Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Корнеев, Н. Е. Кулагин, А. Ф. Попков, Нелинейные локализованные волны в среде с нелокальным взаимодействием, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 366–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:58:01

© 1998 г. В. И. Корнеев*, Н. Е. Кулагин†, А. Ф. Попков†

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Найдены солитонные решения нелинейных интегродифференциальных уравнений с ядром типа $\lambda/(\tau - \tau')$, используемых для описания туннелирования частиц, магнитных и сверхпроводящих вихрей в среде с нелокальным взаимодействием. Методом фурье-преобразования получена асимптотика четных и нечетных локализованных решений. Найдены аналитические решения при частных значениях параметров. Методом численного расчета получена полная картина поведения солитонных решений в произвольной области изменения параметра взаимодействия λ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Локализованные во времени либо в пространстве волны в нелинейных средах с нелокальным взаимодействием привлекают в последнее время внимание исследователей в различных областях физики. К ним относятся, например, джозефсоновские флюксоны в распределенном сверхпроводящем контакте с большим критическим током [1–5], инстантоны туннелирования в точечном сверхпроводящем контакте [6, 7], инстантоны в магнитных мезочастицах [8–10] и солитоны в распределенных спиновых системах [11–13]. Общим свойством таких нелинейных систем является то, что в конечном итоге их описание можно свести к нелинейному уравнению для одной динамической переменной с интегральным ядром, которое эквивалентно уравнению движения инерциальной частицы в среде с нелокальным взаимодействием, а именно

$$M q_{\tau\tau} = \frac{d}{dq} V(q) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau - \tau') q_{\tau'} d\tau', \quad (1)$$

где M – масса частицы, $V(q)$ – нелинейная потенциальная функция, $G(\tau - \tau')$ – ядро, учитывающее динамический отклик среды. Роль динамической переменной $q(\tau)$, массы и других параметров в уравнении (1) выполняют различные физические параметры и их комбинации в зависимости от типа среды. В случае распределенного джозефсоновского контакта с большим отношением лондоновской λ_L и джозефсоновской λ_J глубин экранировки электродинамика описывается нелокальным уравнением “синус-Гордон” [1, 2]. В

*Московский институт электронной техники, Зеленоград, Москва, Россия

†Научно-исследовательский институт физических проблем, Зеленоград, Москва, Россия

автомодельном волновом приближении, когда структура локализованной волны (флуксона) зависит от координаты x и времени t только в комбинации $t = x - vt$, где v – скорость флуксона, роль массы выполняет величина $M = -C(\hbar v/2e)^2$, где C – погонная емкость, $\hbar$ – постоянная Планка, e – заряд электрона. Динамической переменной при этом является скачок фазы сверхпроводящих электронов на переходе. Потенциальная энергия представляет собой энергию сверхпроводящего контакта

$$V(q) = V_0(1 - \cos q),$$

где $V_0 = j_c \hbar/2e$, а j_c – линейная плотность критического тока. Ядро $G(\tau - \tau')$ определяется эффектом экранировки магнитного поля флуксона в берегах перехода и в пределе $\lambda_L/\lambda_J \rightarrow \infty$ имеет простой вид:

$$G = \frac{V_0 \lambda_J^2}{\pi \lambda_L (\tau - \tau')}.$$

Уравнение (1) в данном случае после перенормировок принимает следующий вид:

$$-q_{xx} = \sin q + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{x'} d}{x - x'} dx', \quad (2)$$

где $x = \tau(V_0/|M|)^{1/2}$, $\lambda = \lambda_J^2/e\pi\lambda_L(V_0/|M|)^{1/2}$.

Другим важным примером системы с нелокальным взаимодействием являются инстантоны в среде с диссипативным окружением, которые описываются уравнением Калдейры–Леггетта [6]

$$M q_{\tau\tau} = \frac{d}{dq} V(q) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau - \tau') (q(\tau) - q(\tau')) d\tau', \quad (3)$$

где интегральное ядро $\alpha(\tau - \tau')$ определяется характером динамического отклика среды. Если $q(\tau)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то после интегрирования по частям уравнение (3) сводится к уравнению (1). Уравнение (3) использовалось для описания макроскопического квантового туннелирования электронов в точечном сверхпроводящем контакте. В этом случае роль массы играет нормированная емкость контакта $M = C(\hbar/2e)^2$, а τ – мнимое время. При смещении контакта внешним током I , близким к критическому I_c , потенциальная функция имеет следующую зависимость:

$$V(q) = \frac{27}{4} V_0 \left[\left(\frac{q}{q_0} \right)^2 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^3 \right],$$

где $V_0 = 2I_c \hbar/32e$, $q_0 = (1 - (I/I_c)^2)^{1/3}$. Ядро оператора $\alpha(\tau - \tau')$ зависит от частотной характеристики диссипативного окружения $J(\omega)$, т.е.

$$\alpha(\tau - \tau') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J(\omega) e^{-\omega|\tau - \tau'|} d\omega.$$

В случае “омического” окружения, когда $J(\omega) = \eta\omega$, ядро имеет вид

$$\alpha(\tau - \tau') = \frac{\eta}{2\pi(\tau - \tau')}.$$

При этом в сверхпроводящем контакте с шунтирующей проводимостью σ диссипативный параметр равен $\eta = \sigma(\hbar/2e)^2$. В нормированных переменных уравнение (3) в этом случае имеет вид

$$u_{xx} = u - \frac{3}{2}u^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{x'}}{x - x'} dx', \quad (4)$$

где $u = q/q_0$, $x = \tau(27V_0/2Mq_0^2)^{1/2}$, $\lambda = (\eta q_0/4\pi)(2/27V_0M)^{1/2}$.

В последнее время аналогичные уравнения используются при анализе туннелирования намагниченности в малых ферромагнитных частицах [8–10]. В случае двухосной анизотропии магнитной частицы, помещенной в магнитное поле H , параллельное легкой оси (ЛО) ($H \parallel \text{ЛО}$) и близкое по величине к критическому значению $H_c = 2K_1/M_0$, где M_0 – намагниченность и K_1 – энергия магнитокристаллической одноосной анизотропии, роль массы в уравнении (1) играет величина $M = M_0^2/2\gamma^2 K_2$, где γ – магнито-механическое отношение, K_2 – энергия базисной анизотропии. При этом динамической переменной является полярный угол вектора намагниченности $q = \theta$, а потенциальная энергия определяется формулой

$$V(q) = 4V_0 \left[\left(\frac{q}{q_0} \right)^2 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^4 \right],$$

где $V_0 = K_1(1 - H/H_c)^2$, $q_0 = 2(1 - H/H_c)^{1/2}$. В случае $H \perp \text{ЛО}$ имеем соответственно

$$V(q) = V_0 \left[1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \right]^2,$$

где $M = M_0^2/2\gamma^2 K_1$, $q_0 = (2(1 - H/H_c))^{1/2}$. Что касается ядра интегрального уравнения (1) для подобного случая, то в [9] рассмотрено фоновое диссипативное окружение, для которого $J(\omega) = A(\omega/\omega_c)^3 \exp(-\omega/\omega_c)$, где A определяется упругими и магнитоупругими модулями среды, а частота отсечки равна $\omega_c = s/r$, где s – скорость звука, r – радиус частицы. Следует заметить, что диссипация в магнитной среде не всегда определяется только спин-фононным процессом релаксации, и поэтому естественно рассмотреть также случай “омического” окружения, когда частотный отклик магнитной среды носит линейный характер $J(\omega) = \eta\omega$. Подобный характер малых колебаний намагниченности описывается уравнениями магнитодинамики в форме Гильберта [11]. При этом коэффициент релаксации η легко связать с параметром затухания Гильберта α в уравнениях динамики намагниченности при малой амплитуде угловой переменной. Действительно, диссипативная функция для ферромагнетика имеет вид [11] $R = (\alpha M_0/2\gamma)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$, где θ , φ – полярный и азимутальный углы, характеризующие направление вектора намагниченности. Поэтому в ситуации, когда $\theta \ll 1$, $\varphi \ll 1$, приближенно имеем $R = (\alpha M_0/2\gamma)\dot{\theta}^2$, следовательно, $\eta = \alpha M_0/\gamma$. В последнем случае уравнение магнитных инстантонов в нормированных переменных согласно модели Калдейры–Леггетта [6, 10] принимает вид

$$u_{xx} = \frac{d}{du}V(u) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) - u(x')}{(x - x')^2} dx', \quad (5)$$

где $\lambda = (\eta q_0 / 4\pi)(V_0 M)^{-1/2}$. При этом $V(u) = u^2 - u^4$ в том случае, если макроскопическое квантовое туннелирование описывается в области магнитного гистерезиса вблизи критического значения поля, либо $V(u) = (1 - u^2)^2$, если рассматривается явление макроскопической квантовой когерентности состояний с $u = \pm 1$ в перпендикулярном магнитном поле $H \perp \text{ЛО}$.

Приведенные примеры показывают, что уравнения типа (1) описывают достаточно широкий круг физических явлений. Решение этих уравнений обычно строится приближенно. Точные решения получены только для некоторых частных случаев. В настоящей работе методом качественного и численного анализов находятся локализованные решения уравнений вида (5) для рассмотренных выше потенциалов $V(q)$. При этом мы не ограничились областью положительных значений параметра λ , а для общности рассмотрели также область отрицательных значений, в которой возникают локализованные решения. Физическая ситуация, соответствующая подобному случаю, возникает, например, при рассмотрении магнитных вихрей в доменной границе магнитного материала с большой одноосной анизотропией [11–13]. Эта система описывается двумя дифференциальными уравнениями Слончевского [11], которые сводятся к интегриродифференциальному уравнению типа (1) с экспоненциальным ядром. В общем случае произвольного ядра уравнение (1) не сводится к конечной системе дифференциальных уравнений. То же касается, например, динамики магнитных солитонов и вихрей в среде с нелокальной магнитостатикой [13]. Поэтому анализ уравнений типа (1) в общем случае представляет несомненный интерес.

2. УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотренные во введении уравнения можно записать в следующем виде:

$$u_{xx} + g(u) = \lambda K[u], \quad K[u] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) - u(x')}{(x - x')^2} dx', \quad (6)$$

где $g(u)$ – заданная нелинейная функция, λ – безразмерный параметр, характеризующий степень воздействия нелокальности в системе, x – безразмерная текущая координата, которая может выполнять роль как пространственной, так и временной переменной в зависимости от рассматриваемой физической ситуации.

Рассмотрим уравнение с квадратичной нелинейностью, в котором $g(u) = -u + u^2$, т.е.

$$u_{xx} - u + u^2 = \lambda K[u]. \quad (7)$$

Для некоторых значений параметра λ удастся получить локализованные решения уравнения (7) в аналитическом виде. Если $\lambda = 0$, то уравнение (7) не содержит нелокального члена и локализованное (солитонное) решение находится элементарно:

$$u(x) = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(x/2)}. \quad (8)$$

В случае $\lambda \neq 0$ прямой подстановкой можно показать, что имеется солитонное решение следующего вида:

$$u(x) = \frac{A}{a^2 + x^2} + \frac{B}{(a^2 + x^2)^2}, \quad (9)$$

где коэффициенты A , B , a , λ находятся из условия обращения (7) в тождество. В результате получаем

$$\begin{aligned} A &= 12(\xi - 1), & B &= 120 \frac{\xi^2}{\xi - 1}, & a &= \sqrt{B/24}, \\ \lambda &= \frac{aA}{A + 12}, & \xi &= \sqrt[3]{(3 + \sqrt{5})/2} + \sqrt[3]{(3 - \sqrt{5})/2}. \end{aligned}$$

Приближенные значения этих параметров таковы: $A = 13.3$, $B = 481$, $a = 4.48$, $\lambda = 2.35$.

При больших значениях параметра λ решение уравнения (7) можно представить в виде разложения по малому параметру $1/\lambda$:

$$u(x) = u_0(x/\lambda) + \frac{1}{\lambda} u_1(x/\lambda) + \dots,$$

где $u_0(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$-u_0(\xi) + u_0^2(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi) - u_0(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi', \quad (10)$$

в котором переменная $\xi = x/\lambda$. Аналогично решению (9) можно показать, что

$$u_0(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

Поэтому при больших значениях λ получаем следующее решение уравнения (7):

$$u(x) = \frac{2}{1 + (x/\lambda)^2} + O(1/\lambda). \quad (11)$$

Найденные частные решения были использованы для контроля численных решений.

Рассмотрим теперь случай произвольного λ . Будем искать численно локализованные четные решения $u(-x) = u(x)$ уравнения (7) с асимптотикой $u(x) \sim c/x^2$, которая обосновывается ниже. Численный расчет проводится на отрезке $x \in [0, L]$ с граничными условиями $u_x(0) = 0$, $u(L) = c/L^2$. Параметр c вычисляется в процессе решения задачи. Разностная схема для уравнения (7) приводит к системе N нелинейных алгебраических уравнений для N неизвестных величин $u_i = u(x_i)$ в N узловых точках $x_i = iL/(N - 1)$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Часть интеграла $K[u]$, находящаяся вне интервала $[0, L]$, вычисляется аналитически с использованием асимптотического выражения $u(x) = c/x^2$, $x \geq L$. особенность в интеграле (7) устраняется с точностью до $O(\Delta x^2)$, где $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, т.е. с такой же точностью, с которой вычисляется вторая производная u_{xx} . Величина отрезка L и число точек N в разностной схеме определяются точностью расчета и для разных значений параметра λ могут быть разными. Система полученных нелинейных разностных уравнений решается с использованием двух итерационных методов. В разных областях изменения параметра λ используется тот или иной метод или же их комбинация. Первый метод применялся авторами в работе [13]. Идея

этого метода основывается на том, что для локализованного решения уравнения (7) значение $u(0)$ зависит от параметра λ и поэтому, если фиксировать значение $u(0)$, задача сводится к отысканию параметра λ . На первом этапе нелинейная система уравнений заменяется линейной однородной системой. Для уравнений с квадратичной нелинейностью эта замена имеет вид $u_i^2 \rightarrow \tilde{u}_i u_i$, где $\tilde{u}_i$ – значения искомых величин u_i на предыдущей итерации. Далее решается задача на отыскание собственного значения λ и собственного вектора $\{u_i\}$, который нормируется условием $u_0 = u(0)$. После этого производится замена $u_i \rightarrow \tilde{u}_i$ и выполняется следующая итерация. Во втором методе параметр λ фиксирован и для решения системы нелинейных уравнений применяется классическая итерационная процедура в сочетании с линеаризацией Ньютона [14].

Как упоминалось выше, для численного решения уравнения (7) используется асимптотика $u(x) \sim c/x^2$, $x \rightarrow \pm\infty$. Покажем справедливость этой асимптотики и найдем зависимость коэффициента c от параметра λ . Выделим явно линейную часть функции $g(u)$ в исходном уравнении (6), представив ее в виде $g(u) = -u + f(u)$, поскольку именно линейная часть определяет поведение решения при $x \rightarrow \pm\infty$. Применим преобразование Фурье к нелинейному уравнению (7). Полагая

$$U(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx,$$

после несложных преобразований получаем

$$U(k) = \frac{F(k)}{k^2 + 1 + \lambda|k|}, \quad (12)$$

где

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ikx} dx.$$

Если симметрия уравнения допускает четные решения уравнения (6) $u(-x) = u(x)$, то для фурье-образа $F(k)$ таких решений выполняются соотношения

$$F^*(k) = F(-k), \quad F(-k) = F(k). \quad (13)$$

Если же нелинейная функция $f(u)$ допускает существование нечетных решений уравнения (6) $u(-x) = -u(x)$, то для них имеют место следующие соотношения:

$$F^*(k) = F(-k), \quad F(-k) = -F(k). \quad (14)$$

Совершая обратное преобразование Фурье для четных решений с учетом (13) получаем

$$u(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{F(k) \cos kx}{k^2 + 1 + \lambda k} dk, \quad (15)$$

а для нечетных решений уравнения (6) с учетом (14) имеем

$$u(x) = 2i \int_0^{\infty} \frac{F(k) \sin kx}{k^2 + 1 + \lambda k} dk. \quad (16)$$

Для нахождения поведения интегралов (15), (16) при $x \rightarrow \pm\infty$ используем метод стационарной фазы Кельвина [15], называемый также методом критических точек. Разлагаем вспомогательный интеграл $J(x)$ в ряд по малой величине $1/x$ с помощью интегрирования по частям:

$$J(x) = \int_0^\infty V(k) e^{ikx} dk = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1} V^{(n)}(+0), \quad (17)$$

где $V^{(n)}(+0)$ — n -я производная от функции $V(k)$. Выделяя из интеграла (17) действительную и мнимую части, получаем разложение для четного решения (15) в виде

$$u(x) = -\frac{2}{x^2} (F'(+0) - \lambda F(+0)) + O(x^{-4}) \quad (18)$$

и для нечетного решения (16) в виде

$$u(x) = \frac{2i}{x} F(+0) - \frac{2i}{x^3} (F''(+0) + 2\lambda F'(+0) - 2(1 + \lambda^2) F(+0)) + O(x^{-5}). \quad (19)$$

Если нелинейная функция $f(u)$ может быть разложена в степенной ряд $f = a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots$, то, используя свойства свертки для фурье-образа произведения двух функций, мы легко покажем, что функция $F(k)$ и ее младшие производные $F'(k)$, $F''(k)$ непрерывны в точке $k = 0$, хотя фурье-образ $U(k)$ функции $u(x)$ в точке $k = 0$ может иметь разрывы или изломы, характерные для функций $u(x)$ со степенной асимптотикой. Учитывая теперь свойства симметрии (13), (14), получаем окончательно асимптотическое разложение четного решения

$$u(x) = 2\lambda F(0) \frac{1}{x^2} + O(x^{-4}) \quad (20)$$

и нечетного решения

$$u(x) = -4i\lambda F'(0) \frac{1}{x^3} + O(x^{-5}). \quad (21)$$

Таким образом, асимптотика $u(x) \sim c/x^2$, $x \rightarrow \pm\infty$, используемая для получения четных решений уравнения (7), находит свое подтверждение в приведенном анализе. Более того, т.к. для функции $f(u) = u^2$ фурье-образ $F(0) > 0$, то знак коэффициента c в асимптотике определяется знаком параметра λ . Асимптотика (20) согласуется с аналитическим решением (9), а также подтверждается в процессе численного расчета.

Численное решение уравнения (7) с асимптотикой (20) при произвольных положительных значениях параметра λ показало, что решение $u(x)$ имеет колоколообразный вид, как показано это на рис. 1. С увеличением λ значение амплитуды $u(0)$ возрастает и стремится к пределу $u(0) = 2$, как это видно из формулы (11), а ширина колокола стремится к бесконечности.

В случае отрицательных значений λ характер поведения локализованных решений уравнения (7) меняется. Возникает колебательная структура, причем число колебаний функции $u(x)$ растет с уменьшением λ , и при $\lambda \rightarrow -2$ число колебаний стремится к бесконечности. По сути дела, в этом пределе решение превращается в косинусоиду $u(x) = A \cos x$ с амплитудой A , стремящейся к нулю, как это видно из рис. 2. На такое поведение решения при $\lambda \rightarrow -2$ указывает также структура фурье-преобразования (12). Как

Рис. 1. Четные решения уравнения (7) для положительных значений координаты x при $\lambda > 0$: кривая 1 – $\lambda = 0$, кривая 2 – $\lambda = 1$, кривая 3 – $\lambda = 2$, кривая 4 – $\lambda = 3$.

видно из этой формулы, при $-2 < \lambda < 0$ фурье-образ $U(k)$ искомого решения $u(x)$ имеет простые полюсы в точках комплексной плоскости

$$k_{1,2}^+ = \frac{1}{2}(\lambda \pm i\Delta), \quad k_{1,2}^- = \frac{1}{2}(-\lambda \pm i\Delta), \quad \Delta = \sqrt{4 - \lambda^2}. \quad (22)$$

Вклад в решение $u(x)$ от этих полюсов определяет колебательный предасимптотический член согласно формуле

$$u(x) = A(\lambda) \cos\left(\frac{\lambda x}{2} + \alpha(\lambda)\right) e^{-\frac{\Delta x}{2}} + u_p(x), \quad (23)$$

в которой коэффициенты $A(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow -2$. В этой формуле через $u_p(x)$ обозначена часть решения, имеющая правильную степенную асимптотику $u_p(x) \sim c/x^2$. Численный расчет показывает, что в рассматриваемом пределе $\lambda \rightarrow -2$ член $u_p(x)$ в выражении (23) при заданном x стремится к нулю быстрее, чем колебательный член.

Проведенное выше рассмотрение относилось к области изменения параметра $-2 < \lambda < \infty$. Если $\lambda \leq -2$, то фурье-образ $U(k)$ имеет полюсы на действительной оси k . Любой способ обхода этих полюсов приводит к появлению в решении $u(x)$ незатухающих колебательных членов. Таким образом, предположение о существовании локализованных решений уравнения (7) для значений параметра $\lambda \leq -2$ приводит к противоречию. Поиск локализованных решений в интервале $\lambda \leq -2$ численным методом также не увенчался успехом. Для систематизации четных локализованных решений уравнения (7)

Рис. 2. Четные решения уравнения (7) для положительных значений координаты x при $\lambda < 0$: кривая 1 – $\lambda = -1.68$, кривая 2 – $\lambda = -1.8$, кривая 3 – $\lambda = -1.94$, кривая 4 – $\lambda = -1.985$.

удобно в области существования таких решений изобразить зависимости их начальной амплитуды $u(0)$ от параметра λ , как показано на рис. 3, там же представлены еще две ветви локализованных решений уравнения (7), для которых амплитуда $u(0) < 0$. Эти ветви существуют в интервале значений параметра $-2 < \lambda \leq -1.5$, а в точке $\lambda = -1.5$ они сливаются. На рис. 4 показаны решения уравнения (7), относящиеся к ветвям II и III для $\lambda = -1.75$.

3. НЕЛОКАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОН

Рассмотрим уравнение (6) с нелинейной частью $g(u) = \sin u$, т.е.

$$u_{xx} + \sin u = \lambda K[u], \quad K[u] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u'(x')}{x - x'} dx', \quad (24)$$

где $u(x)$ – нечетная функция с граничными условиями типа волны переброса (“кинк”), когда $u(x) \rightarrow \pm\pi$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Для нахождения асимптотики искомого решения применим преобразование Фурье. Однако интеграл Фурье для функции $u(x)$ расходится из-за выбранных граничных условий. Чтобы обойти эту трудность, введем вспомогательную функцию $w(x)$ с нулевыми граничными условиями:

$$w(x) = u(x) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad (25)$$

Рис. 3. Зависимость амплитуды $u(0)$ решения уравнения (7) от параметра λ для трех его ветвей I, II, III.

где a – произвольный параметр. Нелинейная часть уравнения (24) в этом случае принимает вид

$$\sin u = \frac{2xa}{a^2 + x^2} \cos w + \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} \sin w. \quad (26)$$

Следуя методу, изложенному в предыдущем разделе, выделим из нелинейного члена (26) линейную часть w следующим образом:

$$\sin u = -w + \frac{2xa}{a^2 + x^2} + f(w), \quad (27)$$

где $f(w)$ содержит члены, убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$ быстрее линейного члена w , а именно

$$f(w) = \frac{2a^2}{a^2 + x^2} w - \frac{xa}{a^2 + x^2} w^2 + \dots. \quad (28)$$

Далее переписываем уравнение (24) для новой функции w и совершаем преобразование Фурье. В результате получаем

$$W(k) = \frac{F(k) + i(k - a \operatorname{sign}(k) + \lambda \operatorname{sign}(k)) e^{-|ak|}}{k^2 + 1 + \lambda|k|}, \quad (29)$$

где $W(k)$, $F(k)$ – фурье-образы функций $w(x)$, $f(w)$. Применяя метод стационарной фазы (17) и учитывая, что $F(+0) = 0$, получаем асимптотику для функции w

$$w(x) = \frac{2i}{x} W(+0) + O(x^{-3}) = \frac{2}{x} (a - \lambda) + O(x^{-3}). \quad (30)$$

Рис. 4. Решения уравнения (7) для ветвей II и III при значении параметра $\lambda = -1.75$.

Используя асимптотическое разложение функции $\arctg(x/a) = \pi/2 - a/x + O(1/x^3)$ и учитывая связь (25), находим искомую асимптотику для функции $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$:

$$u(x) = \pi - \frac{2\lambda}{x} + O(x^{-3}). \quad (31)$$

Заметим, что произвольный параметр a выпадает из окончательного выражения. Вместо $\arctg(x/a)$ можно было выбрать любую другую функцию с такими же граничными условиями.

Если параметр λ равен 0, то уравнение (24) не содержит нелокального члена и превращается в уравнение синус-Гордона, которое имеет хорошо известное солитонное решение

$$u(x) = 4 \arctg(e^x) - \pi. \quad (32)$$

При больших значениях параметра λ решение уравнения (24) можно представить в виде разложения по малому параметру $1/\lambda$:

$$u(x) = u_0(x/\lambda) + \frac{1}{\lambda} u_1(1/\lambda) + \dots,$$

где $u_0(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\sin u_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi) - u_0(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi', \quad (33)$$

Рис. 5. Первая ветвь нечетного решения уравнения (24) при $x > 0$ для различных значений параметра λ : кривая 1 – $\lambda = -1$, кривая 2 – $\lambda = -0.8$, кривая 3 – $\lambda = -0.4$, кривая 4 – $\lambda = 0$, кривая 5 – $\lambda = 0.8$, кривая 6 – $\lambda = 1.6$.

в котором введена переменная $\xi = x/\lambda$. Это уравнение имеет известное решение с нужными граничными условиями

$$u_0(\xi) = 2 \operatorname{arctg} \xi.$$

Таким образом, в первом приближении для $\lambda \gg 1$ имеем решение

$$u(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\lambda}. \quad (34)$$

Для произвольных значений параметра λ решение уравнения (24) с асимптотикой (28) находилось численно с использованием методов, изложенных в предыдущем разделе. При изменении λ от 0 до ∞ решение уравнения (24) деформируется непрерывным образом от чистого кинка (29) к решению (31). Для отрицательных значений параметра $\lambda < 0$ в соответствии с асимптотикой (28) решение имеет всплеск над уровнем $u(x) = \pi$. На рис. 5 показана эволюция решения $u(x)$ с изменением параметра λ в интервале $-1 \leq \lambda < \infty$. При уменьшении λ от нуля до значения -1 всплеск растет, так что максимальное значение $u_{\max}$ приближается к уровню $u(x) = 3\pi/2$. При дальнейшем уменьшении параметра λ происходит срыв с этого типа решения, и мы попадаем на другую ветвь решений уравнения (24). На рис. 6 показаны решения для еще одной такой ветви. Имеются и другие ветви нечетных локализованных решений с большим числом колебаний в области локализации. Аналогично уравнению (7) здесь тоже не удалось найти локализованных решений уравнения (24) для значений параметра $\lambda \leq -2$, поэтому можно

Рис. 6. Вторая ветвь нечетного решения уравнения (24) при $x > 0$ для различных значений параметра λ : кривая 1 – $\lambda = -1.16$, кривая 2 – $\lambda = -1.04$, кривая 3 – $\lambda = -0.86$, кривая 4 – $\lambda = -0.5$, кривая 5 – $\lambda = -0.34$, кривая 6 – $\lambda = -0.2$.

высказать предположение об отсутствии локализованных решений нелокальных уравнений (7), (24) с заданным интегральным ядром в этой области изменения параметра λ .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, анализ нелинейных уравнений типа уравнения нелинейного маятника в вязкой среде с нелокальным взаимодействием показал, что его локализованные решения различаются как асимптотикой вблизи положений равновесия на бесконечности, так и характером немонотонности в области локализации в зависимости от симметрии решения, знака и величины параметра λ , характеризующего нелокальное взаимодействие. Четные решения уравнения с квадратичной нелинейностью имеют три ветви солитонов. Амплитуда солитонов первого типа монотонно уменьшается до нуля от центра к периферии в области положительных значений параметра λ . Асимптотика этого решения имеет вид $u \sim 1/\tau^2$, что согласуется с известными результатами работы [6]. При отрицательных значениях λ появляются немонотонные осцилляции в области локализации, а амплитуда в центре солитона падает до нуля при приближении к критической величине параметра нелокальности $\lambda = -2$. В области $-2 < \lambda \leq -1.5$ найдены еще две ветви четных локализованных решений, различающихся знаком кривизны в центре солитона и имеющих отрицательные амплитуды. Устойчивость этих решений нами не рассматривалась.

Нечетные решения уравнения типа синус-Гордон с интегральным ядром $G = \lambda/(\tau - \tau')$ имеют асимптотику $|u - u_{\pm\infty}| \sim 1/\tau$ вблизи равновесия на бесконечности. Здесь также имеется несколько различающихся типов солитонных решений в зависимости от знака и величины параметра нелокальности λ . В положительной области изменения этого параметра существуют монотонные локализованные решения типа волны переброса. При $\lambda < 0$ в этих решениях возникает немонотонность в виде перегиба на крыльях солитона. Последний тип солитонов близок к решениям, описывающим динамику блоховских линий в доменной границе [10], а также магнитных солитонов одноосного ферромагнетика вблизи поля насыщения в перпендикулярном направлении [11].

Предложенный метод анализа нелинейных уравнений с нелокальным ядром типа $G = \lambda/(\tau - \tau')$ может быть легко обобщен на случай ядра $G = \lambda/(\tau - \tau')^n$, где $n = 2, 3, 4$, и на другие ядра более общего вида, которые могут применяться для описания динамики солитонов в диссипативной среде.

Авторы благодарят проф. В. М. Елеонского за полезные обсуждения.

Работа поддержана Международным научным фондом (ISF) (грант J8P100) и фондом РФФИ (грант 95-02-03737-а, грант 97-01-00528).

Список литературы

- [1] Yu. M. Aliev, V. P. Silin, S. A. Urupin. Superconductivity. 1992. V. 5. P. 230.
- [2] A. Gurevich. Phys. Rev. B. 1992. V. 46. P. 230.
- [3] G. L. Alfimov, A. F. Popkov. Phys. Rev. B. 1995. V. 52. P. 4503.
- [4] Yu. M. Ivanchenko, T. K. Soboleva. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 65.
- [5] R. G. Mints, I. B. Shapiro. Phys. Rev. B. 1995. V. 51. P. 3054.
- [6] A. O. Caldeira, A. J. Leggett. Ann. Phys. (NY). 1984. V. 149. P. 374.
- [7] A. O. Caldeira, A. J. Leggett. Physica. A. 1983. V. 121. P. 587.
- [8] A. Garg. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. № 10. P. 1541.
- [9] A. Garg, G. H. Kim. Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 712.
- [10] C. E. Stamp. Physica. B. 1994. V. 197. P. 133.
- [11] A. P. Malozemoff, J. C. Slonczewskii. Magnetic Domain Walls in Bubble Materials. New York: Acad. Press, 1979.
- [12] Н. Е. Кулагин, А. Ф. Попков. Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. № 4. С. 197.
- [13] В. Е. Иванов, Н. Е. Кулагин, К. А. Сафаруан. Physica. B. 1994. V. 202. P. 193.
- [14] Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Ю. В. Кузьменко. ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 1. С. 107.
- [15] Ф. Олвер. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 10.IX.1997 г.