Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Соколов, Классификация постоянных решений ассоциативного уравнения Янга–Бакстера на алгебре Mat_3 , *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 385–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:13:30

© 2013 г.

В. В. Соколов*

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ АССОЦИАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА НА АЛГЕБРЕ Mat_3

Найдены все неэквивалентные постоянные решения классического ассоциативного уравнения Янга–Бакстера для алгебры Mat_3 . Новые примеры, найденные при классификации, порождают соответствующие скобки Пуассона на следах, двойные скобки Пуассона на свободной ассоциативной алгебре с тремя образующими и антифробениусовы ассоциативные алгебры.

Ключевые слова: ассоциативное уравнение Янга–Бакстера, постоянные решения, классификация.

DOI: 10.4213/tmf8467

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим кососимметричные решения ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (другое название – уравнение Рота–Бакстера) [1], [2]

$$r^{23}r^{12} + r^{31}r^{23} + r^{12}r^{31} = 0, \quad r^{12} = -r^{21}. \quad (1.1)$$

Здесь r – линейный оператор на $V \otimes V$, где V – это n -мерное векторное пространство, все операторы в уравнении (1.1) действуют на $V \otimes V \otimes V$, и r^{ij} означает оператор r , действующий на произведении i -й и j -й компонент. Пусть e_α , $\alpha = 1, \dots, n$, – базис в пространстве V . Если

$$r(e_\alpha \otimes e_\beta) = r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} e_\sigma \otimes e_\epsilon,$$

то уравнение (1.1) эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений:

$$r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} = -r_{\beta\alpha}^{\epsilon\sigma}, \quad (1.2)$$

$$r_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma} r_{\sigma\tau}^{\mu\nu} + r_{\beta\tau}^{\mu\sigma} r_{\sigma\alpha}^{\nu\lambda} + r_{\tau\alpha}^{\nu\sigma} r_{\sigma\beta}^{\lambda\mu} = 0. \quad (1.3)$$

Данную систему можно интерпретировать как уравнение относительно линейного оператора $r: \text{Mat}_n \rightarrow \text{Mat}_n$ или элемента из $\text{Mat}_n \otimes \text{Mat}_n$. Поэтому ее иногда называют уравнением Янга–Бакстера на ассоциативной алгебре Mat_n , состоящей из всех матриц размера $n \times n$.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: sokolov@itp.ac.ru

Коэффициенты тензора r преобразуются при замене базиса e_α стандартным образом:

$$r_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow g_\alpha^\lambda g_\beta^\mu h_\nu^\gamma h_\epsilon^\sigma r_{\lambda\mu}^{\nu\epsilon}, \quad (1.4)$$

где $g_\alpha^\beta h_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$.

Легко проверить, что система алгебраических уравнений (1.2), (1.3) инвариантна относительно инволюции

$$T: r_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \rightarrow r_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}. \quad (1.5)$$

Мы называем два решения системы (1.2), (1.3) *двойственными*, если они связаны инволюцией (1.5).

Известно, что всякое решение уравнения (1.1) определяет:

- квадратичную скобку Пуассона на следах (другое название – неабелева скобка Пуассона)

$$\{x_{i,\alpha}^j, x_{i',\beta}^{j'}\} = r_{\alpha\beta}^{\gamma\epsilon} x_{i,\gamma}^{j'} x_{i',\epsilon}^j, \quad (1.6)$$

где $x_{i,\alpha}^j$ – элементы матриц x_α , $\alpha = 1, \dots, n$;

- двойную скобку Пуассона [3], [4]

$$\{x_\alpha, x_\beta\} = r_{\alpha\beta}^{uv} x_u \otimes x_v \quad (1.7)$$

на свободной ассоциативной алгебре $A = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_m \rangle$;

- *антифробениусову* ассоциативную подалгебру в Mat_n [5], [6].

Скобки Пуассона на следах определяют гамильтоновы структуры для обыкновенных дифференциальных уравнений с матричными неизвестными [6], [7].

Двойные скобки Пуассона, введенные недавно М. Ван ден Бергом, являются одним из понятий некоммутативной симплектической геометрии. По определению двойная скобка Пуассона на ассоциативной алгебре A – это $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\{\cdot, \cdot\}: A \times A \mapsto A \otimes A$, удовлетворяющее определенным условиям, похожим на условия для обычной скобки Пуассона.

Некоторый класс решений уравнения (1.1) порождается антифробениусовыми ассоциативными алгебрами $(n \times n)$ -матриц с k нулевыми строками (или столбцами), где k – любой делитель n . Напомним, что *ассоциативная антифробениусова алгебра* – это алгебра $\mathcal{J}$ (не обязательно с единицей), обладающая невырожденной антисимметричной билинейной формой $(\cdot, \cdot)$ такой, что $(x, yz) + (y, zx) + (z, xy) = 0$ для всех $x, y, z \in \mathcal{J}$.

Рассмотрим конструкцию, введенную в работе [6]. Пусть $\mathcal{J}$ – это p -мерная ассоциативная антифробениусова подалгебра в Mat_n с базисом $y_i = (y_{\gamma,i}^\alpha)$, где $i = 1, \dots, p$ и $\alpha, \gamma = 1, \dots, n$. Пусть $G = (g_{ij})$ – матрица формы $(\cdot, \cdot)$. Тогда тензор $r_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = g^{ij} y_{\gamma,i}^\alpha y_{\delta,j}^\beta$, где $G^{-1} = (g^{ij})$, удовлетворяет уравнениям (1.2), (1.3).

В простейшем случае $n = 2$ все решения системы (1.2), (1.3) с точностью до преобразований (1.4) и растяжений $r \rightarrow \lambda r$ перечислены в статьях [4], [5]. А именно, существуют следующие два решения.

СЛУЧАЙ 1. Решение $r_{22}^{21} = -r_{22}^{12} = 1$.

СЛУЧАЙ 2. Решение $r_{21}^{22} = -r_{12}^{22} = 1$.

Мы приводим здесь только ненулевые компоненты тензора r . Эти двойственные решения порождаются (2×2) -матрицами с одной ненулевой строкой и одним ненулевым столбцом для случаев 1 и 2 соответственно.

Два решения называются *эквивалентными*, если они связаны преобразованиями (1.4) или растяжением $r \rightarrow \lambda r$. Основная цель настоящей статьи – классификация всех решений системы (1.2), (1.3) в случае $n = 3$ с точностью до эквивалентности. Результат классификации сформулирован в разделе 3 (см. теорему 1). Как оказалось, существуют 16 неэквивалентных попарно двойственных решений.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

Учитывая кососимметричность тензора r , мы имеем 36 неизвестных и несколько сотен уравнений в системе (1.3). Кроме того, действие преобразований (1.4) группы Mat_3 генерирует параметры в решениях. Поэтому у нас нет шансов решить систему прямым применением средств компьютерной алгебры. Однако это оказывается возможным, если мы используем некоторую разновидность деформационной техники.

Любой тензор r после преобразований (1.4) с матрицей $g = \text{diag}(1, 1, \varepsilon)$ и умножения на ε^2 имеет вид

$$r_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = a_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \varepsilon b_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^3 d_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^4 f_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Мы обозначим множество всех компонент $a_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ через a и так далее. Легко проверить, что множество a может содержать только одну (с точностью до кососимметричности) ненулевую компоненту a_{12}^{33} . Множество b содержит следующие ненулевые элементы:

$$b_{11}^{31}, \quad b_{21}^{31}, \quad b_{12}^{31}, \quad b_{22}^{31}, \quad b_{11}^{32}, \quad b_{21}^{32}, \quad b_{12}^{32}, \quad b_{22}^{32}, \quad b_{31}^{33}, \quad b_{32}^{33},$$

а также кососимметричные к ним. Число ненулевых независимых элементов в множествах c , d и f равно 14, 10 и 1 соответственно.

Будем искать решения системы (1.2), (1.3) в виде (2.1). Это позволит нам разделить уравнения на несколько групп, соответствующих различным степеням ε , и решить их более или менее последовательно.

В этом разделе мы найдем полный список семейств решений уравнения (1.1), используя в основном преобразования (1.4) с $g_3^1 = g_3^2 = g_1^3 = g_2^3 = 0$. Назовем такие преобразования *допустимыми*. Они действуют на множествах a, b, c, d, f в (2.1) по отдельности, т. е. a, b, c, d, f являются “тензорами” относительно группы допустимых преобразований. Общие преобразования (1.4) перемешивают эти множества.

Априори мы имеем два класса решений. Для решений из второго класса $r_{12}^{33} = 0$ после любого преобразования (1.4). Мы называем такие решения *короткими*. Легко проверить, что короткие решения определяются следующими линейными соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{12}^{33} = r_{32}^{11} = r_{31}^{22} = 0, \quad & r_{12}^{21} + r_{31}^{31} + r_{23}^{32} = r_{21}^{21} + r_{13}^{31} + r_{32}^{32}, \quad & r_{23}^{31} = r_{21}^{11} + r_{32}^{31}, \\ r_{31}^{32} = r_{21}^{22} + r_{13}^{32}, \quad & r_{12}^{31} = r_{21}^{31} + r_{32}^{33}, \quad & r_{21}^{32} = r_{12}^{32} + r_{31}^{33}, \\ r_{32}^{21} = r_{31}^{11} + r_{23}^{21}, \quad & r_{31}^{21} = r_{13}^{21} + r_{32}^{22}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Все остальные решения называются *длинными*.

ЛЕММА 1. Пусть r – решение уравнения (1.1). Если оба решения, r и двойственное к r , являются короткими, то $r = 0$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Условия (2.2) и другие 10 условий, которые получаются из (2.2) применением инволюции (1.5), дают нам 20 линейных соотношений между 36 независимыми компонентами тензора r . Выражая 20 компонент из этой линейной системы и подставляя их в (1.3), мы приходим к большой, но простой системе квадратичных уравнений, которая содержит много уравнений вида $X^2 = 0$, где X – выражение, линейное по компонентам r .

Лемма 1 показывает, что достаточно рассмотреть только длинные решения. Заметим, что, поскольку

$$r_{21}^{33} = -r_{12}^{33} = 1 \quad (2.3)$$

является решением системы (1.2), (1.3), длинные решения представляют собой деформации решения (2.3).

Для длинных решений мы без ограничения общности полагаем $a_{12}^{33} = 1$. Подставляя разложение (2.1) в уравнение (1.3) и приравнивая коэффициенты при ε к нулю, мы получаем

$$b_{22}^{31} = b_{11}^{32} = 0, \quad b_{11}^{31} = b_{12}^{32} + b_{21}^{32}, \quad b_{22}^{32} = b_{12}^{31} + b_{21}^{31}.$$

Коэффициенты при ε^2 позволяют нам выразить 11 из 14 элементов множества c в терминах b . Соотношения для коэффициентов при ε^3 дают нам все 10 элементов множества d , а из соотношений для коэффициентов при ε^4 мы находим, что $f_{33}^{21} = 0$. Таким образом, все компоненты тензора r выражаются через элементы $b_{31}^{33}, b_{32}^{33}, b_{21}^{32}, b_{12}^{31}, b_{12}^{32}, b_{21}^{31}$ множества b и через элементы $c_{32}^{32}, c_{31}^{31}, c_{31}^{32}$ множества c .

ЛЕММА 2. Для любого длинного решения r двойственное к r решение является коротким.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Используя выражения для элементов r в терминах 9 элементов, оставшихся неопределенными, мы легко проверяем, что равенства (2.2) для $T(r)$ выполнены.

Из лемм 1 и 2 следует, что множества длинных и коротких решений дополняют друг к другу относительно инволюции T .

Введем три двумерных вектора

$$X = (b_{31}^{33}, b_{32}^{33}), \quad Y = (b_{21}^{32}, b_{12}^{31}), \quad Z = (b_{12}^{32}, b_{21}^{31}).$$

Оставшиеся уравнения из системы (1.2), (1.3) подсказывают разделение решений на два случая: СЛУЧАЙ 1: $Z \neq -Y$ и СЛУЧАЙ 2: $Z = -Y$.

В случае 1 элементы $c_{32}^{32}, c_{32}^{31}, c_{31}^{32}$ определяются, и вся система (1.2), (1.3) оказывается эквивалентной одному соотношению

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_2 z_1 - x_1 z_2 + y_2 z_1 - y_1 z_2 = 0, \quad (2.4)$$

где x_i, y_i, z_i – компоненты векторов X, Y и Z .

В случае 2 система (1.2), (1.3) эквивалентна соотношению

$$(x_2 y_1 - c_{32}^{32})^2 + (c_{32}^{31} + x_2 y_2)(c_{31}^{32} - x_1 y_1) = 0. \quad (2.5)$$

Теперь мы должны привести к канонической форме векторы X, Y, Z с помощью допустимых преобразований. Легко видеть, что эти векторы преобразуются следующим образом:

$$X \rightarrow XQ, \quad Y \rightarrow YQ, \quad Z \rightarrow ZQ,$$

где Q – произвольная невырожденная матрица.

В случае 1 имеются следующие возможности.

СЛУЧАЙ 1.1. Если вектор X не параллелен вектору Y , то мы приводим эти векторы к виду $X = (1, 0)$, $Y = (0, 1)$. Тогда из (2.4) следует, что $z_2 = z_1 - 1$.

СЛУЧАЙ 1.2. Если вектор X не параллелен вектору Z , то мы приходим к векторам $X = (1, 0)$, $Z = (0, 1)$, при этом $y_2 = -y_1 - 1$.

СЛУЧАЙ 1.3. Если вектор Y не параллелен вектору Z , то мы получаем $Y = (1, 0)$, $Z = (0, 1)$ и $x_2 = x_1 + 1$.

СЛУЧАЙ 1.4. Если все три вектора параллельны, то $X = (u, 0)$, $Y = (v, 0)$, $Z = (w, 0)$, где $v + w \neq 0$. Без ограничения общности положим $w = 1 - v$.

Соответствующие решения системы (1.2), (1.3) в случаях 1.1–1.4 задаются формулами

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} &= r_{13}^{31} = r_{12}^{31} = r_{31}^{33} = 1, \\ r_{11}^{12} &= r_{21}^{12} = r_{31}^{12} = r_{11}^{31} = r_{12}^{32} = r_{13}^{32} = r_{22}^{32} = r_{23}^{32} = r_{32}^{32} = r_{33}^{32} = u, \\ r_{12}^{11} &= r_{13}^{11} = r_{21}^{31} = r_{31}^{31} = u - 1; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} &= r_{31}^{31} = r_{21}^{31} = r_{31}^{33} = 1, \\ r_{11}^{12} &= r_{21}^{21} = r_{31}^{21} = r_{22}^{23} = r_{23}^{23} = r_{32}^{23} = r_{33}^{23} = r_{11}^{31} = r_{21}^{32} = r_{31}^{32} = u, \\ r_{21}^{11} &= r_{31}^{11} = r_{21}^{13} = r_{31}^{13} = u + 1; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} &= r_{13}^{13} = r_{32}^{23} = r_{11}^{31} = r_{21}^{31} = r_{21}^{32} = r_{22}^{32} = r_{21}^{33} = 1, \\ r_{11}^{12} &= r_{12}^{12} = r_{31}^{21} = r_{33}^{23} = r_{31}^{32} = r_{32}^{32} = r_{31}^{33} = u, \\ r_{21}^{12} &= r_{22}^{12} = r_{31}^{13} = r_{32}^{13} = r_{32}^{21} = r_{33}^{31} = r_{32}^{33} = u + 1; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} &= r_{11}^{31} = 1, & r_{31}^{33} &= r_{11}^{12} = u, & r_{21}^{32} &= v, & r_{12}^{32} &= 1 - v, & r_{31}^{32} &= uv, \\ r_{13}^{32} &= u(1 - v), & r_{12}^{22} &= v(1 - v), & r_{13}^{22} &= uv(1 - v). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Остальные компоненты тензора r определяются из кососимметричности уравнений (1.2) или равны нулю.

В случае 2 мы имеем следующие подслучаи.

СЛУЧАЙ 2.1. Если вектор X не параллелен вектору Y , то мы сводим эти векторы к $X = (1, 0)$, $Y = (0, 1)$. Тогда соотношение (2.5) может быть параметризовано следующим образом: $c_{32}^{31} = u^2$, $c_{31}^{32} = -v^2$ и $c_{32}^{32} = uv$.

СЛУЧАЙ 2.2. Если вектор X параллелен вектору Y , то мы имеем $X = (\alpha, 0)$, $Y = (\beta, 0)$ и $c_{32}^{31} = u^2$, $c_{31}^{32} = -v^2 + \alpha\beta$, $c_{32}^{32} = uv$.

Таким образом, мы приходим к следующим решениям для случаев 2.1 и 2.2 соответственно:

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} = r_{12}^{13} = r_{12}^{31} = r_{31}^{33} = 1, \quad r_{23}^{11} = r_{32}^{13} = r_{32}^{31} = u^2, \\ r_{12}^{12} = r_{12}^{21} = r_{32}^{23} = r_{32}^{32} = uv, \quad r_{31}^{12} = r_{31}^{21} = r_{12}^{22} = r_{32}^{22} = r_{13}^{23} = r_{13}^{32} = v^2, \\ r_{12}^{11} = u^2 - 1, \quad r_{13}^{13} = r_{13}^{31} = uv + 1, \quad r_{31}^{11} = 2uv + 1; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} r_{21}^{33} = 1, \quad r_{31}^{33} = p, \quad r_{21}^{23} = r_{21}^{32} = q, \quad r_{12}^{11} = r_{32}^{13} = r_{32}^{31} = u^2, \\ r_{12}^{12} = r_{12}^{21} = r_{13}^{13} = r_{13}^{31} = r_{32}^{32} = r_{32}^{23} = uv, \quad r_{31}^{11} = r_{32}^{12} = r_{32}^{21} = qu^2, \\ r_{31}^{23} = r_{31}^{32} = pq - v^2, \quad r_{32}^{22} = 2quv, \quad r_{31}^{22} = q(pq - v^2), \quad r_{21}^{22} = q^2 - v^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соответствующие короткие решения можно получить путем применения инволюции (1.5) к (2.6)–(2.11). Это завершает предварительную классификацию.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В разделе 2 мы нашли 12 семейств решений таких, что любое решение принадлежит одному из семейств с точностью до эквивалентности. Это семейства (2.5)–(2.11) и двойственные к ним. Они не эквивалентны относительно допустимых преобразований. Теперь мы должны найти решения из этих семейств, которые не эквивалентны относительно всей группы преобразований (1.4). Оказывается, что параметры во всех семействах являются несущественными. Это означает, что каждое семейство содержит решение, соответствующее значениям параметров общего положения, и несколько частных решений. Находя их, мы получим конечный список решений. Последний шаг состоит в нахождении неэквивалентных решений из этого списка.

Рассмотрим матрицы M и N с элементами $M_j^i = r_{\alpha j}^{\alpha i}$ и $N_j^i = r_{j\alpha}^{\alpha i}$. При замене (1.4) эти матрицы преобразуются как $M \rightarrow G^{-1}MG$ и $N \rightarrow G^{-1}NG$. Таким образом, полиномиальные инварианты пары матриц (M, N) (см. работу [8]) являются также инвариантами соответствующего решения r . В частности, все коэффициенты многочлена $S = \det(1 + \lambda M + \mu N)$ – инварианты решения r . Непосредственно можно проверить, что $S \equiv 1$ для любого решения из раздела 2. Из этого следует, что все собственные значения любой линейной комбинации матриц M и N равны нулю.

Все решения r можно разделить на три следующие группы: первая группа состоит из решений, для которых жорданова форма матрицы $Q = \lambda M + \mu N$ для общих значений λ и μ – это большая жорданова клетка; для второй группы эта жорданова форма является малой жордановой клеткой; наконец, $M = N = 0$ для третьей группы. Для решений из первой и второй групп компоненты тензора r значительно упрощаются в жордановом базисе для матрицы Q .

Рассмотрим семейство решений (2.11) из случая 2.2. Решение общего положения, соответствующее $u(p + q) \neq 0$, принадлежит первой группе. Оно эквивалентно решению

$$r_{12}^{11} = r_{32}^{11} = r_{13}^{12} = r_{13}^{21} = r_{23}^{22} = 1. \quad (3.1)$$

Три неэквивалентных решения из второй группы отвечают случаю $q = -p, u \neq 0$, случаю $u = v = 0, p + q \neq 0$ и случаю $u = 0, v = (p + q)/2, p + q \neq 0$. Они эквивалентны следующим решениям:

$$r_{32}^{11} = r_{13}^{12} = r_{13}^{21} = r_{23}^{22} = 1, \quad r_{23}^{22} = 1, \quad r_{13}^{12} = r_{13}^{21} = r_{23}^{22} = 1. \quad (3.2)$$

Единственное решение из третьей группы задается формулой (2.3). Оно соответствует $u = v = p = q = 0$.

Оказывается, что любое решение в случае 2.1 эквивалентно одному из решений (3.1).

Случай 1.1 с $u \neq 0$, $u \neq 1$ и с $u = 1$ дает два новых решения, эквивалентных решениям

$$r_{13}^{11} = r_{13}^{12} = r_{33}^{32} = 1 \quad (3.3)$$

и

$$r_{31}^{12} = r_{33}^{32} = 1. \quad (3.4)$$

Наконец, случай 1.2 и $u = -1$ приводит к решению, эквивалентному

$$r_{13}^{12} = r_{33}^{32} = 1. \quad (3.5)$$

Итак, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Решения (2.3), (3.1)–(3.5) и двойственные к ним образуют полный список решений уравнения (1.1), не эквивалентных относительно группы преобразований (1.4).*

Можно проверить, что $M = kN$ для всех решений, кроме (3.3) и двойственного к нему. Ясно, что коэффициент k инвариантен относительно преобразований (1.4). Возможные значения k для различных решений равны ± 1 , ± 2 и $\pm 1/2$.

Решение (3.1) и двойственное к нему образуют первую из упомянутых выше групп. Эти решения связаны с антифробениусовыми ассоциативными алгебрами (3×3) -матриц с одной нулевой строкой и одним нулевым столбцом соответственно. Решения (3.2)–(3.5) и двойственные к ним образуют вторую группу. Решение (2.3) и двойственное к нему принадлежат к третьей группе.

Было бы интересно исследовать антифробениусовы алгебры, соответствующие решениям из второй и третьей групп. Это могло бы привести к формулировке разумной классификационной задачи для антифробениусовых ассоциативных алгебр произвольной размерности. Решение такой задачи представляется наиболее эффективным способом построения классов решений уравнения (1.1) с произвольным n . Здесь отметим только, что все антифробениусовы алгебры, порожденные решениями из теоремы 1, имеют нетривиальную полупростую часть. Классификацию некоторых классов антифробениусовых алгебр Ли можно найти в работе [9].

Благодарности. Автор благодарен А. Одесскому, В. Рубцову и А. Зобнину за полезные обсуждения. Исследования были частично поддержаны РФФИ (грант № 11-01-00341_а).

Список литературы

- [1] G.-C. Rota, “Baxter operators, an introduction”, *Gian-Carlo Rota on Combinatorics, Contemporary Mathematicians*, **57**, eds. J. P. S. Kung, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 504–512.
- [2] T. Schedler, “Poisson algebras and Yang–Baxter equations”, *Advances in Quantum Computation* (University of Texas, Tyler, TX, USA, September 20–23, 2007), *Contemporary Mathematics*, **482**, AMS, Providence, RI, 2009, 91–106.
- [3] M. Van den Bergh, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:11 (2008), 5711–5769.

- [4] A. V. Odesskii, V. N. Rubtsov, V. V. Sokolov, *Double Poisson brackets on free associative algebras*, Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series, **52**, MPI f. Mathematik, Bonn, 2012, [arXiv:1208.2935](#).
- [5] M. Aguiar, *J. Algebra*, **244**:2 (2001), 492–532.
- [6] А. В. Одесский, В. Н. Рубцов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **171**:1 (2012), 26–32.
- [7] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, *Commun. Math. Phys.*, **211**:1 (2000), 231–251.
- [8] C. Procesi, *Adv. Math.*, **19**:3 (1976), 306–381.
- [9] А. Г. Элашвили, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 94–95.

Поступила в редакцию 6.01.2013