu B_\nu^p + i\epsilon^{pqr} \overline{B_\mu^q B_\nu^r})(D^\mu \overline{B^{p\nu}} - i\epsilon^{pqr} B_\mu^q B_\nu^r) - (B_\mu^q \overline{B_\mu^q})^2 + B_\mu^r \overline{B_\mu^q} B_\nu^q \overline{B_\nu^r} + \\ + \frac{1}{4}(\partial_{[\mu} A_{\nu]}^3 + 2\mathcal{P}_{\mu\nu}^1)(\partial^{[\mu} A^{3\nu]} + 2\mathcal{P}^{1\mu\nu}) + \frac{1}{4}(\partial_{[\mu} A_{\nu]}^8 + 2\mathcal{P}_{\mu\nu}^2)(\partial^{[\mu} A^{8\nu]} + 2\mathcal{P}^{2\mu\nu}) - \\ - \frac{3}{4}\mathcal{P}_{\mu\nu}^1 \mathcal{P}^{1\mu\nu} - \frac{3}{4}\mathcal{P}_{\mu\nu}^2 \mathcal{P}^{2\mu\nu},$$

где

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^1 = -i\sqrt{2}B_{[\mu}^1 \overline{B_{\nu]}^1} + i\frac{\sqrt{2}}{2}B_{[\mu}^2 \overline{B_{\nu]}^2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}B_{[\mu}^3 \overline{B_{\nu]}^3}, \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^2 = i\frac{\sqrt{6}}{2}B_{[\mu}^2 \overline{B_{\nu]}^2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}B_{[\mu}^3 \overline{B_{\nu]}^3}.$$

Благодарности. Автор глубоко признателен Л. Д. Фаддееву за плодотворные обсуждения. Автор также благодарен Санкт-Петербургскому отделению Математического института им. В. А. Стеклова. Работа поддержана финансово Foundation for Polish Science International PhD Projects Programme при софинансировании EU European Regional Development Fund.

Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Nucl. Phys. B*, **776**:1–2 (2007), 38–65, arXiv: hep-th/0608111.
- [2] L. D. Faddeev, *Quantisation of Solitons*, preprint IAS Print 75-QS70, IAS, Princeton, NJ, 1975; “Einstein and several contemporary tendencies in the field theory of elementary particles”, *Relativity, Quanta and Cosmology of the Scientific Thought of Albert Einstein*, eds. M. Pantaleo, F. De Finis, Johnson Reprint, New York, 1979, 247–266.
- [3] А. Ф. Вакуленко, Л. В. Капитанский, *Докл. АН СССР*, **246**:4 (1979), 840–842.
- [4] J. Hietarinta, P. Salo, *Phys. Lett. B*, **451**:1–2 (1999), 60–67, arXiv: hep-th/9811053.
- [5] R. Battye, P. M. Sutcliffe, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:22 (1998), 4798–4801.
- [6] L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Nature*, **387**:6628 (1997), 58–61, arXiv: hep-th/9610193.
- [7] L. D. Faddeev, “Knots as possible excitations of the quantum Yang–Mills fields”, *Quantum Field Theory and Beyond*, Essays in Honor of Wolfhart Zimmermann (Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, 3–6 February 2008), eds. E. Seiler, K. Sibold, World Sci., Hackensack, NJ, 2008, 156–166, arXiv: 0805.1624.
- [8] Т. А. Болохов, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 276–290.
- [9] L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Phys. Lett. B*, **449**:3–4 (1999), 214–218, arXiv: hep-th/9812090.
- [10] S. V. Shabanov, *J. Math. Phys.*, **43**:8 (2002), 4127–4134, arXiv: hep-th/0202146.
- [11] L. D. Faddeev, *An alternative interpretation of the Weinberg–Salam model*, arXiv: 0811.3311.
- [12] S. V. Shabanov, *Phys. Lett. B*, **463**:2–4 (1999), 263–272, arXiv: hep-th/9907182.
- [13] K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, S. Kato, *PoS FacesQCD*, 2010, 003, 10 pp., arXiv: 1102.4150.
- [14] J. Evslin, S. Giacomelli, K. Konishi, A. Michelini, *JHEP*, **06** (2011), 094, 25 pp., arXiv: 1103.5969.