Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Г. Н. Макракис, В. Е. Назайкинский,
Т. Я. Тудоровский, Новые формулы для канонического
оператора Маслова в окрестности фокальных точек и
каустики в двумерных квазиклассических асимптотиках,
ТМФ, 2013, том 177, номер 3, 355–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:55:32

© 2013 г. С. Ю. Доброхотов^{*†}, Г. Н. Макракис^{‡§},
В. Е. Назайкинский^{*†}, Т. Я. Тудоровский[¶]

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА В ОКРЕСТНОСТИ ФОКАЛЬНЫХ ТОЧЕК И КАУСТИК В ДВУМЕРНЫХ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ АСИМПТОТИКАХ

Предлагается новое представление канонического оператора Маслова в окрестности каустик с использованием специального класса систем координат (эй-конал-координаты) на лагранжевых многообразиях. Результаты изложены для двумерного случая и проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: квазиклассические асимптотики, фокальные точки, каустики, интегральное представление, функция Бесселя, уравнение Шредингера, волновые пучки.

DOI: 10.4213/tmf8462

1. ВВЕДЕНИЕ

Канонический оператор Маслова [1] (см. также [2]–[6]) применяется для построения коротковолновых (высокочастотных или быстроосциллирующих) асимптотических решений широкого класса дифференциальных уравнений с вещественными характеристиками. Асимптотики в виде канонического оператора представляют собой далеко идущее обобщение лучевых разложений в задачах оптики, электродинамики и т. д. и ВКБ-асимптотик в уравнениях квантовой механики. Эти асимптотики основаны на некоторых решениях уравнений классической (гамильтоновой) механики

---

^{*}Институт проблем механики РАН, Москва, Россия.
E-mail: dobr@ipmnet.ru, nazay@ipmnet.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete, Crete, Greece.
E-mail: makrag@iacm.forth.gr

[§]Institute of Applied and Computational Mathematics, Foundation for Research and Technology-Hellas, Heraklion, Crete, Greece

[¶]Radboud University Nijmegen, Institute for Molecules and Materials, Nijmegen, The Netherlands. E-mail: t.tudorovskiy@science.ru.nl

и в каком-то смысле автоматически и глобально позволяют написать решения уравнений квантовой и волновой механики с учетом наличия в задаче фокальных точек и каустик. В задачах оптики осцилляции обычно характеризуются большим положительным параметром k , в задачах квантовой механики – малым положительным параметром $\hbar$, и асимптотики строятся при $k \rightarrow +\infty$ или $\hbar \rightarrow +0$; в настоящей работе мы будем использовать параметр $\hbar$. В основе конструкции канонического оператора Маслова лежит фундаментальный геометрический объект – лагранжево многообразие. Если исходное дифференциальное уравнение рассматривается в n -мерном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}_x^n$ с координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$, то лагранжево многообразие, которое мы обозначим через Λ^n , – это гладкое n -мерное многообразие, лежащее в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^{2n}$ с координатами (p, x) , $p = (p_1, \dots, p_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. В одномерном случае, когда лагранжевы многообразия Λ^1 суть кривые на фазовой плоскости (p, x) , в принципе при построении асимптотических решений (с помощью метода ВКБ) без них можно обойтись, однако даже в этом случае их использование представляется весьма полезным. Если обозначить через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ координаты на многообразии Λ^n , то можно задать Λ^n с помощью равенств $\Lambda = \{p = P(\alpha), x = X(\alpha)\}$. Как правило, в физических задачах координаты α принадлежат произведению k -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ и $(n - k)$ -мерного тора $\mathbb{T}^{n-k}$ или $(n - k)$ -мерной сферы $\mathbb{S}^{n-k}$. При построении решения на многообразии Λ^n следует задать амплитуду $A = A(\alpha)$, а также меру (элемент объема) $d\mu$ и некоторую фиксированную точку α_0 на многообразии Λ^n (так называемую центральную точку¹⁾).

Канонический оператор Маслова $K_{\Lambda^n}^h$ устанавливает соответствие между функциями A на Λ^n и функциями $u(x, h)$, зависящими от $x \in \mathbb{R}_x^n$; мы обозначим это соответствие

$$u(x, h) = [K_{\Lambda^n}^h A](x). \quad (1)$$

Важную роль в определении и свойствах канонического оператора играют *лагранжевы особенности* Σ , которые определяются как множество, на котором обращается в нуль якобиан $\mathcal{J} = \det(\partial X / \partial \alpha)$ проецирования многообразия Λ^n на конфигурационное пространство $\mathbb{R}^n$. Точки множества Σ называются *фокальными*, а его проекция на конфигурационное пространство $\mathbb{R}^n$ задает *каустики* функции $u(x, h)$ (*волнового поля*). Определение функции $u(x, h)$ использует некоторые дополнительные объекты и не единственно, но эта неединственность приводит только к малым изменениям функции $u(x, h)$ при $\hbar \rightarrow 0$, которые, как правило, не слишком существенны с точки зрения физических приложений. Наконец отметим, что канонический оператор Маслова существует как самостоятельный объект теории функций, хотя, разумеется, его основные приложения связаны с приложениями к уравнениям с частными производными.

Одна из основных идей, лежащих в основе канонического оператора, состоит в переходе от исходного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}_x^n$ к индуцированному более простому уравнению на многообразии Λ^n . Многообразие Λ^n не универсально даже для фиксированного дифференциального уравнения, оно зависит от рассматриваемой для этого уравнения задачи. Также от задачи зависит

¹⁾ Другой выбор центральной точки эквивалентен умножению канонического оператора на постоянный фазовый множитель $e^{i\theta}$.

и решение редуцированного уравнения на Λ^n – амплитуда A . Очень важно, что амплитуда A на Λ^n – гладкая функция, в том числе и в окрестности лагранжевых особенностей, в отличие от амплитуды в обычных лучевых или ВКБ-разложениях. Для многих типов задач (и для разных исходных дифференциальных уравнений) имеются алгоритмы построения соответствующих многообразий и амплитуд. Если Λ^n и A получены, то решение $u(x)$ исходной задачи для соответствующего дифференциального уравнения восстанавливается по формуле (1). Иначе говоря, если многообразие Λ^n и функция A на нем построены, то $[K_{\Lambda^n}^h A](x)$ – это *ответ задачи*, автоматически включающий в себя такие объекты и операции в лучевых разложениях, как поведение в каустических областях, переход через каустики, склейки различных асимптотических представлений и т. д. Таким образом, задача сводится к построению Λ^n и A и упрощению выражения $[K_{\Lambda^n}^h A](x)$ в конкретных ситуациях.

Правую часть равенства (1) можно назвать формулой достаточно условно, это скорее алгоритм или набор вполне определенных правил, позволяющих реализовать соответствие (1) в виде более или менее явных аналитических формул, содержащих либо быстроосциллирующие экспоненты, либо интегралы от таких экспонент. Здесь нужно отметить, что, во-первых, эти формулы, как правило, не являются одинаковыми и универсальными для всех значений переменных x , в разных (зависящих от задачи) областях они имеют разные (асимптотические) представления, и, во-вторых, даже в фиксированных областях эти представления могут определяться не единственным образом, удачный их выбор может существенно упростить (локальный) вид решения и позволить выразить его, например, через хорошо известные специальные или даже элементарные функции. В монографии В. П. Маслова [1] (см. также [2]) предложен универсальный рецепт построения представлений функции²⁾ $[K_{\Lambda^n}^h A](x)$ в окрестности каустик, основанный на использовании частичного преобразования Фурье (т. е. преобразования Фурье по части переменных) и применимый в самой общей ситуации, однако для достаточно широкого класса интересных задач можно (и более удобно) использовать другие представления, не связанные с выбором частичного преобразования Фурье. Настоящая работа, в которой рассматривается двумерный случай ($n = 2$), и посвящена такому новому для осциллирующих решений интегральному представлению (см. ниже формулу (28)) в случае, когда на соответствующих лагранжевых многообразиях фундаментальная 1-форма $p dx$ нигде не обращается в нуль на Λ^n , и некоторым его применениям. Подчеркнем, что наши рассуждения не затрагивают общей концепции конструкции канонического оператора Маслова и фундаментальных объектов, лежащих в его основе, мы лишь предлагаем более удобную (“рабочую”) форму его реализации, более подходящую при решении конкретных физических задач, в частности удобную в задачах, связанных с асимптотиками решений задачи рассеяния и задачи об асимптотике функции Грина, линейных гиперболических систем с переменными коэффициентами (например, волнового уравнения) с локализованными начальными данными (см., например, [7], [8]) и т. д. Отметим также, что наши формулы являются в каком-то смысле частным случаем общих формул теории интегральных операторов Фурье [9], и нашим главным достижением являются их конкретный (конструктивный) вид и

²⁾Зависящей, в отличие от полной функции $[K_{\Lambda^n}^h A](x)$, от системы координат в $\mathbb{R}_x^n$.

алгоритм их построения, пригодные в том числе для использования при работе с пакетами программ типа *Mathematica* или *MatLab*.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы рассмотрим важный пример, поясняющий идею новой формулы для канонического оператора Маслова и целесообразность ее написания. Эта новая формула (28) и сопутствующие ей объекты приводятся в разделе 3. В разделе 4 рассмотрены примеры. Доказательство основной теоремы и формулы, выражающие канонический оператор Маслова в окрестности каустика через функции Эйри и Пирси, вынесены в приложения А и Б соответственно.

Некоторые обозначения. Все векторы понимаются как вектор-столбцы. Если ξ и η – n -мерные векторы, то $\langle \xi, \eta \rangle$ – их вещественное скалярное произведение: $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j = \xi^T \eta$, где индекс Т означает транспонирование. Частные производные мы снабжаем соответствующим нижним индексом, например $\Phi_x = \partial \Phi / \partial x$.

2. ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Существует не так много типов лагранжевых многообразий, встречающихся в конкретных физических приложениях. Самые простые примеры – лагранжевы поверхности. Пусть $S(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, – гладкая функция, тогда уравнение $p = \partial S / \partial x$ задает поверхность в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^{2n}$, эта поверхность есть лагранжево многообразие, и ему соответствуют функции $u(x, h)$ вида $A(x)e^{iS(x)/h}$ – ВКБ-решения. Для того чтобы такая функция была решением уравнения Гельмгольца $h^2 \Delta u + n^2(x)u = 0$, необходимо, в частности, чтобы функция S удовлетворяла уравнению Гамильтона–Якоби $\nabla S^2 = n^2(x)$.

Приведем теперь основной для этой работы пример двумерного лагранжева многообразия, отвечающего уравнению Гельмгольца с $n^2(x) = 1$. Начнем со следующей достаточно простой задачи: построить быстроосциллирующие функции $u(x, h)$ аргументов $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_x^2$, связанные с двумерным лагранжевым цилиндром

$$\Lambda^2 = \{(x, p) : x = X(\tau, \psi), p = P(\tau, \psi), \tau \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}(\bmod 2\pi)\}, \quad (2)$$

где $X(\tau, \psi) = \tau \mathbf{n}(\psi)$, $P(\tau, \psi) = \mathbf{n}(\psi)$, $\mathbf{n}(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)^T$, в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^4$ с координатами $(x, p) = (x_1, x_2, p_1, p_2)$. Функции $(\alpha_1, \alpha_2) = (\tau, \varphi)$ образуют систему координат на Λ^2 . Это многообразие было использовано в [7], [8] для представления быстроубывающих функций вида $f(x/h)$, $h \ll 1$. Проекция многообразия Λ^2 на конфигурационное пространство (плоскость) $\mathbb{R}_x^2$ представляет собой двулистное накрытие с особенностью при $x = 0$. Легко вычислить якобиан $\mathcal{J} = \det(X_\tau, X_\psi) = \tau$. Его нули – лагранжевы особенности Σ – определяются равенством $\tau = 0$, которое задает окружность на Λ^2 . Проекция этой окружности на $\mathbb{R}_x^2$ – состоящая из единственной точки *вырожденная каустика* $x = 0$, поэтому многообразие Λ^2 не находится в общем положении с точки зрения теории катастроф. Тем не менее многообразия такого типа и их обобщения играют важную роль в физических приложениях.

Напомним, что точки на Λ^2 , в которых $\mathcal{J} \neq 0$, называются *регулярными*, в отличие от *особых* (*фокальных*) точек, где $\mathcal{J} = 0$. Важную роль в асимптотических

формулах играет топологическая характеристика – *индекс Маслова*. В этом примере индекс Маслова определяется следующим образом. Окружность $\tau = 0$ разделяет Λ^2 на две части Ω_+ и Ω_- , состоящие из регулярных точек с $\tau > 0$ и $\tau < 0$ соответственно, с одним и тем же индексом Маслова m_+ для всех точек из Ω_+ и с индексом Маслова m_- для всех точек из Ω_- . Зафиксируем точку на Λ^2 с координатами $\psi_0, \tau_0 = +0$ и зададим индекс Маслова $m(\psi_0, \tau_0) = 0$, тогда $m_+ = 0$, и нетрудно доказать, что $m_- = -1$ (см. пример 1 ниже и, например, [7], [8]).

Выпишем выражения, представляющие быстроосциллирующие функции, задаваемые каноническим оператором Маслова $[K_{\Lambda^2}^h a](x)$, действующим на некоторую гладкую функцию $a(\tau, \psi)$ на Λ^2 . Вне фокальной точки (“каустики”) $x = 0$, мы имеем функцию ВКБ

$$\begin{aligned} u(x, h) &= [K_{\Lambda^2}^h a](x) \equiv \sum_{\pm} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{J}(\tau_{\pm}(x))|}} e^{(i/h)\tau_{\pm}(x)} e^{-i\pi m_{\pm}/2} a(\tau_{\pm}(x), \psi_{\pm}(x)) = \\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{|x|}} \sum_{\pm} e^{\pm(i/h)(|x|+\pi/4)} a(\pm|x|, \psi_{\pm}(x)). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tau_{\pm}(x) = \pm|x|$, функции $\psi_+(x) = \varphi(x)$ и $\psi_-(x) = \varphi(x) + \pi$ – решения уравнения

$$\tau \cos \psi = x_1, \quad \tau \sin \psi = x_2 \quad (4)$$

для положительного (знак $+$) и отрицательного (знак $-$) τ соответственно, и $\varphi(x)$ – полярный угол вектора x . Для того чтобы определить функцию $u(x, h) = [K_{\Lambda^2}^h a](x)$ глобально, включая окрестность “каустики” $x = 0$, нужно покрыть окрестность прообраза $x = 0$ на Λ^2 каноническими картами

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \psi \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right) \right\}, & \Omega_3 &= \left\{ \psi \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right) \right\} & \text{с координатами } (x_1, p_2), \\ \Omega_2 &= \left\{ \psi \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right) \right\}, & \Omega_4 &= \left\{ \psi \in \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right) \right\} & \text{с координатами } (p_1, x_2). \end{aligned}$$

Пусть $1 = \sum_{j=1}^4 e_j(\psi)$ – разбиение единицы на Λ^2 , подчиненное этому покрытию. Тогда с точностью до членов более высокого порядка малости при $h \rightarrow +0$ канонический оператор Маслова $K_{\Lambda^2}^h$ в применении к функции A на Λ^2 дается формулой

$$\begin{aligned} u(x, h) &= [K_{\Lambda^2}^h a](x) \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1,3} \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(i/h)(\tau \cos^2 \psi + x_2 p_2)} a(\tau, \psi) e_j(\psi)}{|\cos \psi|} \Big|_{\substack{\psi=\psi_j(x_1, p_2) \\ \tau=\tau_j(x_1, p_2)}} dp_2 + \\ &+ \sum_{j=2,4} \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(i/h)(\tau \sin^2 \psi + x_1 p_1)} a(\tau, \psi) e_j(\psi)}{|\sin \psi|} \Big|_{\substack{\psi=\psi_j(p_1, x_2) \\ \tau=\tau_j(p_1, x_2)}} dp_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $i^{1/2} = e^{i\pi/4}$, функции τ_j и ψ_j выражают глобальные координаты (τ, ψ) на Λ^2 через координаты в областях Ω_j (т. е. через (x_1, p_2) для $j = 1, 3$ и через (p_1, x_2) для $j = 2, 4$). Подчеркнем, что с точностью до малых поправок функция (5) не зависит от выбора карт Ω_j и разбиения единицы $\{e_j\}$.

Заметим теперь, что формула (5) может быть упрощена весьма существенно, особенно с точки зрения конкретных приложений. Именно, мы можем заменить интегрирование по импульсным переменным p_1 и p_2 интегрированием по “углу” ψ в каждой карте Ω_j , полагая $p_1 = \cos \psi$ или $p_2 = \sin \psi$ в зависимости от того, четно или нечетно j . Это дает

$$u(x, k) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)(x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi)} A(x, \psi) d\psi, \quad (6)$$

где

$$A(x, \psi) = \sum_{j=1,3} a\left(\frac{x_1}{\cos \psi}, \psi\right) e_j(\psi) + \sum_{j=2,4} a\left(\frac{x_2}{\sin \psi}, \psi\right) e_j(\psi). \quad (7)$$

Если функция $a(\tau, \psi)$ не зависит от τ , то $A = a(\psi)$. Более того, если $a = 1$, тогда с точностью то мультипликативной константы функция (6) – это *нулевая функция Бесселя*

$$u(x, k) = J_0\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{h}\right),$$

а функция (3) – главный член ее асимптотического разложения при больших значениях аргумента.

Этот пример показывает, что определение (6), (7), основанное на интегрировании по углу, более конструктивно и прагматично, чем стандартное определение канонического оператора Маслова, основанное на интегрировании по импульсам, в частности оно не требует разбиения на четыре карты в соответствующих формулах. Однако практический недостаток определения (7) функции A – его “неинвариантная” форма по отношению к выбору карт Ω_j и разбиению единицы e_j , хотя, подчеркнем еще раз, окончательный результат инвариантен с точностью до малой поправки. Основная цель настоящей работы и приводимых ниже конструкций – представление канонического оператора Маслова в окрестности лагранжевых особенностей, основанное на интегрировании по “угловым переменным”, аналогичным переменной ψ , и прямо включающее функцию a (амплитуду на лагранжевом многообразии) без разбиения единицы.

Покажем, как в нашем примере можно естественно построить функцию вида (6), не опираясь на стандартное представление (5).

Как и в общем случае, обсуждаемом ниже в разделе 3, мы конкретизируем универсальную конструкцию из теории интегральных операторов Фурье [9], которая (будучи переформулирована для случая асимптотик по малому параметру h) предписывает следующее: чтобы построить быстроосциллирующие функции, соответствующие данному лагранжеву многообразию Λ , нужно найти вещественнозначную невырожденную фазовую функцию $\Phi(x, \theta)$, зависящую от параметров $\theta \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 0$) и задающую многообразие Λ в том смысле, что дифференциалы $d\Phi_{\theta_j}(x, \theta)$, $j = 1, \dots, m$, линейно независимы в точках, где $\Phi_{\theta}(x, \theta) = 0$, и имеет место представление $\Lambda^2 = \{(x, p) : \exists \theta \Phi_{\theta}(x, \theta) = 0, p = \Phi_x(x, \theta)\}$. Тогда искомые быстроосциллирующие функции имеют вид

$$u(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{m/2} \int \dots \int e^{(i/h)\Phi(x, \theta)} A(x, \theta) d\theta_1 \dots d\theta_m \quad (8)$$

с некоторой амплитудой $A(x, \theta)$ – гладкой функцией с компактным по переменной θ носителем. Универсальность этой конструкции состоит, в частности, в том, что справедлива следующая хорошо известная теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi_1(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^{m_1}$, и $\Phi_2(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^{m_2}$, – две невырожденные фазовые функции, задающие одно и то же лагранжево многообразие Λ . Тогда соответствующие быстроосциллирующие интегралы вида (8) задают один и тот же класс быстроосциллирующих функций (и можно явно выписать закон преобразования амплитуд при переходе от одного представления к другому).

В столь общем виде эта теорема не понадобится нам в настоящей работе (доказательство и более подробную формулировку в части преобразования амплитуд см., например, в работе [10] теорему 4 и следствие 1). Частный случай теоремы 1 – приведенную ниже теорему 2 – мы подробно доказываем в приложении А.

Вернемся к нашему примеру. Описанная выше конструкция, вообще говоря, локальна, однако в рассматриваемом случае нетрудно найти фазовую функцию $\Phi(x, \theta)$, глобально задающую многообразие Λ^2 . Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ и $\psi \in \mathbb{S}^1$. На прямой

$$\ell_\psi = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = X(\tau, \psi), \tau \in \mathbb{R}\}$$

возьмем ближайшую к x точку $x_* = X(\tau_*, \psi)$, где $\tau_* = \langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle$ (поскольку отрезок $[x, x_*]$ перпендикулярен ℓ_ψ). Используя ψ в роли переменной θ , положим

$$\Phi(x, \psi) = \tau_* \equiv \langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle. \quad (9)$$

Эта фазовая функция невырожденна, поскольку

$$\Phi_\psi = \langle x, \mathbf{n}'(\psi) \rangle, \quad (\Phi_\psi)_x = \mathbf{n}'(\psi) \equiv (-\sin \psi, \cos \psi) \neq 0.$$

Далее, уравнение $\Phi_\psi = 0$ означает, что x и $\mathbf{n}'(\psi)$ перпендикулярны, иначе говоря, x коллинеарно $\mathbf{n}(\psi)$ и потому лежит на ℓ_ψ , так что $x = X(\tau_*, \psi)$. При этом $\Phi_x(\tau_*, \psi) = \mathbf{n}(\tau_*, \psi) = P(\tau_*, \psi)$, так что точка $(x, \Phi_x(\tau_*, \psi))$ лежит на многообразии Λ^2 . Нетрудно видеть, что любая точка из Λ^2 может быть получена таким способом, так что фазовая функция (9) глобально задает многообразие Λ^2 .

Амплитуда $A(x, \psi)$, разумеется, может быть произвольной гладкой функцией, так что быстроосциллирующие функции, связанные с многообразием Λ^2 , имеют вид

$$u(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} A(x, \psi) d\psi. \quad (10)$$

Заметим, однако, что это представление асимптотически неоднозначно: если заметить гладкую функцию $A(x, \tau)$ на любую другую гладкую функцию $A'(x, \tau)$, такую, что

$$A(x, \psi) = A'(x, \psi) \quad \text{на множестве} \quad C_\Phi = \{(x, \psi) : \Phi_\psi \equiv \langle \mathbf{n}'(\psi), x \rangle = 0\}, \quad (11)$$

то интеграл (10) изменится лишь на поправку порядка $O(h)$.

Действительно, если амплитуда равна нулю в тех точках, где $\Phi_\psi = 0$, то ее можно представить в виде произведения $B(x, \psi)\Phi_\psi(x, \psi)$ и показать, интегрируя по частям в интеграле (10), что $u(x, h) = O(h)$.

Отсюда, например, следует, что в главном члене асимптотики по $h \rightarrow 0$ интеграл (10) не изменится, если заменить $A(x, \psi)$ на $A(x_*, \psi)$. При этом

$$A(x_*, \psi) = A(\tau_* \mathbf{n}(\psi), \psi) = A(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle \mathbf{n}(\psi), \psi) = a(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle, \psi),$$

где $a(\tau, \psi) = A(\tau \mathbf{n}(\psi), \psi)$, так что быстроосциллирующая функция, связанная с Λ^2 , может быть записана в виде (ср. с (6))

$$u(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} a(\langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle, \psi) d\psi. \quad (12)$$

Такое представление, в отличие от (10), уже асимптотически однозначно.

В частности, если мы опустим нормировочный множитель перед интегралом и возьмем в качестве амплитуды константу $a(x, \psi) = (2\pi)^{-1}$, то получим хорошо известное интегральное представление

$$\mathbf{J}_0\left(\frac{|x|}{h}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} d\psi \quad (13)$$

функции Бесселя нулевого порядка как специальный случай нашей конструкции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Иногда удобно выбирать амплитуду в ином виде, чем в (12). Например, используя замену типа (11), можно преобразовать формулу (12) следующим образом: положим $A(x, \psi) = a(|x|, \psi)$, если функция $a(\tau, \psi)$ четна по τ , и $A(x, \psi) = \langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle a(|x|, \psi)/|x|$, если $a(\tau, \psi)$ нечетна по τ , а в общем случае разобьем функцию $a(\tau, \psi)$ на четную и нечетную части и положим

$$A = \frac{a(|x|, \psi) + a(-|x|, \psi)}{2} + \langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle \frac{a(|x|, \psi) - a(-|x|, \psi)}{2|x|}.$$

Тогда (опять опуская нормировочный множитель перед интегралом) с точностью до $O(h)$ получим

$$\begin{aligned} u(x, h) &= \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} \left(\frac{a(|x|, \psi) + a(-|x|, \psi)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle \frac{a(|x|, \psi) - a(-|x|, \psi)}{2|x|} \right) d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} \frac{a(|x|, \psi) + a(-|x|, \psi)}{2} d\psi - \\ &\quad - i \frac{\partial}{\partial k} \left(\int_0^{2\pi} e^{ik\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} \frac{a(|x|, \psi) - a(-|x|, \psi)}{2|x|} d\psi \right) \Big|_{k=1/h}. \end{aligned} \quad (14)$$

В общем случае это представление выглядит более сложно, чем (12), но если, скажем, a вовсе не зависит от угла ψ , $a = a(\tau)$, то оно сразу приводит к значительным упрощениям и мы получаем

$$\begin{aligned} u(x, h) &= \pi(a(|x|) + a(-|x|)) \mathbf{J}_0\left(\frac{|x|}{h}\right) - i\pi(a(|x|) - a(-|x|)) \mathbf{J}'_0\left(\frac{|x|}{h}\right) = \\ &= \pi(a(|x|) + a(-|x|)) \mathbf{J}_0\left(\frac{|x|}{h}\right) + i\pi(a(|x|) - a(-|x|)) \mathbf{J}_1\left(\frac{|x|}{h}\right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{J}_1(y)$ – функция Бесселя первого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При написании формулы (12) мы проигнорировали вопрос об индексе Маслова в особой карте, опустив множитель $e^{-i\pi m_s/2}$ перед интегралом. В действительности можно показать, что в этом примере при выборе неособой начальной точки на многообразии Λ^2 с координатами (τ, ψ) , $\tau > 0$, получается $m_s = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сравним интегралы (12) и (14) в случае, когда $a = \tau^2$.

Формула (12) дает $2\pi|x|^2\mathbf{J}_0(|x|/h)$, а формула (14) –

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle} (\langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle)^2 d\psi &= -2\pi \frac{\partial^2}{\partial(1/h)^2} \mathbf{J}_0\left(\frac{|x|}{h}\right) = -2\pi|x|^2\mathbf{J}_0''\left(\frac{|x|}{h}\right) = \\ &= 2\pi|x|^2\mathbf{J}_0\left(\frac{|x|}{h}\right) - 2\pi|x|h\mathbf{J}_1\left(\frac{|x|}{h}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, эти два представления различаются на $-2\pi|x|h\mathbf{J}_1(|x|/h) = O(h)$.

3. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Перейдем теперь к описанию общих формул и конструкций в двумерном случае. Пусть Λ^2 – лагранжево многообразие в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^4$. Функции, задающие многообразие Λ^2 (т.е. вложение $\Lambda^2 \subset \mathbb{R}_{px}^4$), будем обозначать через $x = X(\alpha)$, $p = P(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – координаты на Λ^2 . Для упрощения записи будем обозначать через α также точки на Λ^2 .

3.1. Эйконал (действие). Поскольку многообразие Λ^2 лагранжево, уравнение Пфаффа

$$d\tau(\alpha) = P(\alpha) dX(\alpha) \equiv P_1(\alpha) dX_1(\alpha) + P_2(\alpha) dX_2(\alpha) \quad (15)$$

локально разрешимо на Λ^2 (более точно, оно разрешимо в произвольной односвязной области $U \subset \Lambda^2$). Вещественное решение $\tau(\alpha)$ уравнения (15) называется *эйконалом* (или *действием*) в U ; если U связно, то эйконал определяется с точностью до аддитивной константы.

3.2. Эйконал-координаты. Здесь и ниже будем предполагать, что Λ^2 удовлетворяет следующему условию.

УСЛОВИЕ 1. Форма $P(\alpha) dX(\alpha)$ не обращается в нуль ни при каком $\alpha \in \Lambda^2$.

Таким образом, если τ – эйконал в окрестности U некоторой точки из Λ^2 , то $d\tau \neq 0$, и, следовательно (предполагая, что U достаточно мало), мы можем дополнить τ другой функцией ψ так, что (τ, ψ) будет системой координат в U . Систему координат такого типа назовем *эйконал-координатами*. Понятно, что эйконал-координаты существуют в окрестности произвольной точки $\alpha \in \Lambda^2$. Функции (X, P) , выраженные через эйконал-координаты, будем записывать в виде $(X(\tau, \psi), P(\tau, \psi))$ (хотя более правильно было бы писать $(X(\alpha(\tau, \psi)), P(\alpha(\tau, \psi)))$ или просто (X, P) , опуская соответствующие аргументы. Такие же обозначения будем использовать для произвольных функций на Λ^2 .

ЛЕММА 1. В эйконал-координатах справедливы соотношения

$$\langle P, X_\tau \rangle = 1, \quad \langle P, X_\psi \rangle = 0, \quad \langle P_\psi, X_\tau \rangle = \langle P_\tau, X_\psi \rangle. \quad (16)$$

3.3. Мера и якобианы. Как уже отмечалось, для того чтобы построить канонический оператор, нужно иметь не только лагранжево многообразие Λ^2 , но и некоторую вещественную меру на этом многообразии. Мы предположим, что мера задается формой объема³⁾ $d\mu$. В эйконал-координатах (τ, ψ) на Λ^2 имеем $d\mu = \mu d\tau \wedge d\psi$, где $\mu \equiv \mu(\tau, \psi)$ – гладкая, не обращающаяся в нуль функция, называемая *плотностью* меры $d\mu$ в координатах (τ, ψ) . Заметим, что во многих физических задачах координата τ есть так называемое *собственное время* и плотность μ равна единице. Введем теперь якобианы

$$\mathcal{J} = \frac{D(X)}{D\mu} = \frac{1}{\mu} \det \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(\tau, \psi)} = \frac{1}{\mu} \det(X_\tau, X_\psi), \quad \tilde{\mathcal{J}} = \mu \det(P, P_\psi), \quad (17)$$

$$\mathcal{J}^\varepsilon = \frac{D(X - i\varepsilon P)}{D\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu} \det \frac{\partial(X_1 - i\varepsilon P_1, X_2 - i\varepsilon P_2)}{\partial(\tau, \psi)}, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \quad (18)$$

В противоположность мере μ якобианы (17), (18) не зависят от специального выбора эйконал-координат и, следовательно, корректно определены глобально на Λ^2 .

ЛЕММА 2. *Справедливы соотношения*

$$|\mathcal{J}| = \frac{\|X_\psi\|}{\|\mu\| \|P\|}, \quad \mathcal{J}^\varepsilon(\alpha) \neq 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Lambda^2 \text{ и } \varepsilon > 0. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1 (ср. [8]). Первое равенство заведомо справедливо, если $X_\psi = 0$. В противном случае достаточно принять во внимание равенство $X_\tau = aX_\psi + bP$, $b = 1/P^2$, вытекающее из (16), а также второе соотношение в (16).

2 (см., например, [4]). Предположим, что матрица $X_\alpha - i\varepsilon P_\alpha$ вырожденна. Тогда существует вектор $\xi \neq 0$ такой, что $X_\alpha \xi = i\varepsilon P_\alpha \xi$. Свойство лагранжевости означает $P_\alpha^T X_\alpha - X_\alpha^T P_\alpha = 0$, где верхний индекс T означает транспонирование. Отсюда следует, что

$$P_\alpha^T X_\alpha \xi - X_\alpha^T P_\alpha \xi = i \left(\varepsilon P_\alpha^T P_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} X_\alpha^T X_\alpha \right) \xi = 0.$$

Матрицы $P_\alpha^T P_\alpha$ и $X_\alpha^T X_\alpha$ не отрицательны, поэтому последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда $P_\alpha \xi = X_\alpha \xi = 0$. Это означает, что ранг (4×2) -матрицы $\begin{pmatrix} P_\alpha \\ X_\alpha \end{pmatrix}$ меньше 2, что противоречит двумерности многообразия Λ^2 .

3.4. Индекс Маслова неособых точек и замкнутых путей. Зафиксируем некоторую регулярную точку $\alpha_0 \in \Lambda^2$, которую назовем *центральной точкой*. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{J}(\alpha_0) > 0$. Далее, пусть $\alpha \in \Lambda$ – произвольная неособая точка. Зафиксируем некоторый путь $\gamma(\alpha_0, \alpha) \in \Lambda^2$, соединяющий α_0 с α , и определим *индекс Маслова* точки α формулой

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Arg } \mathcal{J}^\varepsilon|_{\alpha_0}^\alpha, \quad (20)$$

³⁾Таким образом, мы считаем, что Λ^2 ориентируемо; теория может быть построена и без этого предположения, которое сделано для упрощения изложения.

где приращение аргумента вычисляется вдоль пути $\gamma(\alpha_0, \alpha)$. На практике лучше использовать интегральную формулу

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \int_{\gamma(\alpha_0, \alpha)} \frac{d\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon}. \quad (21)$$

Индекс $m(\alpha)$ – целое число, зависящее от выбора пути $\gamma(\alpha, \alpha_0)$ (и не меняющееся при непрерывной деформации пути). В частности, $m(\alpha_0) = 0$, если в качестве пути, соединяющего точку α_0 с нею же самой, взять путь, гомотопный тривиальному (все время остающемуся в α_0).

Пусть γ – некоторый замкнутый путь на Λ^2 , тогда мы можем определить индекс Маслова $m(\gamma)$ пути γ , положив

$$\operatorname{ind} \gamma = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Arg}_\gamma \mathcal{J}^\varepsilon|_{\alpha_0}^{\alpha_0} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \oint_\gamma \frac{d\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon} = \frac{1}{\pi i} \oint_\gamma \frac{d\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (22)$$

ПРИМЕР 1. Пусть Λ^2 – лагранжево многообразие (2). Зафиксируем центральную точку $\alpha_0 = (\tau = \delta, \psi = 0)$, $\delta \rightarrow +0$ (т.е. $\delta = +0$). Легко найти

$$\mathcal{J}^\varepsilon = \det \begin{pmatrix} \cos \psi & (\tau - i\varepsilon) \sin \psi \\ -\sin \psi & (\tau - i\varepsilon) \cos \psi \end{pmatrix} = \tau - i\varepsilon.$$

Поэтому точки с ненулевой координатой τ неособые. Для индекса $m(\alpha)$ имеем

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{(\delta, 0)}^{(\tau, \psi)} \frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\operatorname{arctg} \frac{\tau}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\varepsilon} \right).$$

Последнее выражение для любых положительных δ равно 0, если $\tau > 0$, и -1 , если $\tau < 0$. Поэтому

$$m(\alpha(\tau, \psi)) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau > 0, \\ -1 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Отметим, кстати, что в этом примере индекс не зависит от выбора пути.

3.5. Регулярные и особые карты. Канонический атлас. Канонический оператор Маслова $K = K_{(\Lambda^2, \mu)}^h$ сопоставляет любой функции⁴⁾ $A \in C_0^\infty(\Lambda^2)$ быстросциллирующую функцию $u(x, h) = [K_{(\Lambda^2, \mu)}^h A](x, h)$. Удобно разбить определение канонического оператора на две части – локальную и глобальную. В локальном определении многообразие Λ^2 покрывается специальными связными односвязными областями, называемыми *каноническими картами*, и канонический оператор определяется отдельно в каждой карте (т.е. на функциях с носителем из соответствующей карты). При переходе к глобальному определению выражения в различных картах сравниваются и собираются вместе с помощью разбиения единицы.

Канонические карты бывают двух типов – *неособые* (регулярные) и *особые*.

⁴⁾Условие, что A – функция с компактным носителем, удобно при общих теоретических исследованиях. Если же проекция лагранжева многообразия на конфигурационное пространство собственная (т.е. прообраз каждого компактного множества компактен), то $C_0^\infty(\Lambda^2)$ можно без особых затруднений заменить на $C^\infty(\Lambda^2)$. Это мы и делаем в наших примерах, в которых носители функций, на которые действует канонический оператор, некомпактны.

3.5.1. *Неособые карты.* Точка $\alpha \in \Lambda^2$ называется *неособой*, если $\mathcal{J}(\alpha) \neq 0$. Соответственно *неособая карта* – это произвольная связная односвязная область $U \subset \Lambda^2$, состоящая из неособых точек. Так как $\mathcal{J}(\alpha) \neq 0$, то существует гладкое решение $\alpha(x) = (\tau(x), \psi(x))$ системы уравнений

$$X(\tau, \psi) = x. \quad (23)$$

Решая эту систему, мы переходим от координат $\alpha = (\tau, \psi)$ на Λ^2 к координатам $x = (x_1, x_2)$ конфигурационного пространства.

3.5.2. *Особые карты.* Согласно определению неособые карты покрывают все многообразие Λ^2 , кроме фокальных (особых) точек, где $\mathcal{J}(\alpha) = 0$. Около фокальных точек нужен другой тип карт. Пусть $\alpha^* \in \Lambda^2$ – фокальная точка. Выберем некоторые эйконал-координаты (τ, ψ) на Λ^2 в окрестности точки α^* , координаты которой обозначим через (τ^*, ψ^*) . Рассмотрим уравнение

$$\langle P(\tau, \psi), x - X(\tau, \psi) \rangle = 0. \quad (24)$$

ЛЕММА 3. Уравнение (24) определяет гладкую функцию

$$\tau = \tau(x, \psi) \quad (25)$$

в окрестности точки $(x^*, \psi^*) \in \mathbb{R}^3$, где $x^* = X(\tau^*, \psi^*)$, такую, что $\tau^* = \tau(x^*, \psi^*)$.

ЛЕММА 4. Существует такая окрестность W точки $(x^*, \psi^*) \in \mathbb{R}^3$, что выполнены следующие условия.

1. Дифференциал $d(\tau_\psi)$ не обращается в нуль ни в одной точке множества

$$\Pi = \{(x, \psi) \in W : \tau_\psi(x, \psi) = 0\}, \quad (26)$$

которое, таким образом, является двумерной поверхностью.

2. Отображение $(x, \psi) \mapsto (x, \tau_x(x, \psi))$ – диффеоморфизм поверхности Π на окрестность $U \subset \Lambda^2$ точки $\alpha^* \in \Lambda^2$.

3. Справедливо неравенство $\det(P, P_\psi)|_{\tau=\tau(x, \psi)} \neq 0$ при $(x, \psi) \in W$.

Область $U \subset \Lambda^2$ вместе с эйконал-координатами (τ, ψ) и функцией (25), заданной на W , называется *особой картой* на Λ^2 . Без потери общности мы будем предполагать, что U и W связны и односвязны.

3.5.3. *Канонический атлас.* Из изложенного выше следует, что многообразие Λ^2 может быть покрыто неособыми и особыми картами. Выберем и зафиксируем локально конечное покрытие $\Lambda^2 = \bigcup_j U_j$ многообразия Λ^2 неособыми и особыми картами. Предположим, что пересечение двух любых карт U_j связно и односвязно (разумеется, оно может быть и пустым). Такое покрытие называется *каноническим атласом*; далее мы рассматриваем только карты U_j из канонического атласа и называем их *каноническими картами*. Без потери общности будем считать, что в каждой карте заданы эйконал-координаты⁵⁾.

⁵⁾Во многих физических задачах эйконал-координаты можно ввести глобально на всем многообразии Λ^2 , см. примеры ниже и выше.

3.6. Канонический оператор в неособых картах. Определение канонического оператора в этом случае совпадает со стандартным. Пусть $U_j \subset \Lambda^2$ – неособая карта. Тогда из теоремы о неявной функции немедленно следует, что U_j диффеоморфно проецируется на некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}_x^2$, переменные $x = (x_1, x_2)$ могут быть использованы как локальные координаты в U_j , а $\alpha = \alpha(x)$ можно определить как решение уравнений (23).

Выберем эйконал τ в карте U_j и дополнительную координату ψ . Определим индекс Маслова m_j в карте U_j , положив $m_j = m(\alpha_j)$ для некоторой точки $\alpha_j \in U_j$. Теперь построим канонический оператор K_j на функциях $A_j(\alpha) = A_j(\tau, \psi) \in C_0^\infty(U_j)$ в неособых картах по формуле

$$\begin{aligned} [K_j A_j](x, k) &= \exp\left(\frac{i}{h}\tau(x) - i\frac{\pi m_j}{2}\right) \frac{A_j(\alpha)}{\sqrt{|\mathcal{J}(\alpha)|}} \Big|_{\alpha=\alpha(x)} \equiv \\ &\equiv \exp\left(\frac{i}{h}\tau(x) - i\frac{\pi m_j}{2}\right) A_j(\tau(x)) \sqrt{\frac{\mu(\tau, \psi)|P(\tau, \psi)|}{|X_\psi(\tau, \psi)|}} \Big|_{\substack{\tau=\tau(x) \\ \psi=\psi(x)}}. \end{aligned} \quad (27)$$

3.7. Канонический оператор в особой карте. Пусть теперь $U_j \subset \Lambda^2$ – особая карта с эйконал-координатами (τ, ψ) . Рассмотрим якобианы $\mathcal{J}(\tau, \psi)$ и $\tilde{\mathcal{J}}(\tau, \psi) = \det(P(\tau, \psi), P_\psi(\tau, \psi))$ в некоторой неособой точке $\alpha_j = (\tau^j, \psi^j) \in U_j$. Второе выражение не обращается в нуль нигде в U_j , в противоположность якобиану $\mathcal{J}(\tau, \psi)$, который может изменять (и обычно изменяет) знак при движении по карте. Определим индекс Маслова m_j особой карты U_j , положив $m_j = m(\alpha_j)$, если $\mathcal{J}(\tau^j, \psi^j)$ и $\tilde{\mathcal{J}}(\tau^j, \psi^j)$ имеют одинаковый знак, и $m_j = m(\alpha_j) + \pi$, если они имеют разные знаки.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим опять многообразие (2). Выберем особую карту U_{sing} как окрестность окружности $\{\tau = 0\} = \{p = \mathbf{n}(\psi), x = 0\}$ с помощью неравенства $|\tau| < \mu$, где μ – некоторое положительное число. Имеем $\mathcal{J} = \tau$, $\tilde{\mathcal{J}} = \det(P, P_\psi) = 1$. Поэтому, если мы возьмем $\alpha = (\tau, \psi)$ с положительным τ , то знаки $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ совпадают и $m(U_{\text{sing}}) = 0$. Легко видеть, что результат будет таким же, если взять точку $\alpha = (\tau, \psi)$ с отрицательным τ .

Теперь мы определим канонический оператор в особой карте U_j , действующий на функцию $A_j \in C_0^\infty(U_j)$ по формуле

$$[K_j A_j](x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} e^{-i\pi m_j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\tau/h} A_j(\tau, \psi) \sqrt{\mu |\det(P, P_\psi)|} \right]_{\tau=\tau(x, \psi)} d\psi, \quad (28)$$

где $\arg i = \pi/2$.

ТЕОРЕМА 2. *Особый канонический оператор (28) совпадает с точностью до $O(h)$ со стандартным каноническим оператором Маслова [1], [2]. В частности, индекс Маслова особой карты U_j совпадает по модулю 4 с индексом Маслова соответствующей особой карты в стандартной конструкции канонического оператора.*

Доказательство этой теоремы будет дано в приложении А.

3.8. Условие квантования и глобальное определение канонического оператора. Для того чтобы глобально определить канонический оператор, мы должны выбрать локальные эйконал-координаты τ_j и числа (индексы) m_j (или, что эквивалентно, аргументы якобианов $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$) в канонических картах таким образом, чтобы локальные канонические операторы совпадали с точностью до $O(\hbar)$ на пересечении соответствующих канонических карт. Это возможно, если для базиса независимых циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ на Λ^2 выполнено *условие квантования Бора–Зоммерфельда*

$$\frac{2}{\pi\hbar} \oint_{\gamma_j} P(\alpha) dX(\alpha) \equiv \text{ind } \gamma_j \pmod{4}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Здесь $\text{ind } \gamma_j$ – индекс Маслова цикла γ_j , N – число Бетти многообразия Λ^2 . На многообразии из раздела 2 число независимых циклов $N = 1$ и $\text{ind } \gamma_1 = 0$.

Пусть выполнено условие (29) и пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ – локально конечное разбиение единицы на Λ^2 , подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Определим глобальный канонический оператор $K_{\Lambda^2}^h$, действующий на гладкие функции $A(\alpha)$ на Λ^2 по формуле

$$u(x, \hbar) = K_{\Lambda^2}^h A \equiv \sum_j K_j(\mathbf{e}_j A), \quad (30)$$

где суммирование производится по всем картам U_j канонического атласа на Λ^2 .

ТЕОРЕМА 3. *Если условия квантования выполнены, то канонический оператор Маслова $K_{\Lambda^2}^h$, определенный формулой (30), с точностью до $O(\hbar)$ не зависит от выбора карт U_j и разбиения единицы $\mathbf{e}_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема следует из теоремы 2 и справедливости доказываемого утверждения для стандартного канонического оператора Маслова.

Практическое следствие теоремы 3 следующее. Предположим, что требуется найти асимптотическое решение в окрестности какой-то фиксированной точки x . Тогда нужно найти все ее прообразы $\alpha_k(x)$ на Λ такие, что $X(\alpha_k(x)) = x$, $k = 1, \dots, k_0$. Если все точки $\alpha_k(x) \in \Lambda$ “далеки” от фокальных точек, то сумма состоит из функций типа ВКБ-решений (27). Если одна или несколько (или бесконечное множество) фокальных точек $\alpha^*_n = (\tau_n^*, \psi_n^*)$ на Λ близки или совпадают с некоторым $\alpha_{k'(x)}$, тогда нужно включить в эту сумму для функции $u(x)$ интегралы (28) с такими срезающими функциями $\mathbf{e}_n(\psi)$, что их носители покрывают ε -окрестность фокальных точек. Это, в свою очередь, часто дает возможность выразить эти интегралы через специальные функции. Мы обсудим такие упрощения ниже в п. 3.10. Еще одно полезное следствие состоит в том, что в конкретных вычислениях можно освободиться от свойства односвязности областей (карт) Ω_j . Тогда, строго говоря, Ω_j уже не будут картами, но формулы останутся справедливыми, при этом некоторые функции из разбиения единицы объединятся и соответствующие формулы сильно упростятся.

3.9. Связь с дифференциальными уравнениями. Коммутация канонического оператора с $\hbar$ -дифференциальным (и $\hbar$ -псевдодифференциальным) оператором. Для полноты изложения приведем хорошо известное утверждение, дающее приложение канонического оператора к уравнениям с частными производными. Рассмотрим дифференциальный или псевдодифференциальный

оператор с малым параметром h (номера над операторами $\hat{p} = -ih \partial/\partial x$ и x обозначают порядок их действия, см. [2], [4], [5])

$$\hat{L} = L(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h) \equiv L\left(\overset{2}{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h\right), \quad (31)$$

задаваемый его символом $L(x, p, h)$, имеющим разложение $L(x, p, h) = H(x, p) + hL_1(x, p) + h^2L_2(x, p) + \dots$ ($\hat{L}$ – дифференциальный оператор, если $L(x, p, h)$ – полином по переменным p). Напомним, что $H(x, p)$ называется *главным символом* оператора $\hat{L}$, или (классическим) *гамильтонианом*, а функция $\frac{1}{2}(\text{tr } H_{xp}) - iL_1(x, p)$, где $\text{tr } H_{xp}$ – след матрицы $H_{xp}(x, p)$, – *субглавным символом* оператора $\hat{L}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \in C_0^\infty(\Lambda^2)$, тогда

$$\hat{L}(K_{\Lambda^2}^h A) = K_{\Lambda^2}^2(H|_{\Lambda^2} A) + O(h), \quad (32)$$

где $H|_{\Lambda^2}$ – сужение функции $H(x, p)$ на лагранжево многообразие Λ^2 . Если, кроме того, $H(x, p) \equiv 0$ на Λ^2 и мера $d\mu$ инвариантна по отношению к сдвигам вдоль траекторий гамильтонова векторного поля

$$\frac{d}{dt} = H_p(x, p) \frac{\partial}{\partial x} - H_x(x, p) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (33)$$

тогда

$$\hat{L}(K_{\Lambda^2}^h A) = -ihK_{\Lambda^2}^h \left(\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}(\text{tr } H_{xp})|_{\Lambda^2} A + iL_1|_{\Lambda^2} A \right) + O(h^2). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема является следствием теоремы 2 и теоремы о коммутации с дифференциальным оператором для “стандартного” канонического оператора.

Теорема 4 дает, в частности, рецепт конструирования лагранжевых многообразий, включая многообразия с эйконал-координатами (см. примеры ниже).

3.10. Упрощение формул канонического оператора в окрестности каустик. Непосредственное использование формулы (28), задающей канонический оператор $K_{\Lambda^2}^h$ в особой карте U_j с эйконал-координатами (τ, ψ) , требует нахождения интеграла от быстроосциллирующей функции. Естественно спросить, нельзя ли избежать этого сравнительно трудоемкого вычисления. Мы уже знаем, что если носитель амплитуды $A_j(\tau, \psi)$ в (28) не пересекается с множеством $\Gamma \subset \Lambda^2$ фокальных точек, то формула (28) может быть преобразована к не содержащему интегрирования виду (27). Поэтому, используя разбиение единицы, несложно убедиться, что достаточно изучить вопрос для случая, когда носитель $\text{supp } A_j$ содержится в малой окрестности некоторой фокальной точки $\alpha^* = \alpha(\tau^*, \psi^*) \in \Gamma$. Тогда функция (28) с точностью до $O(h^\infty)$ сосредоточена в окрестности *каустики* – проекции $\pi_x(\Gamma)$ множества $\Gamma \in \Lambda^2$ фокальных точек многообразия Λ^2 на $\mathbb{R}_x^2$, а именно в окрестности проекции $x^* = X(\tau^*, \psi^*)$ точки α^* . Мы хотим упростить интегральную формулу (28) для $K_{\Lambda^2}^h$ в окрестности каустики, выразив асимптотику функции $K_j A_j$ через известные специальные функции.

Асимптотическое разложение интеграла (28) связано со стационарными (критическими) точками $\psi_{\text{cr}}(x)$ фазы $\tau(x, \psi)$ этого интеграла. Эти точки зависят от переменных $x = (x_1, x_2)$ и оказываются вырожденными, если x лежит на каустике. Из теории катастроф и метода стационарной фазы [2], [11] вытекает, что (за исключением “супервырожденных” случаев) только некоторая малая окрестность точки $\psi^* = \psi_{\text{cr}}(x^*)$ дает вклад в асимптотическое разложение интеграла (28) при x , близких к x^* , причем оно связано с “нормальной формой” фазы τ . Эта форма определяется первым ненулевым коэффициентом в разложении функции $\tau - \tau^*$ в ряд Тейлора по степеням разности $\psi - \psi^*$. Чтобы получить асимптотику, равномерную по отношению к (x_1, x_2) в некоторой не зависящей от параметра h окрестности каустики, нужно привести фазу к нормальной форме в соответствующей окрестности. Эта процедура опирается на подготовительную теорему Вейерштрасса и потому не вполне конструктивна.

Более конструктивный подход состоит в том, что, заменяя фазу τ конечным отрезком ее ряда Тейлора, можно получить асимптотику интеграла в $O(h^\delta)$ -окрестности каустики при некотором δ и что для точек x , лежащих около границы этой окрестности, можно использовать как эту асимптотику, так и ВКБ-представление (27). При этом можно заменить нелинейную зависимость ψ_{cr} и ψ от переменных x линейной аппроксимацией по $x - X(\tau^*, \psi^*)$ и положить $x = X(\tau^*, \psi^*)$ в амплитуде A . Это дает полное описание асимптотического решения исходной задачи. Подчеркнем, что мы не спшиваем разные асимптотики решения, как это требуется в методе сращивания асимптотических разложений. Вместо этого мы только упрощаем канонический оператор Маслова в различных областях. В ситуации общего положения достаточная степень многочлена Тейлора $n = 3$ для фокальных точек из ребер каустик (это приводит к функции Эйри) и $n = 4$ для точки возврата каустики (это приводит к функции Пирси). Существует обширная литература, касающаяся функций Эйри и Пирси и их приложений в лучевых разложениях и квазиклассическом приближении, отметим здесь работы [12]–[14].

Несмотря на принципиальную простоту, как сама конструкция, так и ее обоснование содержат много технических деталей, поэтому мы перенесли соответствующий материал в приложение Б.

4. ПРИМЕРЫ

Обсудим типичные ситуации, когда условие 1 существования эйконал-координат выполнено.

ПРИМЕР 3. Пусть гамильтониан $H(x, p)$ – однородная функция первой степени по переменной p (т.е. $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$ для $\lambda > 0$), и предположим, что лагранжево многообразие Λ^2 лежит на линии уровня $\{(x, p): H(x, p) = 1\}$. Тогда условие 1 выполнено. Действительно, так как $H|_{\Lambda^2} = \text{const}$, то Λ^2 инвариантно относительно гамильтонова векторного поля $V(H) = H_p \partial_x - H_x \partial_p$, причем $PdX(V(H)|_{\Lambda^2}) = PH_p(X, P)|_{\Lambda^2} = H_{\Lambda^2} = 1$ в силу тождества Эйлера, так что форма PdX заведомо не обращается в нуль. Ясно также, что гамильтоново векторное поле невырожденно на Λ^2 . Следовательно, мы можем ввести локальную систему координат (τ, ψ) на Λ^2 такую, что ψ постоянно вдоль траекторий и τ – время вдоль

траектории (так называемое собственное время); такие координаты и будут эйконал-координатами.

Отсюда вытекает следующий (известный) метод построения лагранжевых многообразий с эйконал-координатами. Именно, пусть

$$\Lambda_0^1 = \{(x, p) \in \mathbb{R}_{p,x}^4 : x = X^0(\psi), p = P^0(\psi)\}$$

– гладкая незамкнутая ($\psi \in \mathbb{R}$) или замкнутая ($\psi \in \mathbb{S}$) кривая в четырехмерном фазовом пространстве такая, что $H|_{\Lambda_0^1} = 1$ и выполняются следующие условия: 1) каждая траектория $P(\tau, \psi), X(\tau, \psi)$ гамильтоновой системы

$$\dot{p} = -H_x, \quad \dot{x} = H_p, \quad (35)$$

начинающаяся из Λ_0^1 , трансверсальна ей; 2) все эти траектории навсегда выходят из любой ограниченной области в $\mathbb{R}_{x,p}^4$ за некоторое конечное время (см. [15], [16]). Тогда объединение этих траекторий дает лагранжево многообразие $\Lambda^2 = \{(x, p) \in \mathbb{R}_{x,p}^4 : x = X(\tau, \psi), p = P(\tau, \psi)\}$ с эйконал-координатами (τ, ψ) . Тот факт, что Λ^2 – гладкое многообразие, следует из предположений 1, 2 (см. [15], [16]). Лагранжевость следует из сохранения кососкалярного произведения решений линейных гамильтоновых систем.

ПРИМЕР 4. Принцип Мопертюи–Якоби и канонический оператор. Рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2\mathbf{m}} + v(x),$$

возникающий, в частности, при построении квазиклассических асимптотик уравнения Шредингера. Здесь $\mathbf{m}$ – масса, а потенциал $v(x)$ предполагается гладким и ограниченным. Предположим, что для некоторого $E > \max_x v(x)$ лагранжево многообразие Λ^2 лежит на линии уровня $\{(x, p) : \mathcal{H}(x, p) = E\}$ (неограниченные состояния). Это равенство преобразуется следующим образом:

$$\frac{p^2}{2\mathbf{m}} = E - v(x) \iff \frac{p^2}{2\mathbf{m}(E - v(x))} = 1 \iff \frac{|p|}{\sqrt{2\mathbf{m}(E - v(x))}} = 1.$$

Согласно принципу Мопертюи–Якоби (см. [17], а также [18]) траектории поля $V(\mathcal{H})$ на Λ^2 совпадают (с точностью до изменения времени) с траекториями поля $V(H)$, отвечающего однородному гамильтониану первой степени по импульсу p (задающему так называемую финслерову метрику)

$$H(x, p) = |p|C(x), \quad C(x) = 1/\sqrt{2\mathbf{m}(E - v(x))}.$$

Именно, пусть $P(\tau, \psi), X(\tau, \psi)$ – решения системы

$$\dot{p} = -|p|C_x, \quad \dot{x} = \frac{p}{|p|}C, \quad H = 1, \quad (36)$$

выпущенные из соответствующей кривой Λ_0^1 . В соответствии с принципом Мопертюи–Якоби можно ввести новое время $t = t(\tau, \psi)$,

$$t = \int_0^\tau \sqrt{2\mathbf{m}(E - v(X(\tau, \psi)))} d\tau = \int_0^\tau |P(\tau, \psi)| d\tau. \quad (37)$$

Разрешая уравнение относительно τ , мы получим функцию $\tau(t, \psi)$. Подставим ее в $P(\tau, \psi)$, $X(\tau, \psi)$ и получим функции $\mathcal{P}(t, \psi) = P(\tau(t, \psi), \psi)$, $\mathcal{X}(t, \psi) = X(\tau(t, \psi), \psi)$, которые являются решениями гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$. На многообразии Λ^2 выполнено равенство $H(x, p) = 1$, и мы находимся в рамках примера 3. Таким образом, на многообразии Λ^2 мы имеем две системы координат (две разные параметризации) (t, ψ) и (τ, ψ) , связанные равенствами $\tau = \tau(t, \psi)$, $\psi = \psi$, а якобиан перехода от (t, ψ) к (τ, ψ) равен $1/|P(\tau, \psi)|$.

Поясним переходы от гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}(x, p)$ к системе с гамильтонианом $H(x, p)$ и от координат (t, ψ) к (τ, ψ) на квантово-механическом уровне. Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathbf{m}}\Delta u + v(x)u = Eu \quad (38)$$

в предположении, что потенциал $v(x)$ – гладкая функция такая, что $E > V$, и что $\hbar$ – малый параметр. Полезно напомнить, что если ввести функцию $n^2 = 2\mathbf{m}(E - v(x))$ и большой параметр $k = 1/\hbar$, то уравнение (38) можно переписать в виде уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(x))u(x) = 0 \iff (h^2 \Delta + n^2(x))u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (39)$$

где коэффициент преломления $n(x)$ – гладкая всюду положительная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В физических приложениях часто предполагается, что $v(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В этом случае можно считать, что $n^2(x) \rightarrow 1$ при $|x| \rightarrow \infty$. Для этого нужно в предыдущих формулах параметр $\hbar$ заменить на параметр $\hbar' = \hbar/\sqrt{E}$ и потенциал v на потенциал $v' = v/E$.

Положим $C(x) = 1/\sqrt{2\mathbf{m}(E - v)} \equiv 1/n(x)$. Поделив уравнение (39) на $2\mathbf{m}(E - v)$, получим

$$(-h^2 C^2(x) \Delta - 1)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (40)$$

Оператор

$$-h^2 C^2(x) \Delta = C^2(x) \hat{p}^2, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

существенно самосопряжен в пространстве L_2 с положительным весом $1/C^2(x)$. Поэтому существует самосопряженный положительный оператор

$$\hat{L} = \sqrt{-h^2 C^2(x) \Delta} = \sqrt{C^2(x) \hat{p}^2},$$

и мы можем записать (40) в виде $(\hat{L} + 1)(\hat{L} - 1)u = 0$. Первый сомножитель в левой части – положительный оператор, поэтому последнее уравнение можно поделить на этот множитель и переписать его в виде $(\hat{L} - 1)u = 0$. Теперь представим оператор $\hat{L} = \sqrt{C^2(x) \hat{p}^2}$ в виде псевдодифференциального оператора $L(x, \hat{p}, \hbar)$ с символом $L(x, p, \hbar)$, имеющим асимптотическое разложение

$$L(x, p, \hbar) = H(x, p) + \hbar L_1(x, p) + \hbar^2 L_2(x, p) + \dots$$

Точное выражение для символа $L(x, p, h)$ найти не удастся, но легко найти коэффициенты H и $L_j(x, p)$. Для построения главного члена квазиклассических асимптотик достаточно иметь выражения для H и L_1 . Вычислим эти функции. Имеем

$$L(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, h)^2 = C^2(\overset{2}{x}) \overset{1}{p}^2.$$

Используя формулы из [4], [5] и переходя в этом уравнении от операторов к их символам, найдем уравнение для L :

$$L\left(\overset{2}{x}, p - ih \frac{\partial}{\partial x}, h\right) L(x, p, h) = C^2(x) p^2.$$

Используя разложение Тейлора по $ih \frac{\partial}{\partial x}$ первого множителя, мы легко найдем

$$H(x, p) \equiv L_0(x, p) = C(x)|p|, \quad L_1(x, p) = \frac{i}{2H} \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \equiv i \frac{\langle C_x, p \rangle}{2|p|} \equiv \frac{i}{2} \operatorname{tr} H_{px}.$$

Предположим, что мы построили лагранжево многообразие, как в примере 3, инвариантное относительно соответствующего векторного поля $V(H)$. Гамильтониан здесь равен $H = |p|C(x)$, и гамильтонова система имеет вид (36).

Пусть $A(\tau, \psi)$ – амплитуда на Λ^2 . Рассмотрим функцию $u = K|_{\Lambda^2}^2 A$ и выясним, когда эта функция будет решением уравнения (38) с точностью до $O(h^2)$. Согласно конструкции Λ^2 производная d/dt совпадает с производной $d/d\tau$ на Λ^2 , поэтому, применяя теорему 4, получим уравнение для амплитуды

$$\frac{dA}{d\tau} - \operatorname{tr} H_{px}|_{\Lambda^2} A = 0.$$

В силу гамильтоновой системы имеем $\dot{P} = -|P|C_x(X)$, что дает

$$\operatorname{tr} H_{px}|_{\Lambda^2} = \frac{\langle C_x, p \rangle}{|p|} \Big|_{\Lambda^2} = -\frac{\langle \dot{P}, P \rangle}{|P|} = \frac{|\dot{P}|}{|P|} = -\frac{d \ln |P|}{d\tau}.$$

Поэтому решение A может быть представлено в виде

$$A = \frac{A_0(\psi)}{|P(\tau, \psi)|} = \frac{A_0}{\sqrt{2\mathbf{m}(E - v(X(\tau, \psi)))}} \quad (41)$$

(поскольку $|P|/\sqrt{2\mathbf{m}(E - v(X(\tau, \psi)))} \equiv H = 1$), где A_0 – произвольная гладкая финитная⁶⁾ функция.

Теперь мы можем сформулировать общий результат.

ЛЕММА 5. Пусть Λ^2 – инвариантное лагранжево многообразие с эйконал-координатами, построенное из некоторой гладкой кривой Λ_0^1 , и $A_0(\psi)$ – произвольная гладкая функция. Тогда функция

$$u = K_{\Lambda^2}^h \left[\frac{A_0(\psi)}{|P(\tau, \psi)|} \right] + O(h) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{m}(E - v(x))}} K_{\Lambda^2}^h [A_0(\psi)] + O(h) \quad (42)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера (38) с точностью до $O(h^2)$.

⁶⁾ Это свойство не является необходимым, оно только гарантирует, что функция u хорошо определена в подходящем функциональном пространстве.

Использование последней формулы и формулы (37) дает другое представление канонического оператора Маслова, основанное на координатах (t, ψ) , и, следовательно, другое представление асимптотических решений уравнения (38), отличное от использованных, в частности, в [15], [16].

Предложенный метод построения лагранжевых многообразий позволяет получить широкий класс асимптотических решений уравнения Шредингера. Задача состоит в нахождении соответствующих кривых Λ_0^1 и функций $A_0(\psi)$, дающих асимптотические решения задач, интересных с точки зрения приложений. Отметим также, что задачи с радиально-симметричным потенциалом, разумеется, можно свести к одномерным, переходя к полярным координатам. Такой переход, однако, дает особенность в начале координат и требует дополнительных исследований при построении соответствующих асимптотик. В нашей схеме “координатные” особенности отсутствуют, а “двумерность” задач легко учитывается при задании соответствующего лагранжева многообразия, что, по нашему мнению, делает предлагаемую схему весьма эффективной в конкретных приложениях (см. примеры ниже).

ПРИМЕР 5. Приведем два (известных) специальных лагранжевых многообразия с эйконал-координатами, важных для физических приложений. Пусть потенциал $V(x)$ или скорость C удовлетворяют предположениям 1, 2 (см. пример 3). Первое лагранжево многообразие связано с окружностью:

$$\Lambda_0^1 = \{(x, p) \in \mathbb{R}_{p,x}^4 : x = 0, p = n(0)\mathbf{n}(\psi), \psi \in \mathbb{S}^1\}, \quad \mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Тогда $\Lambda^2 = \{(p, x) \in \mathbb{R}_{p,x}^4 : p = (P(\tau, \psi), X(\tau, \psi)), \tau \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{S}^1\}$ – гладкое многообразие, диффеоморфное двумерному цилиндру в $\mathbb{R}_{p,x}^4$. Канонический оператор Маслова на таких многообразиях дает обобщенные собственные функции задачи на собственные значения (38) для оператора Шредингера, а канонический оператор на “половине” цилиндра (с $\tau \geq 0$) определяет асимптотику функции Грина оператора Шредингера (38) или соответствующего уравнения Гельмгольца (см. [16]).

Предположим теперь для простоты, что потенциал v – финитная функция и ее носитель $\text{supp } v$ принадлежит некоторой области $D \in \mathbb{R}_x^2$ из полуплоскости $x_1 < a$. Выберем теперь Λ_0^1 в виде прямой линии $\Lambda_0^1 = \{p_1 = \sqrt{E}, p_2 = 0, x_1 = a, x_2 = \psi\}$ и возьмем $A_0 = 1$. Тогда функция u (42) дает главный член асимптотического решения w задачи рассеяния для уравнения (38). Точную формулировку и доказательство можно найти в монографии [15] (гл. XI). Формула (42) дает для функции u другое и, вместе с (27), (64), (65), более явное представление соответствующих асимптотик.

Рассмотрим теперь более конкретные примеры.

ПРИМЕР 6. Асимптотика уравнения Гельмгольца с радиально-симметричным коэффициентом преломления и обобщенными собственными функциями оператора Шредингера с радиально-симметричным потенциалом. Рассмотрим задачу о нахождении быстроосциллирующих решений уравнения Гельмгольца (39), порожденных лагранжевым многообразием Λ^2 , совпадающим при больших $|x|$ с многообразием (2), в случае, когда коэффициент преломления $n(x)$ – гладкая положительная функция, зависящая только от $|x|$, $n(x) \equiv n(|x|)$ и равная единице для $|x| > R_0$.

(В частности, если $A = 1$ и мера $d\mu$ на Λ^2 выбрана инвариантной относительно гамильтонова векторного поля, как в примере с $n^2(x) \equiv 1$, рассмотренном в разделе 2, тогда наше решение будет почти пропорционально функции Бесселя $\mathbf{J}_0(|x|/h)$ для больших $|x|$.)

В качестве Λ^2 возьмем многообразие, проходящее через окружность (43) и инвариантное относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану $\mathcal{H}(x, p) = p^2 - n^2(x)$. Как отмечалось выше, для нахождения Λ^2 и определения эйконал-координат на Λ^2 мы воспользуемся принципом Мопертюи–Якоби и перейдем к эквивалентному однородному гамильтониану первой степени

$$H(x, p) = \frac{|p|}{n(|x|)} = |p|C(|x|).$$

Решение соответствующей гамильтоновой системы на Λ_0^2 можно искать в виде

$$X(\tau, \psi) = \rho(\tau)\mathbf{n}(\psi), \quad P(\tau, \psi) = \mathcal{P}_\rho(\tau)\mathbf{n}(\psi).$$

Решая уравнения, получаем:

$$\rho(\tau) - \text{обратная функция к функции } T(r) = \int_0^r n(r) dr, \quad \text{и } \mathcal{P}_\rho(\tau) = n(\rho(\tau)).$$

Пара (τ, ψ) – система эйконал-координат на Λ^2 . Мы видим, что для больших $|\tau|$ это многообразие совпадает с рассмотренным в разделе 2, но параметризация здесь другая. (Эти две параметризации различаются для больших τ сдвигом

$$\delta\tau = \int_0^{R_0} (n(r) - 1) dr \quad (44)$$

по переменной τ .)

Легко видеть, что в таких эйконал-координатах многообразие Λ^2 целиком покрывается одной сингулярной канонической картой. Действительно, уравнение (24) имеет глобальное решение $\tau(x, \psi) = T(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle)$. Множество $\Pi = \{(x, \psi) : \tau_\psi(x, \psi) = 0\}$ имеет вид

$$\Pi = \{(x, \psi) : x \perp \mathbf{n}_\psi(\psi)\} = \{(x, \psi) : x \parallel \mathbf{n}(\psi)\},$$

и $d(\tau_\psi) \neq 0$ на Π , поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_\psi) = n(|x|)\mathbf{n}'(\psi) \neq 0$$

на множестве Π . Отображение $(x, \psi) \rightarrow (x, \tau_x(x, \psi))$ действует на Π по формуле $\Pi \ni (x, \psi) \mapsto (x, n(|x|)\mathbf{n}(\psi))$ и, как легко видеть, является диффеоморфизмом Π на Λ^2 . Окончательно имеем

$$\det(P, P_\psi) = \mathcal{P}_\rho^2(\tau) \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\psi) = \mathcal{P}_\rho^2(\tau) = n^2(\rho(\tau)) \neq 0.$$

Поэтому многообразие Λ^2 действительно покрывается одной особой картой.

Мера, инвариантная относительно векторного поля, заданного гамильтонианом $\mathcal{H}(x, p)$, имеет вид

$$d\mu = \frac{1}{n^2(\rho(\tau))} d\tau \wedge d\psi.$$

Поэтому

$$[K_{\Lambda^2}^h A](x) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{(i/h)T(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle)} A(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle, \psi) d\psi. \quad (45)$$

Покажем, что этот интеграл можно выразить через функцию Бесселя. Прямые вычисления приводят к следующему утверждению.

ЛЕММА 6. *Существует гладкая замена переменных $y = g(x)$, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(x, \psi)$ такая, что справедливо равенство $T(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle) = \langle y, \mathbf{n}(\tilde{\psi}) \rangle$. Более того,*

$$g(x) = \frac{T(|x|)}{|x|}, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \psi} \right|_{\Pi} = \sqrt{\frac{|x|n(|x|)}{T(|x|)}}. \quad (46)$$

Воспользовавшись этим результатом и выбрав $A \equiv 1$, получим

$$\begin{aligned} [K_{\Lambda^2}^h 1](x) &= \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{i}{h} \left\langle \frac{T(|x|)}{|x|} x, \mathbf{n}(\tilde{\psi}) \right\rangle\right) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \psi}\right)^{-1} d\tilde{\psi} = \\ &= \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{i}{h} \left\langle \frac{T(|x|)}{|x|} x, \mathbf{n}(\tilde{\psi}) \right\rangle\right) \sqrt{\frac{T(|x|)}{|x|n(|x|)}} d\tilde{\psi} + O(h) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Амплитуды в этих двух интегралах совпадают на множестве Π ; следовательно, разность амплитуд можно представить как произведение гладкой функции на τ_ψ , и интегрирование по частям показывает, что разность интегралов действительно есть $O(h)$ по сравнению с главным членом. Завершая вычисления, находим

$$\left(\frac{2\pi h}{i}\right)^{1/2} [K_{\Lambda^2}^h 1](x) = a(|x|) \mathbf{J}_0\left(\frac{T(|x|)}{h}\right) + O(h), \quad a(|x|) = 2\pi \sqrt{\frac{T(|x|)}{|x|n(|x|)}}. \quad (48)$$

Мы видим, что канонический оператор на этом многообразии дает “искаженную” функцию Бесселя с множителем $a(|x|)$, стремящимся к единице при $|x| \rightarrow \infty$ и, что более важно, с фазовым сдвигом $\delta\tau$ (44): для $R > R_0$ формула (48) имеет вид

$$\left(\frac{2\pi h}{i}\right)^{1/2} [K_{\Lambda^2}^h 1](x) = a(|x|) \mathbf{J}_0\left(\frac{|x| + \delta\tau}{h}\right) + O(h).$$

ПРИМЕР 7. Теперь приведем простой пример из теории волновых пучков. Рассмотрим задачу Коши для уравнения шредингеровского типа, возникающего в оптике в хорошо известном параксиальном приближении:

$$ih \frac{\partial v}{\partial t} = -ihc \frac{\partial v}{\partial x_3} - h^2 \frac{c}{4k} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right), \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (49)$$

Здесь c, k – физические (положительные) константы. Сделаем хорошо известную замену $z = x_3 - ct$ и положим $v(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, z)$, где u – новая неизвестная функция. Тогда уравнение (49) примет вид двумерного уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mathbf{m}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right), \quad \mathbf{m} = \frac{2k}{c}, \quad u|_{t=0} = v_0(x_1, x_2, z), \quad (50)$$

содержащего переменную z как параметр. Обозначим через x двумерный вектор-столбец с компонентами (x_1, x_2) . Разумеется, задачу Коши для уравнения (50) можно решать с помощью метода Фурье и получить ответ в виде интегралов от быстроменяющихся функций, однако их “асимптотическое упрощение” (с помощью методов типа метода стационарной фазы) представляет собой весьма непростую задачу, и подход, основанный на каноническом операторе Маслова, нам кажется более эффективным. Выберем начальные данные в виде канонического оператора Маслова на зависящем от параметра z семействе лагранжевых многообразий $\Lambda_0^2(z) = \{p = P^0(\alpha, \psi) \equiv \lambda(z)\mathbf{n}(\psi), x = X^0 \equiv \alpha\mathbf{n}, \alpha \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{S}\}$:

$$u|_{t=0} = v_0(x_1, x_2, z) = K_{\Lambda_0^2(z)}^h[A]. \quad (51)$$

Здесь $\lambda(z)$ – гладкая функция, например $\lambda(z) = 1/\sqrt{1+z^2}$ или $\lambda(z) = a + b(1 + \operatorname{th} z)$, a, b – константы, $a > 0$, $|b| < a$. Выберем на $\Lambda_0^2(z)$ меру $\mu \equiv 1$ и возьмем амплитуду $A(\alpha)$ в виде $A(\alpha) = g(\alpha)f(z)$, где $g(\alpha)$, $f(z)$ – гладкие финитные функции. Для простоты предположим, что $g(\alpha)$ – четная функция. Зафиксируем центральную точку $\alpha_0 = (\alpha = +0, \psi = 0)$ на $\Lambda_0^2(z)$. Покажем, что решение задачи (50), порожденное такого типа многообразием, обобщает решения, известные в оптике как бесселевы волновые пучки.

Применим общую конструкцию Маслова асимптотических решений задачи Коши для дифференциальных (и псевдодифференциальных) уравнений. Для этого сдвинем многообразие $\Lambda_0(z)$ с помощью фазового потока g_H^t , заданного гамильтонианом $H = p^2/2\mathbf{m}$. Легко показать, что полученное в результате сдвига многообразие есть

$$\begin{aligned} \Lambda_t^2(z) &= g_H^t \Lambda_0^2(z) \equiv \\ &\equiv \left\{ p = P(\alpha, \psi) \equiv \lambda(z)\mathbf{n}(\psi), x = X^0 + tH_p(P^0) \equiv \left(\alpha + t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}} \right) \mathbf{n}(\psi), \alpha \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{S} \right\}. \end{aligned}$$

Центральная точка α_0^t на многообразии $\Lambda_t^2(z)$ – это точка с координатами $(\alpha = +0, \psi = 0)$ точки α_0 . Тогда главный член асимптотического решения задачи (50), (51) есть [1], [2]

$$u = v_0(x_1, x_2, z, t) = \exp \left(i \frac{s(t)}{h} - im(\alpha_0^t) \right) K_{\Lambda_t^2(z)}[A^t], \quad (52)$$

где $s(t)$ – интеграл (действие) от лагранжиана $L = (\langle p, H_p \rangle - H) = p^2/2\mathbf{m}$ вдоль траектории, состоящей из центральных точек

$$s(t) = \int_0^t \frac{P^2(0, \psi)}{2\mathbf{m}} dt = t \frac{\lambda^2(z)}{2\mathbf{m}},$$

и $m(\alpha_0^t)$ – число фокальных точек на этой траектории за временной промежуток $[0, t]$. Нетрудно показать, что $m(\alpha_0^t) = 0$. Амплитуда A^t – решение уравнения переноса на Λ_t^2 , которое имеет вид $dA^t/dt = 0$, $A^t|_{t=0} = A_0$, поэтому $A^t = A(\alpha)$.

Вычислим $K_{\Lambda_t^2(z)}^h[A^t]$. Эйконал есть

$$\tau = \int_{(\alpha=+0, \psi=0)}^{(\alpha, \psi)} P dX = \lambda(z)\alpha, \quad (53)$$

и эйконал-координаты суть $(\tau = \lambda\alpha, \psi)$, $\alpha = \tau/\lambda$. В этих координатах

$$P = \lambda(z)\mathbf{n}(\psi), \quad X = \left(\frac{\tau}{\lambda(z)} + t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}} \right) \mathbf{n}(\psi),$$

$$X_\psi = \left(\frac{\tau}{\lambda(z)} + t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}} \right) \mathbf{n}_\perp(\psi) = \left(\alpha + t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}} \right) \mathbf{n}(\psi).$$

Мы видим, что многообразия (цилиндры в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^4$) $\Lambda_t^2(z) = \Lambda_0^2(z)$ совпадают как геометрические объекты, а это означает, что Λ_0^2 инвариантно относительно фазового потока g_t^H . Лагранжевы сингулярности опять представляют собой окружности $\tau = -t\lambda^2(z)/\mathbf{m}$, которые двигаются со временем по Λ_0^2 . Их проекция на физическую плоскость есть точка $x = 0$ (которая не двигается со временем t). Многообразие Λ_0^2 можно покрыть двумя неособыми областями $U_1 = \{\tau > -t\lambda^2(z) + \delta\}$ и $U_3 = \{\tau < -t\lambda^2(z)/\mathbf{m} - \delta\}$ и одной особой областью $U_2 = \{|\tau + t\lambda^2(z)/\mathbf{m}| < 2\delta\}$. Решение уравнений $X(\tau, \psi) = x$ есть $\tau = -t\lambda^2(z)/\mathbf{m} \pm \lambda(z)|x|$ (и, следовательно, $\alpha = -t\lambda(z)/\mathbf{m} \pm |x|$), где знак плюс берется для области U_1 (когда $\tau > t\lambda^2(z)\mathbf{m}$), а знак минус берется для области U_3 (когда $\tau < t\lambda^2(z)/\mathbf{m}$), $\mathbf{n}(\psi) = x/|x|$. Зададим индекс Маслова $m_1 = 0$ для точек из области U_1 . Как и в примере 1, найдем индекс Маслова $m_2 = -1$ в области U_2 . Поэтому вне некоторой окрестности начала координат канонический оператор дает следующую формулу:

$$u = \exp\left(-\frac{it\lambda^2(z)}{2\mathbf{m}h}\right) e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\lambda(z)}}{\sqrt{|x|}} \left(\exp\left(\frac{i\lambda(z)|x|}{h} + \frac{i\pi}{4}\right) g\left(|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{i\lambda(z)|x|}{h} - \frac{i\pi}{4}\right) g\left(-|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) \right) f(z).$$

Теперь представим решение в окрестности точки $x = 0$. Решение $\tau(x, \psi, t)$ уравнения $\langle P, x - X \rangle = 0$ есть $\tau = \langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle - t\lambda^2(z)/2\mathbf{m}$, и $\det(P, P_\psi) = \lambda^2(z)$. Так как детерминант не обращается в нуль нигде на $\Lambda_t(z)$, то можно опустить срезающую функцию в особой области и написать всюду

$$u = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} e^{-it\lambda^2(z)/\mathbf{m}h} \lambda(z) \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{i\lambda(z)}{h} \langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle\right) g\left(\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle - t \frac{\lambda(z)}{2\mathbf{m}}\right) f(z) d\psi.$$

Используя теперь такие же соображения, которые приводят к формуле (12), получим

$$u = \pi \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{it\lambda^2(z)}{2\mathbf{m}h}\right) \lambda(z) f(z) \left[\left(g\left(|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) + \right. \right.$$

$$\left. + g\left(-|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) \right) \mathbf{J}_0\left(\frac{\lambda(z)|x|}{h}\right) +$$

$$\left. + i \left(g\left(|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) - g\left(-|x| - t \frac{\lambda(z)}{\mathbf{m}}\right) \right) \mathbf{J}_1\left(\frac{\lambda(z)|x|}{h}\right) \right] \Big|_{z=x_3-ct}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство теоремы 2

Обозначим произведение $A_j(\tau, \psi)\sqrt{\mu(\tau, \psi)}$ через $\varphi(\tau, \psi)$. Без ограничения общности будем считать, что носитель $\text{supp } \varphi$ содержится в малой окрестности особой точки $(\tau_0, \psi_0) \in U_j$. Запишем канонический оператор на функциях с носителем в окрестности точки (τ_0, ψ_0) в виде стандартного оператора в особой карте. Перед этим совершим поворот системы координат на x -плоскости (и соответствующий поворот двойственной системы координат в p -плоскости) так, чтобы было выполнено равенство $P_2(\tau_0, \psi_0) = 0$.

ЛЕММА 7. *При условии $P_2(\tau_0, \psi_0) = 0$ в качестве канонических координат на лагранжевом многообразии в окрестности точки (τ_0, ψ_0) можно взять (x_1, p_2) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все вычисления ведем в точке (τ_0, ψ_0) . Так как $P_2 = 0$, то $\langle P, X_\tau \rangle \equiv P_1 X_{1\tau}$ и, следовательно, $X_{1\tau} \neq 0$. Далее, $0 \neq \det(P, P_\psi) \equiv P_1 P_{2\psi}$, откуда следует, что $P_{2\psi} \neq 0$, и, наконец, $0 = \langle P, X_\psi \rangle \equiv P_1 X_{1\psi}$, откуда следует, что $X_{1\psi} = 0$, поскольку $P_1 \neq 0$. Поэтому

$$\mathcal{J}_s \equiv \det \frac{(X_1, P_2)}{(\tau, \psi)} = \det \begin{pmatrix} X_{1\tau} & X_{1\psi} \\ P_{2\tau} & P_{2\psi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_{1\tau} & 0 \\ P_{2\tau} & P_{2\psi} \end{pmatrix} = X_{1\tau} P_{2\psi} \neq 0.$$

Запишем канонический оператор⁷⁾ в координатах (x_1, p_2) :

$$[K\varphi](x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int \exp \left(\frac{i}{h} S(x_1, p_2) + p_2 x_2 \right) \frac{\varphi}{\sqrt{\mathcal{J}_s}} dp_2. \quad (54)$$

Применим к (28) и (54) преобразование Фурье по переменной x_2 и покажем, что полученные выражения совпадают с точностью до $O(h)$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi h} \int \left[\exp \left(\frac{i}{h} (\tau - p_2 x_2) \right) \varphi \sqrt{\det(P, P_\psi)} \right]_{\tau=\tau(x, \psi)} d\psi dx_2 = \\ = \exp \left(\frac{i}{h} S(x_1, p_2) + p_2 x_2 \right) \frac{\varphi}{\sqrt{\mathcal{J}_s}} + O(h). \end{aligned} \quad (55)$$

Вычислим выражение в левой части (55) методом стационарной фазы. Получим, обозначая $\tau - p_2 x_2 = \Phi(\psi, x_2)$, с точностью до $O(h)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi h} \int \left[\exp \left(\frac{i}{h} (\tau - p_2 x_2) \right) \varphi \sqrt{\det(P, P_\psi)} \right]_{\tau=\tau(x, \psi)} d\psi dx_2 \simeq \\ \simeq \frac{1}{i} \frac{e^{i\Phi/h} \varphi \sqrt{\det(P, P_\psi)}}{\sqrt{\det(-\Phi'')}} \Big|_{\text{в стац. точке}}, \end{aligned}$$

где аргумент детерминанта $\det(-\Phi'')$ вычисляется как сумма аргументов собственных значений (2×2) -матрицы $-\Phi''$, взятых из множества $\{-\pi, 0\}$.

⁷⁾Мы включили здесь индекс Маслова в аргумент якобиана, всюду далее вместо абсолютных значений якобианов пишем сами якобианы, а множители вида $e^{-im_j \pi/2}$ не пишем вовсе.

Проведем теперь вычисления в точке $(x_1, p_2) = (X_1(\tau_0, \psi_0), P_2(\tau_0, \psi_0))$. Функция $\tau(x, \psi)$ определяется из уравнения

$$\langle P, x - X \rangle = 0, \quad (56)$$

откуда дифференцированием с учетом свойств эйконал-координат находим

$$\tau_\psi = \frac{\langle x - X, P_\psi \rangle}{1 - \langle x - X, P_\tau \rangle}, \quad \tau_x = \frac{P}{1 - \langle x - X, P_\tau \rangle}.$$

Таким образом, уравнения стационарной точки дают вместе с (56)

$$\langle P, x - X \rangle = 0, \quad \langle P_\psi, x - X \rangle = 0, \quad p_2 = \frac{P_2}{1 - \langle x - X, P_\tau \rangle},$$

откуда в силу условия $\det(P, P_\psi) \neq 0$ имеем

$$x = X, \quad p_2 = P_2.$$

Для вторых производных фазовой функции в стационарной точке получаем

$$\Phi_{\psi\psi} = -\langle X_\psi, P_\psi \rangle, \quad (57)$$

$$\Phi_{\psi x_2} = P_{2\psi} - \langle X_\tau, P_\psi \rangle P_2 = P_{2\psi}, \quad (58)$$

$$\Phi_{x_2 x_2} = P_\tau P_2 + P_2 \langle x - X, P_\tau \rangle'_{x_2} = 0, \quad (59)$$

откуда

$$\begin{aligned} \det(-\Phi'') &= \det \begin{pmatrix} \langle X_\psi, P_\psi \rangle & -P_{2\psi} \\ -P_{2\psi} & 0 \end{pmatrix} = -P_{2\psi}^2, \\ \arg \det(-\Phi'') &\stackrel{\varepsilon=1}{=} \arg \det \begin{pmatrix} \varepsilon \langle X_\psi, P_\psi \rangle & -P_{2\psi} \\ -P_{2\psi} & 0 \end{pmatrix} = \\ &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \arg \det \begin{pmatrix} 0 & -P_{2\psi} \\ -P_{2\psi} & 0 \end{pmatrix} = -\pi \end{aligned}$$

(одно собственное значение отрицательно, а другое положительно).

Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_s}} = \frac{\sqrt{\det(P, P_\psi)}}{i \sqrt{\det(-\Phi'')}}. \quad (60)$$

Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s \det(P, P_\psi) &= X_{1\tau} P_{2\psi} P_1 P_{2\psi} = P_1 X_{1\tau} P_{2\psi}^2 = \\ &= (P_1 X_{1\tau} + P_2 X_{2\tau}) P_{2\psi}^2 = P_{2\psi}^2 = -\det(-\Phi''), \end{aligned}$$

и равенство (60) выполнено, поскольку

$$\arg \det(P, P_\psi) = \arg \det(-\Phi'') + 2 \arg i - \arg \mathcal{J}_s = \pi - \pi - \arg \mathcal{J}_s = -\arg \mathcal{J}_s.$$

Если теперь воспользоваться правилом выбора аргументов якобиана в стандартной особой карте и провести упомянутый поворот, то в терминах исходных координат получится правило выбора аргумента особого якобиана, указанное в п. 3.7.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

 Представление решений в окрестности каустик
через функции Эйри и Пирси

Покажем, как для лагранжева многообразия *общего положения* [11] функция (28) может быть выражена вблизи каустики через функции Эйри и Пирси. Множители $\sqrt{\mu}$ и $e^{-i\pi m_j/2}$ из (28) включим в амплитуду и рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{1/2} \int [e^{(i\tau/h)(\psi, x)} A(\tau, \psi) |\det(P, P_\psi)|^{1/2}]_{\tau=\tau(\psi, x)} d\psi, \quad (61)$$

где носитель $\text{supp } A(\tau, \psi)$ лежит в окрестности фокальной точки $(\tau^*, \psi^*) \in \Lambda^2$. Вычислять интеграл (61) будем в окрестности проекции⁸⁾ $x^* = X^* \equiv X(\tau^*, \psi^*)$ этой точки на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^2$. Наложим на лагранжево многообразие Λ^2 следующее техническое условие (которое выполнено во всех рассмотренных в разделе 4 конкретных примерах и без которого окончательные формулы станут значительно менее обозримыми).

УСЛОВИЕ 2. Лагранжево многообразие Λ^2 лежит во множестве уровня некоторого гамильтониана вида $H(x, p) = F(x, |p|)$.

Для фокальной точки (τ^*, ψ^*) общего положения возможны два случая [2], [11]:

- а) $X_{\psi\psi}^* \neq 0$, или, что эквивалентно, $\mathcal{J}_\psi^* \neq 0$ (особенность типа A_2 , или *складка*);
- б) $X_{\psi\psi}^* = 0$, но $X_{\psi\psi\psi}^* \neq 0$, или, что эквивалентно, $\mathcal{J}_\psi^* = 0$, но $\mathcal{J}_{\psi\psi}^* \neq 0$ (особенность типа A_3 , или *сборка*).

(Напомним, что $\mathcal{J}$ – неособый якобиан (17).) Покажем, что интеграл (61) может быть выражен в малой окрестности точки x^* каустики в случае “а” через функцию Эйри

$$\text{Ai}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\eta^3}{3} + y\eta\right) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(i\left(\frac{\eta^3}{3} + y\eta\right)\right) d\eta \quad (62)$$

и в случае “б” через функции Пирси

$$P^\pm(v, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i(y\eta + v\eta^2 \pm \eta^4)) d\eta. \quad (63)$$

Именно, верна

ТЕОРЕМА 5. При указанных выше условиях в $O(h^{5/6})$ -окрестности точки x^* справедливы следующие асимптотические разложения: в случае “а”

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \frac{e^{-i\pi/4} 2^{5/6} \sqrt{\pi |P^*| |P_\psi^*|}}{\sqrt[3]{|\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi}^* \rangle| \sqrt[6]{h}}} A(\tau^*, \psi^*) \exp\left(\frac{i}{h}(\tau^* + \langle P^*, x - X^* \rangle)\right) \times \\ & \times \text{Ai}\left(-\frac{2^{1/3} \langle P_\psi^*, x - X^* \rangle}{h^{2/3} \sqrt[3]{\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi}^* \rangle}}\right) + O(\sqrt[6]{h}), \quad (64) \end{aligned}$$

⁸⁾Объекты, вычисленные в точке (τ^*, ψ^*) , здесь и далее снабжаются верхним индексом $*$ (например, $X_{\psi\psi}^* = X_{\psi\psi}(\tau^*, \psi^*)$), который не означает в этом приложении эрмитова сопряжения.

в случае “б”

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{h}} \frac{\sqrt{|P^*||P_\psi^*|}}{\sqrt[4]{|\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi\psi} \rangle|}} A(\tau^*, \psi^*) \exp\left(\frac{i}{h}(\tau^* + \langle P^*, x - X^* \rangle)\right) \times \\ & \times P^\pm \left(\sqrt[4]{\frac{24}{h^3|\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi\psi} \rangle|}} \langle P_\psi^*, x - X^* \rangle, \sqrt{\frac{6}{h|\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi\psi} \rangle|}} \langle P_{\psi\psi}^*, x - X^* \rangle \right) + O(1), \end{aligned} \quad (65)$$

где верхний знак у $P^\pm$ берется при $\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi\psi} \rangle > 0$, а нижний – в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выведем сначала некоторые общие формулы для интегралов от быстроосциллирующих функций. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ – вектор из вещественных параметров, $|z| \leq \varepsilon_0$, а $\Phi(\beta, z)$ – гладкая функция с разложением Тейлора

$$\Phi(\beta, z) = \Phi^{(3)}(\beta, z) + O(\beta^4) = \Phi^{(4)}(\beta, z) + O(\beta^5),$$

$$\Phi^{(3)} = q_0(z) + q_1(z)\beta + \frac{q_2(z)}{2}\beta^2 + \frac{q_3(z)}{6}\beta^3 + O(\beta^4), \quad \Phi^{(4)} = \Phi^{(3)} + \frac{q_4(z)}{24}\beta^4,$$

коэффициенты $q_j(z)$ которого, в свою очередь, имеют разложения

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + \langle b_0, z \rangle, & q_1 &= a_1 + \langle b_1, z \rangle + O(z^2), & q_2 &= a_2 + \langle b_2, z \rangle + O(z^2), \\ q_3 &= a_3 + O(z), & q_4 &= a_4 + O(z). \end{aligned} \quad (66)$$

Пусть $f(\beta, z)$ – гладкая функция, равная нулю при $|\beta| > \beta_0$, где β_0 достаточно мало.

ЛЕММА 8. 1. Если $a_3(0) \neq 0$, то для z из $O(h^{5/6})$ -окрестности нуля

$$\int_{\mathbb{R}} f(\beta, z) e^{i\Phi(\beta, z)/h} d\beta = \int_{\mathbb{R}} f(0, z) e^{i\Phi^{(3)}(\beta, z)/h} d\beta + O(h^{2/3}) = \quad (67)$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi f(0, z) \sqrt[3]{\frac{2h}{q_3}} \exp\left(\frac{i}{h}\left(q_0 + \frac{q_2^2}{3q_3^2} - \frac{q_1 q_2}{q_3}\right)\right) \times \\ &\times \operatorname{sign}(q_3) \operatorname{Ai}\left(\frac{2q_1 q_3 - q_2^2}{2^{2/3} q_3^{4/3} h^{2/3}}\right) + O(h^{2/3}) = \end{aligned} \quad (68)$$

$$= 2\pi f(0, 0) \sqrt[3]{\frac{2h}{|a_3|}} \exp\left(\frac{i}{h}(a_0 + \langle b_0, z \rangle)\right) \operatorname{Ai}\left(\frac{2\langle b_1, z \rangle}{2^{2/3} h^{2/3} \sqrt[3]{a_3}}\right) + O(h^{2/3}). \quad (69)$$

2. Если $a_3 = 0$, но $a_4 \neq 0$, то для z из $O(h^{7/8})$ -окрестности нуля

$$\int_{\mathbb{R}} f(\beta, z) e^{i\Phi(\beta, z)/h} d\beta = \int_{\mathbb{R}} f(0, z) e^{i\Phi^{(4)}(\beta, z)/h} d\beta + O(h^{1/2}) = \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &= f(0, z) \sqrt[4]{\frac{24h}{|a_4|}} \exp\left(\frac{i}{h}\left(q_0 \pm \left(-q_1 q_3 + \frac{q_2 q_3^2}{2q_4} - \frac{q_3^4}{8q_4^2}\right)\right)\right) \times \\ &\times P^\pm \left(\sqrt[4]{\frac{24}{h^3|q_4|}} \left(q_1 + \frac{q_3^3}{3q_4^2} - \frac{q_2 q_3}{q_4}\right), \sqrt{\frac{6}{h|a_4|}} \left(q_2 - \frac{a_3^2}{2q_4}\right) \right) + O(h^{1/2}) = \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
 &= f(0, 0) \sqrt[4]{\frac{24h}{|a_4|}} \exp\left(\frac{i}{h}(a_0 + \langle b_0, z \rangle)\right) \times \\
 &\quad \times P^{\pm}\left(\sqrt[4]{\frac{24}{h^3|a_4|}} \langle b_1, z \rangle, \sqrt{\frac{6}{h|a_4|}} \langle b_2, z \rangle\right) + O(h^{1/2}),
 \end{aligned} \tag{72}$$

где знак у $P^{\pm}$ берется в соответствии со знаком величины a_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Так как $q_3(0) \neq 0$, то $|q_3(z)| > C > 0$ в $O(h^{5/6})$ -окрестности точки $z = 0$, где постоянная C не зависит от h . Это позволяет применить теорию из [19], [20] к исходному интегралу и получить (67). Для перехода к (68) следует сделать в интеграле (62) замену $\beta = qy - a_2/q_3$, $q = \sqrt[3]{2h/q_3}$, выбирая знак с учетом знака q_3 . Поскольку $|z| < h^{5/6}$, разложение (66) дает

$$q_0 + \frac{q_2^3}{3q_3^2} - \frac{q_1q_2}{q_3} = a_0 = a_0 + \langle b_0, z \rangle + O(z^2), \quad \frac{2q_1q_3 - q_2^2}{2^{2/3}q_3^{4/3}h^{2/3}} = \frac{2\langle b_1, z \rangle}{2^{2/3}\sqrt[3]{a_3}h^{2/3}} + \frac{O(z^2)}{h^{2/3}},$$

причем $O(z^2)h^{-2/3} = O(h)$, $O(z^2)h^{-1} = O(h^{2/3})$. Поэтому в $O(h^{5/6})$ -окрестности точки $z = 0$ можно заменить (68) на (69).

2. Доказательство п. 2 аналогично. Сначала, используя соображения из [19], [20], получим (70). Для того чтобы получить (71) при $q_4 > 0$, сделаем замену переменных $\beta = qy - q_3/a_4$, $q = \sqrt[4]{24h/q_4}$ в интеграле

$$\int_{\mathbb{R}} f(0, z) e^{i\Phi^{(4)}(\beta, z)/h} d\beta.$$

В случае, когда $q_4 < 0$, рассмотрим комплексно-сопряженный интеграл и заменой $q_j \rightarrow -q_j$ сведем доказательство (71) к предыдущему. Опять используя разложение для $q_j(z)$, найдем

$$\begin{aligned}
 q_0 - q_1q_3 + \frac{q_2q_3^2}{2q_4} - \frac{q_4^3}{8q_4^2} &= q_0(0) + \langle b_0, z \rangle + O(z^2), \\
 \frac{q_1 + q_3^3/3q_4^2 - q_2q_3/q_4}{h^{3/4}\sqrt[4]{q_4}} &= \frac{\langle b_1, z \rangle}{\sqrt[4]{a_4}h^{3/4}} + \frac{O(z^2)}{h^{3/4}}, \quad \frac{q_2 - q_3^2/2q_4}{\sqrt{h}q_4} = \frac{\langle b_2, z \rangle}{\sqrt{h}a_4} + \frac{O(z^2)}{\sqrt{h}}.
 \end{aligned}$$

Если предположить, что $|z| < h^{7/8}$, тогда $O(z^2)h^{-3/4} = O(h)$, $O(z^2)h^{-1/4} = O(h^{3/2})$, $O(z^2)h^{-1} = O(h^{5/4})$, и в $O(h^{5/6})$ -окрестности точки $z = 0$ получим (72).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Переход от (70) к (72) дает ошибку порядка $O(h^{3/4})$. Поэтому наибольшая ошибка следует из “укорачивания” амплитуды и фазы исходного интеграла.

Вернемся к доказательству теоремы. Применим лемму 8 к интегралу (61). Замена переменных $\beta = \psi - \psi^*$, $z = x - X^*$ в (61) дает интегралы (67) и (70) с $\Phi = \tau(\psi^* + \beta, X^* + z)$, $f = g(\tau, \psi)\sqrt{|\det(P, P_\psi)|}$. Далее вычислим коэффициенты a_j и b^0, b^1, b^2 в (66), используя (24) и вычисля производные от P_ψ , $X_{\psi\psi}$ и т. д. в фокальной точке (τ^*, ψ^*) . Дифференцируя равенства $\langle P, X_\psi \rangle = 0$ и $F(x, |p|) = \text{const}$

(см. условие 2) по ψ , получим

$$\begin{aligned}\langle P_\psi, X_\psi \rangle + \langle P, X_{\psi\psi} \rangle &= 0, & \langle P_{\psi\psi}, X_\psi \rangle + 2\langle P_\psi, X_{\psi\psi} \rangle + \langle P, X_{\psi\psi\psi} \rangle &= 0, \\ \langle P_{\psi\psi\psi}, X_\psi \rangle + 3\langle P_{\psi\psi}, X_{\psi\psi} \rangle + 3\langle P_\psi, X_{\psi\psi\psi} \rangle + \langle P, X_{\psi\psi\psi\psi} \rangle &= 0, \\ \langle P_\psi, P \rangle &= n(X)\langle n_x(X), X_\psi \rangle.\end{aligned}$$

Полагая $\psi = \psi^*$ и $\tau = \tau^*$, найдем

$$X_\psi^* = 0, \quad \langle P^*, X_{\psi\psi}^* \rangle = 0, \quad \langle P^*, X_{\psi\psi\psi}^* \rangle = -2\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi}^* \rangle \quad (73)$$

в случае “а”,

$$X_\psi^* = X_{\psi\psi}^* = 0, \quad \langle P^*, X_{\psi\psi\psi}^* \rangle = 0, \quad \langle P^*, X_{\psi\psi\psi\psi}^* \rangle = -3\langle P_\psi^*, X_{\psi\psi\psi}^* \rangle \quad (74)$$

в случае “б”,

$$\langle P_\psi^*, P^* \rangle = 0. \quad (75)$$

Заметим, что четырехмерный вектор $\begin{pmatrix} P_\psi \\ X_\psi \end{pmatrix}$ невырожден, поскольку $\dim \Lambda = 2$. Поэтому $P_\psi^* \neq 0$ и

$$|\det(P^*, P_\psi^*)| = |P^*| |P_\psi^*|. \quad (76)$$

Найдем коэффициенты a_j, b_j из разложения $\psi(\beta, z) = \tau(\psi^* + \beta, X^* + z)\tau^* + \Delta(\beta, z)$, где $\tau(\psi, x)$ – решение уравнения (24), для чего преобразуем (24), полагая $X^* = X(\tau^*, \psi^*)$, $X^1(\beta) = X(\psi^* + \beta, \tau^*) - X^*$, $\Delta = \tau - \tau^*$ и рассматривая функцию

$$Q(\beta, \Delta) = X(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta) - X^* - X^1(\beta) - X_\tau(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta)\Delta.$$

Легко проверить, что $Q|_{\Delta=0} = 0$, $Q_\tau|_{\Delta=0} = 0$ и, значит, $Q = O(\Delta^2)$. Подставим разложение $X(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta) = X^* + X^1(\beta) + \Delta X_\tau(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta)$ в уравнение (24) и учтем, что $\langle P, X_\tau \rangle = 1$. Получим

$$\Delta = \langle P(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta), x - X^* - X^1(\beta) - Q \rangle,$$

или

$$\Delta = \langle P(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta), z - X^1(\beta) \rangle + O(\Delta^2).$$

Далее,

$$P(\psi^* + \beta, \tau^* + \Delta) = P(\psi^* + \beta, \tau^*) + \Delta P_\tau(\psi^* + \beta, \tau^*) + O(\Delta^2)$$

и потому

$$\Delta = \langle P(\psi^* + \beta, \tau^*) + \Delta P_\tau(\psi^* + \beta, \tau^*), z - X^1(\beta) \rangle + O(\Delta^2),$$

или

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), z - X^1(\beta) \rangle}{1 - \langle (\partial P / \partial \tau)(\psi^* + \beta, \tau^*), z - X^1(\beta) \rangle} + O(\Delta^2) = \\ &= -\frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle}{1 + \langle (\partial P / \partial \tau)(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle} + \frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), z \rangle}{1 + \langle (\partial P / \partial \tau)(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle} - \\ &\quad - \frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle \langle (\partial P / \partial \tau)(\psi^* + \beta, \tau^*), z \rangle}{(1 + \langle (\partial P / \partial \tau)(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle)^2} + O(\Delta^2) + O(z^2).\end{aligned}$$

Используя (73) и (74), найдем

$$\begin{aligned} \langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle &= \left\langle P^*, \frac{\beta^3}{6} X_{\psi\psi\psi}^* + \frac{\beta^4}{24} X_{\psi\psi\psi\psi}^* \right\rangle + \\ &+ \left\langle P_{\psi}^*, \frac{\beta^3}{2} X_{\psi\psi}^* + \frac{\beta^4}{6} X_{\psi\psi\psi}^* \right\rangle + O(\beta^5) = \left\langle P_{\psi}^*, \frac{\beta^3}{6} X_{\psi\psi}^* + \frac{\beta^4}{24} X_{\psi\psi\psi}^* \right\rangle + O(\beta^5), \\ \left\langle \frac{\partial P}{\partial \tau}(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \right\rangle &= O(\beta^2). \end{aligned}$$

С помощью стандартных рассуждений метода итераций нетрудно понять, что для нахождения коэффициентов (66) в последней формуле достаточно сохранить члены

$$\begin{aligned} & - \frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), X^1(\beta) \rangle}{1 + O(\beta^2)} + \frac{\langle P(\psi^* + \beta, \tau^*), z \rangle}{1 + \beta^2 \langle P_{\tau}^*, X_{\psi\psi}^* \rangle / 2 + O(\beta^3)} = \\ & - \left\langle P_{\psi}^*, \frac{\beta^3}{6} X_{\psi\psi}^* + \frac{\beta^4}{24} X_{\psi\psi\psi}^* \right\rangle + O(\beta^5) + \\ & + \left\langle P^* + \beta P_{\psi}^* + \frac{\beta^2}{2} P_{\psi\psi}^* + O(\beta^3), z \right\rangle - \frac{\beta^2}{2} \langle P^*, z \rangle \langle P_{\tau}^*, X_{\psi\psi}^* \rangle. \end{aligned}$$

Метод итераций дает следующие формулы для искоемых коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tau^*, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -\langle P_{\psi}^*, X_{\psi\psi}^* \rangle, \quad a_4 = -\langle P_{\psi}^*, X_{\psi\psi\psi}^* \rangle, \\ b_0 &= \langle P^*, x - X^* \rangle, \quad b_1 = \langle P_{\psi}^*, x - X^* \rangle, \\ b_2 &= \langle P_{\psi\psi}^*, x - X^* \rangle - \langle P^*, x - X^* \rangle \langle P_{\tau}^*, X_{\psi\psi}^* \rangle \stackrel{\text{в случае "б"}}{=} \langle P_{\psi\psi}^*, x - X^* \rangle. \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя теперь эти коэффициенты в (69), (72) и соединяя их с (75) и (76), получим формулы из теоремы 5.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00973-а) и Archimedes Center for Modeling, Analysis and Computation (АСМАС), Crete, Greece (грант FP7-REGPDT-2009-1). С. Ю. Доброхотов признателен сотрудникам Institute for Molecules and Materials, Radboud University, Nijmegen, The Netherlands. С. Ю. Доброхотов и В. Е. Назайкинский признательны сотрудникам АСМАС и Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete, Crete, Greece за поддержку и гостеприимство.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, МГУ, М., 1965.
- [2] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [3] А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Лагранжесвы многообразия и метод канонического оператора Маслова*, Наука, М., 1978.
- [4] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [5] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, "Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **13**, ВИНТИ, М., 1979, 5–144.

- [6] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, *ТМФ*, **92**:2 (1992), 215–254.
- [7] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 792–796.
- [8] S. Dobrokhotov, A. Shafarevich, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221.
- [9] L. Hörmander, *Acta Math.*, **127**:1–2 (1971), 79–183.
- [10] S. Yu. Dobrokhotov, G. Makrakis, V. E. Nazaikinskii, *Fourier integrals and a new representation of Maslov’s canonical operator near caustics*, [arXiv: 1307.2292](https://arxiv.org/abs/1307.2292).
- [11] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
- [12] M. V. Berry, S. Klein, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **93**:6 (1996), 2614–2619.
- [13] J. J. Stamns, B. Spjelkavik, *Optica*, **30**:9 (1983), 1331–1358.
- [14] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, М., 1980.
- [15] Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, МГУ, М., 1982.
- [16] В. В. Кучеренко, *ТМФ*, **1**:3 (1969), 384–406.
- [17] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [18] С. Ю. Доброхотов, М. Руло, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 458–463; S. Yu. Dobrokhotov, M. Rouleux, *Asymptotic Anal.*, **74**:1–2 (2011), 33–73.
- [19] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [20] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, Наука, М., 1982.

Поступила в редакцию 24.12.2012,
после доработки 24.07.2013