Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Аникин, Либрации и расщепление нижних уровней оператора Шредингера с потенциалом типа двойной ямы в многомерном случае, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 193–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:26:45

© 2013 г.

А. Ю. Аникин*

ЛИБРАЦИИ И РАСЩЕПЛЕНИЕ НИЖНИХ УРОВНЕЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ДВОЙНОЙ ЯМЫ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Выведена асимптотическая формула для расщепления нижних собственных значений n -мерного оператора Шредингера с потенциалом с двумя симметричными ямами. В отличие от известной формулы из работы Маслова, Доброхотова и Колокольцова полученная формула имеет вид $A(h)e^{-S/h}(1 + o(1))$, где S – действие на периодической траектории (либрации) классической системы с перевернутым потенциалом, а не действие на двоякоасимптотической траектории. В такой записи главный член предэкспоненциального множителя принимает более элегантный вид. При выводе используется просто преобразование асимптотических формул из указанной работы без выхода за пределы классической механики.

Ключевые слова: туннельный эффект, оператор Шредингера, расщепление собственных значений, квантовая двойная яма, либрации.

DOI: 10.4213/tmf8463

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим оператор Шредингера

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

такой, что:

H1) $V(x) \geq 0$, $V \in C^\infty$ и $V(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;

H2) функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ четная по переменной x_1 ;

H3) существуют ровно два минимума $V(B_1) = V(B_2) = 0$ (симметричных относительно гиперплоскости $x_1 = 0$), причем матрица $V''_{xx}(B_i)$ имеет собственные значения $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, где

$$2\omega_1 < \min_{j \geq 2} \omega_j \quad (1)$$

(здесь $\omega_j > 0$);

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: anikin83@inbox.ru

Н4) лагранжева система $L = K - U$ со стандартной кинетической энергией K и “перевернутым” потенциалом $U = -V$ имеет единственную траекторию γ (называемую инстантоном), двоякоасимптотическую к неустойчивым равновесиям B_i ; при этом γ удовлетворяет двум условиям невырожденности:

а) траектория γ подходит к неустойчивому равновесию в неособом направлении (т. е. в направлении, отвечающем наименьшей частоте ω_1),

б) асимптотические многообразия неустойчивых равновесий (в фазовом пространстве) пересекаются по γ трансверсально.

Условие (1) носит технический характер и, вероятно, может быть снято. Оно играет роль при использовании специфических координат вблизи траектории γ .

Хорошо известно, что спектр оператора $\hat{H}$ дискретный. Также известно (см., например, работу [1]), что с точностью $O(h^\infty)$ нижняя часть спектра дважды вырожденна (состоит из дважды взятого спектра любой из двух ям по отдельности). На самом деле спектр не является вырожденным из-за туннельного эффекта, и разность между соответствующими собственными значениями (называемая расщеплением) экспоненциально мала (относительно h).

Асимптотическому поведению расщепления собственного значения было посвящено множество работ. Нас будет интересовать расщепление самой нижней пары собственных значений E_0, E_1 . Оказывается (см. работы [2]–[4] в одномерном случае и работы [5], [6] в многомерном случае), что $\lim_{h \rightarrow 0} h \ln(E_1 - E_0) = -S_0$, где S_0 – действие Мопертюи на всем инстантоне. Напомним, что действием Мопертюи на траектории $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с энергией E системы L в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$ называется функционал

$$\int_a^b \sqrt{2(E - U(x))} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle dt.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение. В дальнейшем по умолчанию “действие” будет всегда означать “действие Мопертюи”.

Далее, в работах [6] показано, что

$$E_1 - E_0 = A(h)e^{-S_0/h}, \quad (2)$$

где $A(h) \sim \sqrt{h}$. В одномерном случае главный член $A(h)$ был рассчитан в статьях [3], [7], [8]. Там же были получены аналогичные асимптотики для расщеплений последующих пар нижних собственных значений ($E_3 - E_2$, $E_5 - E_4$ и т. д.).

В многомерном случае к настоящему времени известен главный член $A(h)$ для самой нижней пары собственных значений [9]. В указанной работе главный член $A(h)$ выражался в терминах уравнений в вариациях вблизи инстантона. Отметим, что в работах [6], а также [10] получены весьма общие результаты (охватывающие случаи не только нижних пар собственных значений, но также таких пар собственных значений, которые стремятся к $E \neq 0$ при $h \rightarrow 0$). Однако такие полезные явные асимптотики для $A(h)$ в них не выписаны.

Асимптотика для $A(h)$ имеет громоздкий вид даже в одномерном случае. В одномерном случае можно сделать следующее интересное наблюдение. Формула (2) приобретает более изящный вид, если в показателе экспоненты вместо S_0 поставить

другое действие. Пусть S_h – половина действия на периодической траектории системы $L = K - U$ с энергией $E = -\omega h/2$, где $\omega = \sqrt{2V''(B_i)}$. Оказывается [3], [6] (см. также работу [11]), что

$$E_1 - E_0 = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \frac{\omega h}{\pi} e^{-S_h/h} (1 + o(1)). \quad (3)$$

В этой формуле ωh имеет размерность энергии, а остальные величины являются безразмерными. Отметим, что соотношение (3) напоминает следующую формулу Ландау–Лифшица [12] (см. также статьи [13]) для расщепления верхних собственных значений. Зафиксируем $E > 0$; пусть $n(h) \rightarrow \infty$ так, что $E_{n(h)}^+, E_{n(h)}^- \rightarrow E$ при $h \rightarrow 0$, тогда

$$E_{n(h)}^+ - E_{n(h)}^- = \frac{\omega_0 h}{\pi} e^{-S/h} (1 + o(1)), \quad (4)$$

где ω_0 – частота движения вдоль траектории системы $\bar{L} = K - V$ (с исходным потенциалом) с энергией E , а S – половина действия на периодической траектории системы $L = K - U$ с энергией $-E$.

Более того, в работах [6] (а также в статьях [3]) для пар нижних собственных значений (n фиксировано, а $h \rightarrow 0$) получена асимптотика вида

$$E_{2n+1} - E_{2n} = b_n \frac{\omega h}{\pi} e^{-S/h} (1 + o(1)),$$

где S – половина действия на периодической траектории системы $L = K - U$ с энергией $-E_{2n} = -\omega h(1 + 2n)/2 + o(h)$, а b_n – безразмерные константы (в частности, $b_0 = \sqrt{\pi/e}$). Оказалось, что $b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, что прекрасно согласуется с формулой (4).

В работе [14] был найден замечательный подход к обобщению равенства (3) на многомерный случай. Это обобщение не является очевидным: угадать окончательный ответ совсем не просто. Авторам работы [14] удалось сформулировать конечный результат, однако некоторые рассуждения были схематичными или не вполне строгими. Кроме того, в указанной работе рассматривался только двумерный случай. Обобщение некоторых конструкций на случай произвольного n требует дополнительных усилий. В настоящей работе дается полный вывод асимптотической формулы расщепления (теорема 1) в общем многомерном случае. При этом необходимо отметить, что многие идеи мы черпаем из работы [14].

Чтобы сформулировать теорему 1, мы изучим подробнее лагранжеву систему $L = K - U$ с перевернутым потенциалом. Можно показать, что в рамках предположений Н1–Н4 система $L = K - U$ имеет однопараметрическое семейство периодических движений γ_ε (параметром является энергия $E = -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало). Скорость γ_ε обращается в нуль дважды на периоде. Такие движения называются либрациями (bounce orbits или brake orbits). Существование либраций – не вполне очевидный факт (доказано в работах [15], [16] в несколько ином контексте). Кроме того, ясно, что эти периодические движения являются гиперболическими (имеют $n - 1$ положительных и $n - 1$ отрицательных показателей Флоке).

Семейство либраций удобно параметризовать величиной $J = S/2\pi$, где S – действие на периоде либрации. Обозначим через $H_0(J)$ энергию либрации с действием S , а через $\lambda_j(J)$, $2 \leq j \leq n$, – положительные показатели Флоке этой либрации.

ТЕОРЕМА 1. Разность двух наименьших собственных значений оператора $\hat{H}$, удовлетворяющего условиям Н1–Н4, имеет асимптотику

$$E_1 - E_0 = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \frac{\omega_1 h}{\pi} e^{-\bar{J}_h \pi / h} (1 + o(1)), \quad h \rightarrow 0,$$

где $\bar{J}_h$ находится из соотношения

$$H_0(\bar{J}_h) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^n \lambda_j(\bar{J}_h) = -(\omega_1 + \dots + \omega_n) \frac{h}{2}.$$

Чтобы проиллюстрировать эту теорему, рассмотрим случай разделения переменных. Пусть $V = V_1(x_1) + V_2(x_2)$, где V_1 – одномерная двойная яма (при этом выполнены предположения Н1–Н3), а V_2 – одномерная яма в начале координат. Легко видеть, что в данном случае расщепление будет совпадать с расщеплением нижних собственных значений одномерного оператора с потенциалом V_1 . Таким образом, имеет место расщепление (3). С другой стороны, $\lambda_2 = \omega_2$, поэтому теорема 1 дает тот же самый результат.

Идея доказательства теоремы 1 следующая. В конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся естественные координаты вблизи γ : координата s вдоль инстантона γ и “трансверсальные” координаты $q_2, \dots, q_n$. В этих координатах мы записываем уравнение в вариациях в окрестности инстантона γ . Пусть

$$\hat{H}^I = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{ds^2} + V_0 \quad (5)$$

– одномерный оператор Шредингера, где V_0 – значение потенциала V в точке инстантона с координатой s .

Применяя формулу расщепления вида (2) (с амплитудой $A(x)$ из работы [9]) для $\hat{H}$ и $\hat{H}^I$, получаем соотношение

$$E_1 - E_0 = \mathcal{T}(E_1^I - E_0^I)(1 + o(1)),$$

где E_0^I, E_1^I – нижние собственные значения оператора $\hat{H}^I$ (напомним, что для любого числа степеней свободы $A(h) \sim \sqrt{h}$).

Число $\mathcal{T}$ выражается в терминах краевой задачи для уравнения в вариациях в окрестности инстантона γ . В статье [14] показано, что в двумерном случае $\mathcal{T}$ можно интерпретировать как квадратный корень из амплитуды рассеяния.

Далее, применяя соотношение (3), получим

$$E_1 - E_0 = \mathcal{T} \sqrt{\frac{\pi}{e}} \frac{\omega_1 h}{\pi} e^{-S_h / h} (1 + o(1)), \quad (6)$$

где S_h – действие на либрации системы $L = T - U$ с энергией $-h\omega_1/2$. Здесь также используется факт близости (с погрешностью $O(h^{1+\epsilon})$, где $\epsilon > 0$) действий на либрациях n -мерной и соответствующей одномерной лагранжевых систем с равными энергиями [17].

Затем мы находим асимптотику суммы всех положительных показателей Флоке либрации с большим периодом (где возникает та же самая величина $\mathcal{T}$). Далее мы

пишем асимптотику для $S_h - \pi \bar{J}_h$ и после подстановки в (6) получаем требуемое утверждение.

Таким образом, при выводе теоремы 1 используются известные результаты об энергетическом расщеплении [9]. Важно отметить, что мы не выходим при этом за рамки классической механики.

2. СПРЯМЛЯЮЩИЕ КООРДИНАТЫ

В настоящем разделе мы изучаем лагранжеву систему $L = K - U$. Введем некоторые координаты в окрестности инстантона γ . В этих координатах записывается уравнение в вариациях вблизи γ .

Пусть

$$x = r(s), \quad -l \leq s \leq l, \quad r(-l) = B_1, \quad r(l) = B_2,$$

– натуральная параметризация инстантона γ относительно евклидовой метрики, а $e_j(s)$, $j = 1, \dots, n$, – репер Френе. Из соображений симметрии ясно, что $y_0 = r(0)$ лежит на гиперплоскости $x_1 = 0$. Сделаем замену координат $x \mapsto s, q_2, \dots, q_n$ по формуле

$$x = r(s) + \sum_{j=2}^n q_j e_j(s).$$

Пусть $k_j(s)$, $j = 1, \dots, n-1$, – кривизны траектории γ (k_1 – кривизна, k_2 – кручение, взятое с обратным знаком, в случае $n = 3$). Из гипотезы НЗ следует, что все $k_j \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \pm l$. Пусть P, Q_j – импульсы, канонически сопряженные s, q_j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Кинетическая энергия в координатах s, q_j, P, Q_j имеет вид*

$$K = \frac{P^2}{2(1 - q_2 k_1)^2} + \sum_{j=2}^n \left(P Q_j \mu_j + \frac{Q_j^2}{2} \right) + O(q^2 + Q^2)^{3/2},$$

где $\mu_2 = -q_3 k_2$ при $n > 2$, $\mu_2 = 0$ при $n \leq 2$,

$$\mu_j = q_{j-1} k_{j-1} - q_{j+1} k_j, \quad j = 3, \dots, n-1,$$

и $\mu_n = q_{n-1} k_{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул Френе следует, что

$$\dot{r} = \dot{s}(1 - q_2 k_1) e_1 + \sum_{j=2}^n (\dot{q}_j + \dot{s} \mu_j) e_j.$$

Поэтому

$$K = \frac{1}{2} \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \left[\dot{s}^2 (1 - q_2 k_1)^2 + \sum_{j=2}^n (\dot{q}_j + \dot{s} \mu_j)^2 \right],$$

следовательно,

$$P = \dot{s} \left((1 - q_2 k_1)^2 + \sum_{j=2}^n \mu_j^2 \right) + \sum_{j=2}^n \dot{q}_j \mu_j, \quad Q_j = \dot{q}_j + \dot{s} \mu_j. \quad (7)$$

Преобразование Лежандра (выражаем производные $\dot{s}$ и $\dot{q}_j$ из соотношений (7) и подставляем в $K - \dot{s}P - \sum_{j=2}^n \dot{q}_j Q_j$) дает требуемое выражение для кинетической энергии в фазовом пространстве. Предложение 1 доказано.

Пусть

$$U = U_0(s) + \sum_{j=2}^n U_j(s)q_j + \frac{1}{2} \sum_{2 \leq i, j \leq n} U_{ij}(s)q_i q_j + O(q^3).$$

Поскольку $q_j = Q_j = 0$ всюду на γ , то $U_2 = 2k_1 U_0$ и $U_j = 0$ при $j \geq 3$. Таким образом, функция Гамильтона нашей системы имеет вид

$$H = \frac{P^2}{2}(1 + 2k_1 q_2 + 3k_1^2 q_2^2) + \sum_{j=2}^n \left(P Q_j \mu_j + \frac{Q_j^2}{2} \right) + U_0(s)(1 + 2k_1 q_2) + \frac{1}{2} \sum_{2 \leq i, j \leq n} U_{ij}(s)q_i q_j + O(q^2 + Q^2)^{3/2}.$$

В новых координатах инстантон γ задается в виде $s = s_0(t)$, $P = P_0(t)$, $q_j = Q_j = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнение в вариациях вблизи γ имеет вид $\dot{\xi} = A\xi$ (мы принимаем следующий порядок переменных: $s, P, q_2, \dots, q_n, Q_2, \dots, Q_n$), где

$$A = \begin{pmatrix} \Omega_0 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & R & E \\ \Lambda_2 & \Omega & R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U''(s_0(t)) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Здесь $E, \Omega, R \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, E – единичная матрица и $\Omega = (\omega_{ij})$, $R = (r_{ij})$, где

$$\omega_{ij} = -U_{i+1, j+1} - 3\sigma_1^2 \delta_{i1} \delta_{j1}, \quad r_{ij} = \delta_{i, j+1} \sigma_i - \delta_{i, j-1} \sigma_j, \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

(δ_{ij} – символ Кронекера), а $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{2 \times (n-1)}$, $\Lambda_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 2}$ задаются равенствами

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ -2\sigma_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -2\sigma_0 & 0 & \dots & 0 \\ -2\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T,$$

в которых $\sigma_0(t) = k_1(s_0(t))U'(s_0(t))$ и $\sigma_j(t) = k_j(s_0(t))P_0(t)$ при $1 \leq j \leq n-1$.

Доказательство получается прямой проверкой.

Теперь в системе Гамильтона сделаем изоэнергетическую редукцию к $H = 0$. Для этого выразим $P = G(s, q, Q)$ из уравнения $H = 0$. Получим неавтономную систему с $n-1$ степенями свободы:

$$\frac{dq_j}{ds} = \frac{H'_{Q_j}}{H'_P}, \quad \frac{dQ_j}{ds} = -\frac{H'_{q_j}}{H'_P}. \quad (8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Уравнение в вариациях системы (8) вблизи инстантона γ (вблизи $q = Q = 0$) после замены независимой переменной $s = s_0(t)$ принимает вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \check{A}\xi, \quad \check{A} = \begin{pmatrix} R & E \\ \Omega & R \end{pmatrix} \quad (9)$$

(здесь порядок переменных $q_2, \dots, q_n, Q_2, \dots, Q_n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $H'_P = P + O(q^2 + Q^2)^{1/2}$. Пусть $G_0(s) = G(s, 0, 0)$, тогда

$$G = G_0 - \sum_{j=2}^n \left(q_j \frac{H'_{q_j}}{H'_P} \Big|_{\gamma} + Q_j \frac{H'_{Q_j}}{H'_P} \Big|_{\gamma} \right) + O(q^2 + Q^2),$$

и ясно, что $G = G_0 + O(q^2 + Q^2)$. Поэтому из (8) получаем

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{G_0} \tilde{A} \xi, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{R} & E \\ \Omega & \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где матрица $\tilde{R}$ получается из R заменой P_0 на $G_0(s)$ и всех $k_j(s_0(t))$ на $k_j(s)$. Покажем, как выводится уравнение для $\dot{Q}_2$ (вывод остальных уравнений еще более простой). Запишем соответствующее уравнение системы Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= -P^2 k_1 - 3P^2 k_1^2 q_2 - PQ_3 k_2 - 2U_0 k_1 - \sum_{j=2}^n U_{2j} q_j + O(q^2 + Q^2) = \\ &= -k_1(G_0^2 + 2U_0) - 3G_0^2 k_1^2 q_2 - G_0 k_2 Q_3 - \sum_{j=2}^n U_{2j} q_j + O(q^2 + Q^2) = \\ &= -3G_0^2 k_1^2 q_2 - G_0 k_2 Q_3 - \sum_{j=2}^n U_{2j} q_j + O(q^2 + Q^2), \end{aligned}$$

что дает соответствующее уравнение (10). После замены независимой переменной $s = s_0(t)$ система (10) приводится к виду (9).

3. РАСЩЕПЛЕНИЕ В ТЕРМИНАХ УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ

Цель настоящего раздела – переписать в удобном для нас виде асимптотику расщепления нижнего энергетического уровня из работ [9]. Основным результатом является теорема 2.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения в вариациях:

$$\dot{\Xi} = A\Xi, \quad \Xi_q(0) = E, \quad \Xi_q(-\infty) = 0. \quad (11)$$

Здесь $\Xi \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, а $\Xi_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, составленная из строк матрицы Ξ с номерами $1, 3, 4, \dots, n, n+1$ (т.е. строк с номерами, соответствующими координатам). Аналогично $\Xi_Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, составленная из остальных строк матрицы Ξ (т.е. строк, соответствующих импульсам). Задача (11) имеет единственное решение, поскольку асимптотические многообразия положений равновесия пересекаются трансверсально с многообразиями $\{s = 0, q_j = \delta_{ij}\}$.

Положим

$$\beta_n = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} \det \Xi_q(t).$$

Далее, пусть $\check{\Xi}_Q \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ получается из матрицы Ξ_Q удалением первого столбца и первой строки. В работах [9] получено следующее уточнение формулы (2):

$$E_1 - E_0 = 2\sqrt{\frac{\hbar}{\pi}} \beta_n (\det \check{\Xi}_Q(0))^{-1/2} \sqrt{\omega_1 \dots \omega_n} |\dot{s}_0(0)| e^{-S_0/\hbar} (1 + o(1)). \quad (12)$$

Рассмотрим, как и выше, одномерный оператор (5), $V_0 = -U_0$, удовлетворяющий условиям Н1–Н3. Из соотношения (12) следует, что расщепление нижних собственных значений оператора $\hat{H}^I$ описывается формулой

$$E_1^I - E_0^I = 2\sqrt{\frac{\hbar}{\pi}}\beta_1\sqrt{\omega_1}|\dot{s}_0(0)|e^{-S_0/\hbar}(1 + o(1)),$$

откуда

$$E_1 - E_0 = \mathcal{T}(E_1^I - E_0^I), \quad \mathcal{T} = \beta_n\beta_1^{-1}(\det \check{\Xi}_Q(0))^{-1/2}\sqrt{\omega_2 \dots \omega_n}. \quad (13)$$

Рассмотрим краевую задачу, аналогичную (11), но теперь для уравнения в вариациях (9):

$$\dot{\Theta} = \check{A}\Theta, \quad \Theta_q(0) = E, \quad \Theta_q(-\infty) = 0, \quad (14)$$

где $\Theta \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times (n-1)}$, матрицы $\Theta_q, \Theta_Q \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, матрица Θ_q состоит из первых $n-1$ строк матрицы Θ , а Θ_Q – из остальных строк матрицы Θ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть Θ – решение задачи (14), положим

$$a_n = \det \Theta_Q(0), \quad \check{\beta}_n = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\omega_2 + \dots + \omega_n)t} \det \Theta_q(t).$$

Тогда имеет место асимптотическое равенство (6), причем

$$\mathcal{T} = \check{\beta}_n a_n^{-1/2} \sqrt{\omega_2 \dots \omega_n}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S_h^I половину действия на либрации одномерной системы $L = K - U_0$ с энергией $-\omega h/2$. В работе [17] было доказано, что $S_h - S_h^I = O(h^{1+\epsilon})$ для некоторого $\epsilon > 0$ (эта оценка была получена для $n = 2$, однако все рассуждения легко могут быть перенесены на случай произвольного n). После подстановки соотношения (3) в (13) получаем формулу (6).

Нам остается выразить $\mathcal{T}$ в терминах задачи (14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\Theta = (\theta_{ij})|_{i=3; j=2}^{2n; n}$ – решение задачи (14). Тогда матрица $\Xi = (\xi_{ij})|_{i=1; j=1}^{2n; n}$ такая, что

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= \theta_{ij}, & i &= 3, \dots, 2n, & j &= 2, \dots, n, \\ \xi_{i1} &= 0, & i &= 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\xi_{11} = \frac{\dot{s}_0(t)}{\dot{s}_0(0)}, \quad \xi_{21} = \frac{\ddot{s}_0(t)}{\dot{s}_0(0)}, \quad \xi_{1j} = \dot{s}_0(t)\varphi_j(t), \quad \xi_{2j} = -U'_0(\dot{s}_0(t))\varphi_j(t), \quad (17)$$

$$\varphi_j(t) = 2 \int_0^t k_1(s_0(t))\theta_{3j}(t) dt, \quad j = 2, \dots, n, \quad (18)$$

является решением задачи (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения задачи (11) можно записать в виде

$$\dot{\xi}_{11} = \xi_{21}, \quad \dot{\xi}_{21} = -U''_0 \xi_{11}, \quad \xi_{11}U'_0 + \xi_{21}P_0 = 0, \quad (19)$$

$$\dot{\xi}_{1j} = \xi_{2j} + 2k_1P_0\theta_{3j}, \quad \dot{\xi}_{2j} = -U''_0 \xi_{1j} - 2k_1P_0\theta_{3j}, \quad \xi_{1j}U'_0 + \xi_{2j}P_0 = 0 \quad (20)$$

при $j \geq 2$; здесь $U'_0 = U'_0(s_0(t))$, $U''_0 = U''_0(s_0(t))$, $P_0 = P_0(t)$. Оставшиеся уравнения удовлетворяются автоматически, поскольку Θ – решение задачи (14).

Ясно, что функции ξ_{11} , ξ_{21} из (17) удовлетворяют уравнениям (19) и граничным условиям. Найдем функцию $\xi_{1j} = \dot{s}_0(t)\varphi_j(t)$, удовлетворяющую уравнениям (19) и граничным условиям. Тогда из последнего уравнения в (20) имеем $\xi_{2j} = -U'_0\varphi_j(t)$. После подстановки ξ_{1j} , ξ_{2j} каждое из первых двух уравнений в (20) примет вид $\dot{\varphi}_j = 2k_1\theta_{3j}$. Чтобы удовлетворить граничным условиям, возьмем φ_j в виде (18). Предложение 4 доказано.

Итак, используя предложение 4, строим матрицу Ξ , удовлетворяющую уравнению (11). Поскольку

$$\det \Xi_q(t) = \frac{\dot{s}_0(t)}{\dot{s}_0(0)} \det \Theta_q(t),$$

мы имеем $\check{\beta}_n = \beta_n\beta_1^{-1}$. Наконец, из того что $\check{\Xi}_Q = \Theta_Q$, получаем равенство (15). Теорема 2 доказана.

4. АСИМПТОТИКА СУММЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФЛОКЕ

В настоящем разделе доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda_j(t) > 0$, $j = 2, \dots, n$, – показатели Флоке либрации с периодом $4t$. Тогда

$$\sum_{j=2}^n \lambda_j(t) = \sum_{j=2}^n \omega_j - \frac{\ln \mathcal{T}}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Пусть $W_{\pm}^1$ (соответственно $W_{\pm}^2$) – устойчивое (неустойчивое) асимптотическое многообразие равновесия B_1 (соответственно B_2). Обозначим через $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ или, проще, через $\langle u \rangle_k$ объем k -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $u_1, \dots, u_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть Σ_0 – $(n-1)$ -мерная поверхность, лежащая в $W_{\pm}^2$ и пересекающая γ трансверсально в точке $s_0(0)$. Пусть $\Sigma_t = g^t\Sigma_0$, где g^t – фазовый поток. Пусть $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_{s_0(0)}\Sigma_0$ и $u_j = dg^t|_{s_0(0)}v_j$. Тогда

$$\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle = e^{(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и ниже для упрощения обозначений мы пишем $T_{s_0(t)}\Sigma_0$, где под $s_0(t)$ понимается точка фазового пространства $s = s_0(t)$, $P = P_0(t)$, $q_j = Q_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 5 следует из того, что либрация с большим периодом близка к γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Справедливо равенство

$$\check{A}(-t) = \begin{pmatrix} R(-t) & E \\ \Omega(t) & R(-t) \end{pmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Theta(t)$ – решение уравнения (9), тогда матрица $\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_q \\ \tilde{\Theta}_Q \end{pmatrix}$, где $\tilde{\Theta}_q(t) = \Theta_q(-t)$ и $\tilde{\Theta}_Q(t) = -\Theta_Q(-t)$, также является решением уравнения (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $R(t) = -R(-t)$, поскольку $k_j(s) = -k_j(-s)$ при $j \geq 2$. Дальнейшее доказательство проводится прямой подстановкой.

Ясно, что столбцы матрицы $[\Theta \tilde{\Theta}]$ являются линейно независимыми решениями уравнения (9). Вронскиан $\mathcal{W}(t) = \det[\Theta \tilde{\Theta}]$ не зависит от t , следовательно, он равен $\mathcal{W}(0) = 2^{n-1}a_n$.

Поскольку $\Theta_q(-\infty) = 0$ и $\tilde{\Theta}_q(+\infty) = 0$, столбцы матрицы $\Theta(0)$ являются координатами векторов $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_{s_0(0)}W_-^1$, а столбцы матрицы $\tilde{\Theta}(0)$ – координатами векторов $u_1, \dots, u_{n-1} \in T_{s_0(0)}W_+^2$. Аналогично столбцы матрицы $\Theta(-t)$ (матрицы $\tilde{\Theta}(-t)$) суть координаты векторов $dg^{-t}v_j \in T_{s_0(-t)}W_-^1$ (соответственно векторов $dg^{-t}u_j \in T_{s_0(-t)}W_+^2$). Таким образом, $\mathcal{W}(-t)$ есть объем $2(n-1)$ -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $dg^{-t}v_j, dg^{-t}u_j$.

Пусть π – каноническая проекция из фазового пространства в конфигурационное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Следующие асимптотики имеют место при $t \rightarrow +\infty$:

$$\langle dg^{-t}v \rangle_{n-1} = \langle \pi dg^{-t}v \rangle_{n-1} \prod_{j=2}^n \sqrt{1 + \omega_j^2} (1 + o(1)), \quad (21)$$

$$\langle dg^{-t}v, dg^{-t}u \rangle_{2(n-1)} = \langle dg^{-t}v \rangle_{n-1} \langle dg^{-t}u \rangle_{n-1} \prod_{j=2}^n \frac{2\omega_j}{1 + \omega_j^2} (1 + o(1)). \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Это предложение представляет собой упражнение по многомерной аналитической геометрии. Основная идея состоит в том, что в окрестности точек B_i легко вычислить наклон асимптотических многообразий к конфигурационному пространству. Например, в одномерном случае угол между сепаратрисой и конфигурационным пространством равен $\arctg \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (21). Линеаризуем систему вблизи B_1 :

$$H_2 = \frac{P^2}{2} - \frac{\omega_1^2(s+l)^2}{2} + \sum_{j=2}^n \frac{Q_j^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n U_{ij} q_i q_j.$$

Всегда можно считать, что

$$H_2 = \frac{P^2}{2} - \frac{\omega_1^2 s^2}{2} + \sum_{j=2}^n \left(\frac{Q_j^2}{2} - \frac{\omega_j^2 q_j^2}{2} \right),$$

этого можно достичь с помощью поворота и сдвига конфигурационного пространства. Асимптотические многообразия линеаризованной системы – это две плоскости

$$\Pi_{\pm}^1 = \{P = \pm \omega_1 s; Q_j = \pm \omega_j q_j\}.$$

Ясно, что $T_{s_0(-t)}W_-^1 \approx \Pi_-^1$ для $t \gg 1$. Поэтому векторы $dg^{-t}v_j$ стремятся быть параллельными плоскости $\{Q_j = -\omega_j q_j\}$ (поскольку линейная оболочка векторов $dg^{-t}v_j$ трансверсальна инстантону). Объем $(n-1)$ -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $dg^{-t}v_j$, после проектирования на конфигурационное многообразие $P = Q_j = 0$ умножается на $\left(\prod_{j=2}^n \sqrt{1 + \omega_j^2} \right)^{-1}$. Отсюда получаем (21).

Докажем равенство (22). Из условия Н4б следует, что $T_{s_0(-t)}W_+^2$ трансверсальна многообразию W_-^1 . В соответствии с λ -леммой $T_{s_0(-t)}W_+^2$ стремится быть параллельной $T_{s_0(t)}W_+^1$ при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому векторы $dg^{-t}u_j$ стремятся лечь на плоскость $\{Q_j = \omega_j q_j\}$ (мы вновь используем, что линейная оболочка трансверсальна инстантону). Отсюда легко получается формула (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По предложению 5 при $t \rightarrow +\infty$

$$\langle dg^{-t}v \rangle_{n-1} = \langle v \rangle_{n-1} e^{-t\lambda} (1 + o(1)), \quad \langle dg^{-t}u \rangle_{n-1} = \langle u \rangle_{n-1} e^{t\lambda} (1 + o(1)),$$

где $\lambda = \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Поскольку $\langle v \rangle_{n-1} = \langle u \rangle_{n-1}$, по предложению 7 мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(-t) &= \langle dg^{-t}v, dg^{-t}u \rangle_{2(n-1)} = \langle dg^{-t}v \rangle_{n-1}^2 e^{2t\lambda} \prod_{j=2}^n \frac{2\omega_j}{1 + \omega_j^2} (1 + o(1)) = \\ &= \langle \pi dg^{-t}v \rangle_{n-1}^2 e^{2t\lambda} 2^{n-1} \omega (1 + o(1)) = (\det \Theta_q(-t) e^{t\lambda})^2 2^{n-1} \omega (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\omega = \omega_2 \dots \omega_n$. Сравнивая с $\mathcal{W}(0) = 2^{n-1} a_n$, видим, что

$$\sqrt{a_n} = \det \Theta_q(-t) e^{t\lambda} \sqrt{\omega} (1 + o(1))$$

или

$$e^{t\lambda} = \exp\left(t \sum_{j=2}^n \omega_j\right) T^{-1} (1 + o(1)).$$

Отсюда следует теорема 3.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеет место равенство*

$$H'_0(J) = \frac{2\pi}{T(J)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы доказываем это предложение, чтобы избежать обсуждения нормальной формы гамильтоновой системы в окрестности семейства периодических решений (см. работу [18]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить следующий факт. Пусть $x_\varepsilon(t)$ – семейство периодических траекторий с энергией ε , действием $S(\varepsilon)$ и периодом T_ε (где $|\varepsilon| < \varepsilon_0$), тогда

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = T_0.$$

Пусть $x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon y(t) + O(\varepsilon^2)$ и $T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon \tau + O(\varepsilon^2)$. Из $x_0(0) = x_0(T_0)$ и $x_\varepsilon(0) = x_\varepsilon(T_\varepsilon)$ следует, что $\tau \dot{x}_0(T_0) = -y(t)|_0^{T_0}$.

Обозначая через $S^{\mathcal{H}}(\varepsilon) = \int_0^{T_\varepsilon} L(\dot{x}_\varepsilon, x_\varepsilon) dt$ действие по Гамильтону на либрации с энергией ε , видим, что

$$S^{\mathcal{H}}(\varepsilon) = S^{\mathcal{H}}(0) + \varepsilon \tau \langle \dot{x}_0, \dot{x}_0 \rangle \Big|_{t=T_0} + \varepsilon \int_0^{T_0} (\langle \dot{x}_0, dy \rangle + \langle y, d\dot{x}_0 \rangle) + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда $S^{\mathcal{H}}(\varepsilon) = S^{\mathcal{H}}(0) + O(\varepsilon^2)$. В силу соотношения $S(\varepsilon) - S^{\mathcal{H}}(\varepsilon) = \varepsilon T_\varepsilon$ мы имеем $S(\varepsilon) - S_0 = \varepsilon T_0 + O(\varepsilon^2)$. Предложение 8 доказано.

Теперь легко получить доказательство теоремы 1. Действительно, из теоремы 2 следует, что

$$E_1 - E_0 = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \frac{h\omega_1}{\pi} T e^{-J_h \pi/h} (1 + o(1)), \quad H_0(J_h) = -\frac{h\omega_1}{2}, \quad (23)$$

а из теоремы 3 следует, что

$$H_0(\bar{J}_h) - \frac{h}{2} \left(\sum_{j=2}^n \omega_j - 4 \frac{\ln T}{T(\bar{J}_h)} \right) = -\frac{h}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j + O(h^{1+\epsilon}).$$

По формуле Тейлора

$$H_0(\bar{J}_h) = H_0(J_h) + \frac{2\pi}{T(J_h)} (\bar{J}_h - J_h) + O(h^{1+\epsilon}),$$

поэтому

$$\frac{2\pi}{T(J_h)} (\bar{J}_h - J_h) + \frac{2h \ln T}{T(J_h)} = O(h^{1+\epsilon})$$

или $J_h = \bar{J}_h + h \ln T / \pi + O(h^{1+\epsilon/2})$. Подставляя последнюю формулу в (23), получаем утверждение теоремы 1.

Благодарности. Автор выражает благодарность С. Ю. Доброхотову, Д. В. Трещеву и С. В. Болотину за полезные дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00441) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2519.2012.1).

Список литературы

- [1] B. Simon, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **38:3** (1983), 295–308.
- [2] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **120:3** (1977), 429–458; E. Gildener, A. Patrascioiu, *Phys. Rev. D*, **16:2** (1977), 423–430; Erratum, **16:2** (1977), 3616–3616; S. Coleman, “The uses of instantons”, *Proceedings International School of Physics* (Erice, Sicily, 1977), ed. A. Zichichi, Plenum, New York, 1979, 805–916.
- [3] E. Harrell, *Commun. Math. Phys.*, **60:1** (1978), 73–95; **75:3** (1980), 239–261.
- [4] G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, E. Scoppola, *Commun. Math. Phys.*, **80:2** (1981), 223–254; J. M. Combes, P. Duclos, R. Seiler, *J. Funct. Anal.*, **52:2** (1983), 257–301.
- [5] В. П. Маслов, *Тр. МИАН*, **163** (1984), 150–180; B. Simon, *Ann. Math. (2)*, **120:1** (1984), 89–118.
- [6] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Commun. Part. Differ. Equ.*, **9:4** (1984), 337–408; *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **42:2** (1985), 127–212.
- [7] С. Ю. Славянов, *Дифференц. уравнения*, **5:2** (1969), 313–325.
- [8] Т. Ф. Панкратова, *Докл. АН СССР*, **276:4** (1984), 795–798.
- [9] С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцов, В. П. Маслов, *ТМФ*, **87:3** (1991), 323–375; С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцов, *ТМФ*, **94:3** (1993), 426–434.
- [10] A. Martinez, *J. Math. Pures App. (9)*, **66:2** (1987), 195–215; *Bull. Soc. Math. France*, **116:2** (1988), 199–229.
- [11] С. А. Альбеверио, С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семенов, *ТМФ*, **138:1** (2004), 116–126.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.

- [13] М. В. Федорюк, *Матем. сб.*, **68(110)**:1 (1965), 81–110; А. Г. Аленицын, *Дифференц. уравнения*, **18**:11 (1982), 1971–1975.
- [14] J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, E. S. Semenov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:2 (2006), 167–180.
- [15] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Эдиториал УРСС, М., 2002.
- [16] С. В. Болотин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **6** (1978), 72–77.
- [17] A. Yu. Anikin, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:1 (2013), 1–10.
- [18] А. Д. Брюно, *УМН*, **44**:2(266) (1989), 49–78.

Поступила в редакцию 24.12.2012