Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, С. В. Новиков,
В. К. Сазонов, Представление β -функции и аномаль-
ных размерностей несингулярными интегралами: дока-
зательство основного соотношения, *ТМФ*, 2013, том 175,
номер 3, 325–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:37:51

© 2013 г.

Л. Ц. Аджемян*, М. В. Компаниец*,
С. В. Новиков[†], В. К. Сазонов*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ β -ФУНКЦИИ И АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО СООТНОШЕНИЯ

Ранее был предложен способ вычисления β -функции и аномальных размерностей, удобный для численных расчетов в рамках ϵ -разложения, и справедливость лежащего в основе расчета соотношения проверена в четырехпетлевом приближении. Приводится доказательство этого соотношения в произвольном порядке теории возмущений.

Ключевые слова: ренормализационная группа, ϵ -разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели.

DOI: 10.4213/tmf8470

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложена схема ренормировки, в которой аномальные размерности γ_i простым образом выражаются через ренормированные значения производных по массе в точке нормировки от 1-неприводимых функций $\bar{\Gamma}_i$:

$$\gamma_i = \frac{2f_i}{1 + f_2}, \quad f_i \equiv -R(m^2 \partial_{m^2} \bar{\Gamma}_i)|_{m=\mu}. \quad (1)$$

Эти соотношения были проверены в работе [1] в четырехпетлевом приближении и на их основе произведен численный расчет соответствующих критических показателей. В настоящей работе они будут доказаны в общем случае на основе уравнений ренормгруппы (РГ).

В тексте статьи мы используем терминологию, принятую в монографии [2]: 1-неприводимая функция – одночастично-неприводимая функция, существенный подграф – 1-неприводимый расходящийся подграф.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: loran.adzhemyan@pobox.spbu.ru, mkompan@gmail.com

[†] Google Switzerland GmbH, Zürich, Switzerland. E-mail: dr.snov@gmail.com

2. СХЕМА РЕНОРМИРОВКИ

Рассмотрим модель φ^3 в пространстве размерности $d = 6 - \varepsilon$. Ренормированное действие этой модели дается выражением

$$S = -\frac{1}{2}(m^2 Z_1 + p^2 Z_2 + \delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{6}g\mu^{\varepsilon/2} Z_3 \varphi^3, \quad (2)$$

где константы Z_i связаны с константами ренормировки массы Z_{m^2} , поля Z_φ и заряда Z_g соотношениями

$$Z_1 = Z_{m^2} Z_\varphi^2, \quad Z_2 = Z_\varphi^2, \quad Z_3 = Z_g Z_\varphi^3. \quad (3)$$

Константы ренормировки Z_i и сдвиг массы δm^2 выберем из условий [1]

$$\mathcal{K}_0 R \bar{\Gamma}_i|_{m=\mu} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

на функции

$$\bar{\Gamma}_1 = -\mathcal{K}_0 \left(\frac{\Gamma_2 - \Gamma_2|_{m=0}}{m^2} \right), \quad \bar{\Gamma}_2 = -\mathcal{K}_2 \Gamma_2, \quad \bar{\Gamma}_3 = -\frac{\mathcal{K}_0 \Gamma_3}{g\mu^{\varepsilon/2}}, \quad (5)$$

определяемые 1-неприводимыми двуххвостовой функцией Грина Γ_2 и треххвостовой функцией Грина Γ_3 . В (4), (5) операции $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_2$ даются равенствами

$$\mathcal{K}_0 f(\{p\}) \equiv f|_{\{p=0\}}, \quad \mathcal{K}_2 f(p) \equiv (\partial_{p^2} f)|_{p=0}. \quad (6)$$

Учет контрчленов в выражении (2) можно заменить действием R -операции $R = (1 - K)R'$, в которой операция вычитания расходящихся частей K определена соотношениями

$$K \Gamma_3 = \mathcal{K}_0 \Gamma_3|_{m=\mu}, \quad (7)$$

$$K \Gamma_2 = \mathcal{K}_0 \left[\Gamma_2|_{m=0} + \frac{m^2}{\mu^2} (\Gamma_2|_{m=\mu} - \Gamma_2|_{m=0}) \right] + p^2 \mathcal{K}_2 \Gamma_2|_{m=\mu}. \quad (8)$$

При $m = \mu$ операция (8) упрощается:

$$K \Gamma_2|_{m=\mu} = \mathcal{K}_0 \Gamma_2|_{m=\mu} + p^2 \mathcal{K}_2 \Gamma_2|_{m=\mu}, \quad (9)$$

и обе операции (7), (9) сводятся к вычитанию на нулевых импульсах при $m = \mu$.

В описанной схеме ренормировки константы Z_i зависят лишь от заряда g и параметра ε , как и в схеме минимальных вычитаний (MS), поэтому РГ-функции γ_i и β определяются по константам ренормировки так же, как в схеме MS:

$$\gamma_i = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{g \partial_g \ln Z_i}{1 + g \partial_g \ln Z_g}, \quad \beta = -\frac{g\varepsilon}{2} \frac{1}{1 + g \partial_g \ln Z_g}. \quad (10)$$

Совпадают по виду в обеих схемах и уравнения РГ.

Безразмерные ренормированные функции $R\bar{\Gamma}_i \equiv \bar{\Gamma}_i^R$ зависят от безразмерного отношения $\tau = m^2/\mu^2$: $\bar{\Gamma}_i^R(m^2, \mu) = \bar{\Gamma}_i^R(\tau, 1) \equiv \bar{\Gamma}_i^R(\tau)$. Записав для них уравнения РГ и переходя в точку нормировки $m = \mu$, можно выразить РГ-функции через $\bar{\Gamma}_i^R$ [1]:

$$\gamma_i = \frac{2F_i}{1 + F_2 - F_1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где

$$F_i \equiv \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_i^R, \quad \hat{\partial}_{\tau\dots} \equiv -\partial_{\tau\dots}|_{\tau=1}, \quad \tau \equiv \frac{m^2}{\mu^2}. \quad (12)$$

Отличие соотношений (11) от искоемых (1) состоит в порядке применения R -операции и дифференцирования в функциях F_i из (12) и f_i из (1), которые по аналогии с F_i перепишем в виде

$$f_i = R \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_i. \quad (13)$$

В f_i R -операция действует на продифференцированную диаграмму, в которой уже положено $m = \mu$ ($\tau = 1$), поэтому операция K имеет простой вид (9). Для F_i из (12) необходимо сначала продифференцировать ренормированную диаграмму, в которой операция K дается выражением (8), и лишь затем перейти в точку нормировки $m = \mu$.

Мы покажем, что величины F_i и f_i связаны соотношениями

$$f_i - F_i = f_i F_1, \quad i = 2, 3. \quad (14)$$

Записывая (11) в виде

$$\gamma_i = \frac{2F_i/(1 - F_1)}{1 + F_2/(1 - F_1)}$$

и подставляя сюда $F_i/(1 - F_1) = f_i$ из (14), приходим к искомому соотношению (1). Доказательство формулы (14) и является основной задачей работы.

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству, преобразуем входящие в (14) величины к удобному виду. Величины $\bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_3$ являются логарифмическими, поэтому диаграммы для их производных $\hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_2, \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_3$ не имеют поверхностной расходимости, так что в выражениях (13) для f_2, f_3 можно заменить R на R' . Такую же замену можно сделать в выражениях F_2, F_3 из (12) – контрчлены $KR'\bar{\Gamma}_2$ и $KR'\bar{\Gamma}_3$ для логарифмических величин $\bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_3$ не зависят от τ и пропадают после дифференцирования $\hat{\partial}_\tau$. Таким образом, имеем

$$f_i = R' \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_i, \quad F_i = \hat{\partial}_\tau R' \bar{\Gamma}_i, \quad i = 2, 3. \quad (15)$$

Преобразуем также выражение для F_1 . С учетом условия нормировки (4) из (5) и (12) находим $F_1 = \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_1^R = 1 - \mathcal{K}_0 \hat{\partial}_\tau R \Gamma_2$. Единица в этом соотношении сокращает беспетлевой вклад в Γ_2 , обозначая соответствующую функцию $\Gamma_2 = \Gamma_2 + m^2$, в результате получаем

$$F_1 = -\mathcal{K}_0 \hat{\partial}_\tau R \Gamma_2. \quad (16)$$

С учетом (15), (16) искомое соотношение (14) записывается в виде

$$(R' \hat{\partial}_\tau - \hat{\partial}_\tau R') \bar{\Gamma}_i = -R' \hat{\partial}_\tau \bar{\Gamma}_i \cdot \mathcal{K}_0 \hat{\partial}_\tau R \Gamma_2, \quad i = 2, 3. \quad (17)$$

Доказательство этого соотношения проведем в два этапа. Сначала рассмотрим действие коммутатора в левой части (17) на индивидуальные диаграммы, входящие в $\bar{\Gamma}_i$. Результат дается соотношением (21) в разделе 3. Вторая часть доказательства комбинаторная: в разделе 4 будет показано, что, суммируя вклады (21) с симметричными коэффициентами, определяющими $\bar{\Gamma}_i$, мы получим выражение, факторизующееся на множители, стоящие в правой части (17).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЛЯ ОТДЕЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ

Операция R' на диаграмме определяется по заданной контрчленной операции L соотношением [2]

$$R' = 1 + \sum_{\gamma} L_{\gamma} + \sum_{\gamma, \gamma'} L_{\gamma} L_{\gamma'} + \dots \quad (18)$$

Здесь γ, γ' – существенные подграфы диаграммы, действие L_{γ} на диаграмму сводится к замене подграфа γ его контрчленом L_{γ} . Однократное суммирование проводится по всем различным существенным подграфам, двукратное – по всем различным парам непересекающихся существенных подграфов, затем по тройкам и т. д. Операция L выражается через операцию отбора расходящейся части диаграммы K соотношением¹⁾

$$L = -KR'. \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) определяют операцию R' рекуррентно (по числу петель).

Перепишем (18) в более удобной для дальнейшего форме. Определим множество $V(\gamma)$ существенных подграфов диаграммы γ и множество $U(\gamma)$, элементами которого U_k являются входящие в $V(\gamma)$ одиночные существенные подграфы, а также всевозможные пары непересекающихся подграфов, тройки и т. д. Тогда (18) можно записать в виде

$$R'\gamma = \gamma + \sum_{U_k \in U(\gamma)} \gamma^{(U_k)} \left[\prod_{\gamma_i \in U_k} L_{\gamma_i} \right], \quad (20)$$

где $\gamma^{(U_k)}$ – диаграмма γ со стянутыми подграфами из U_k , с соответствующими вершинными множителями.

Докажем, что для логарифмических диаграмм γ справедливо равенство

$$\mathcal{K}_0[\hat{\partial}_{\tau} R'\gamma - R' \hat{\partial}_{\tau} \gamma] = \sum_{\sigma_{\alpha} \in V(\gamma)} \mathcal{K}_0 R' \gamma^{(\alpha)} (\mathcal{K}_0 \hat{\partial}_{\tau} R \sigma_{\alpha}), \quad (21)$$

где $\gamma^{(\alpha)}$ – диаграмма, получающаяся заменой двухвостого подграфа σ_{α} на единичную вершину. Доказательство проведем, преобразовав левую и правую части (21) к совпадающим между собой выражениям.

В нашей схеме коммутатор в левой части (21) отличен от нуля (в отличие от схемы MS), так как в нашей схеме операция K коммутирует с операцией дифференцирования ∂_{m^2} только для логарифмических диаграмм. Как следствие, вклад в левую

¹⁾Мы включили знак минус в определение операции L , чтобы все слагаемые в (18) входили со знаком плюс.

часть (21) обусловлен двухвостыми подграфами, которые будем обозначать σ_α . Запишем первое слагаемое в левой части (21), дифференцируя соотношение (20):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R' \gamma = \mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau \gamma + \sum_{U_k \in U(\gamma)} \mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau \gamma^{(U_k)} \left[\prod_{\gamma_i \in U_k} L \gamma_i \right] + \\ + \sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[(\widehat{\partial}_\tau L \sigma_\alpha) \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $U_{\sigma_\alpha}(\gamma)$ – подмножество множества $U(\gamma)$, элементы которого содержат σ_α (в том случае, когда в $U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)$ входит единственный элемент σ_α , множество $\gamma_i \in U_k \setminus \sigma_\alpha$ пустое, и соответствующее произведение обращается в единицу). В (22) учтено, что производная $\widehat{\partial}_\tau L \gamma_\alpha$ отлична от нуля только для двухвостых подграфов $\gamma_\alpha = \sigma_\alpha$, так как только для них контрчленная операция L зависит от τ .

Во втором слагаемом левой части (21) производная $\widehat{\partial}_\tau \gamma$ представляет собой сумму вкладов, в которых продифференцирована по $\widehat{\partial}_\tau$ какая-либо линия диаграммы γ , что соответствует вставке в эту линию единичной двухвостой вершины. Действие R' -операции на полученную диаграмму $\dot{\gamma}$ определяется соотношением (20) с заменой множества $U(\gamma)$ на $U(\dot{\gamma})$. Если в набор $\dot{U}_k \in U(\dot{\gamma})$ продифференцированная линия не входит, он совпадает с соответствующим набором исходной диаграммы $\dot{U}_k = U_k \in U(\gamma)$. Совокупность таких вкладов совпадает с суммой двух первых слагаемых в (22), которые таким образом сокращаются в левой части (21). Если продифференцированная линия находится внутри вершинного подграфа, этот подграф перестает быть существенным и не требует контрчлена. Если она находится внутри какого-либо двухвостого подграфа σ_α , его размерность становится равной нулю, он остается существенным, изменяется только определение контрчленной операции, действующей на этот подграф: $L \dot{\sigma}_\alpha = -\mathcal{K}_0 R' \dot{\sigma}_\alpha$. Совокупность таких вкладов можно записать в виде

$$\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\gamma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[L \widehat{\partial}_\tau \sigma_\alpha \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \gamma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \quad (23)$$

С учетом этого соотношения и третьего слагаемого в (22) левая часть (21) принимает вид

$$\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\gamma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[(\widehat{\partial}_\tau L \sigma_\alpha - L \widehat{\partial}_\tau \sigma_\alpha) \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \gamma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \quad (24)$$

Рассмотрим сумму, стоящую в круглых скобках в (24). Первое слагаемое в ней удобно дополнить операцией $\mathcal{K}_0$ обращения в нуль внешнего импульса $\widehat{\partial}_\tau L \sigma_\alpha = \mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau L \sigma_\alpha$, что возможно, так как единственный зависящий от импульса вклад ($\sim p^2$) в $L \sigma_\alpha$ пропадает после дифференцирования $\widehat{\partial}_\tau$. Представляя в этом слагаемом операцию L в виде $L = R - R'$ и учитывая, что во втором слагаемом $L = -\mathcal{K}_0 R'$, получаем

$$\widehat{\partial}_\tau L \sigma_\alpha - L \widehat{\partial}_\tau \sigma_\alpha = \mathcal{K}_0 [\widehat{\partial}_\tau R \sigma_\alpha - (\widehat{\partial}_\tau R' - R' \widehat{\partial}_\tau) \sigma_\alpha]. \quad (25)$$

Мы предполагаем, что для коммутатора в правой части (25) справедливо соотношение (21) (индукция), тогда имеем

$$\mathcal{K}_0(\widehat{\partial}_\tau R' - R' \widehat{\partial}_\tau) \sigma_\alpha = \sum_{\sigma_\beta \in V(\gamma_\alpha)} \mathcal{K}_0 R' \sigma_\alpha^{(\beta)} [\mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R \sigma_\beta], \quad (26)$$

где $\sigma_\alpha^{(\beta)}$ – диаграмма, получающаяся из σ_α заменой подграфа σ_β на единичную вершину. Такая замена понижает на 2 размерность диаграммы, что делает диаграмму $\sigma_\alpha^{(\beta)}$ логарифмической. Подставляя (25), (26) в (24), находим окончательное выражение для левой части (21):

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[\mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R \sigma_\alpha \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right] - \\ & - \sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[\left(\sum_{\sigma_\beta \in V(\sigma_\alpha)} \mathcal{K}_0 R' \sigma_\alpha^{(\beta)} [\mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R \sigma_\beta] \right) \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь надо показать, что полученное выражение совпадает с правой частью (21). Напомним, что в ней $\gamma^{(\alpha)}$ получается из исходной диаграммы γ заменой двухвостого подграфа σ_α на точку (единичную вершину). Запишем действие R' -операции на $\gamma^{(\alpha)}$, используя представление (20):

$$R' \gamma^{(\alpha)} = \gamma^{(\alpha)} + \sum_{U_k \in U(\gamma^{(\alpha)})} \gamma^{(U_k)} \left[\prod_{\gamma_i \in U_k} L \gamma_i \right]. \quad (28)$$

Существенные подграфы диаграммы $\gamma^{(\alpha)}$, не содержащие вставки в линию, совпадают с соответствующими подграфами диаграммы γ (не содержащими внутри себя σ_α). Выделяя в (28) вклад таких подграфов, получаем для правой части (21) вклад

$$\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[\mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R \sigma_\alpha \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right], \quad (29)$$

совпадающий с первым слагаемым в (27).

Существенные подграфы диаграммы $\gamma^{(\alpha)}$, содержащие вставку точки в линию, могут интерпретироваться как результат замены подграфа σ_α на точку внутри подграфа $\sigma_\beta \in U(\gamma)$. Размерность получающегося в результате такой замены подграфа $\sigma_\beta^{(\alpha)}$ на 2 меньше размерности квадратично расходящегося подграфа σ_β , однако он остается существенным (логарифмическим). Суммирование в (28) по наборам U_k , содержащим подграфы вида $\sigma_\beta^{(\alpha)}$, можно реализовать путем суммирования по $U_k \in U_{\sigma_\beta}$ и последующего суммирования по всем $\sigma_\beta \in V_{\sigma_\alpha}$, где $V_{\sigma_\alpha}(\gamma)$ – множество существенных подграфов диаграммы γ , содержащих в себе подграф σ_α . Такое суммирование дает следующий вклад в правую часть (21):

$$\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{\sigma_\beta \in V_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\beta}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[L \sigma_\beta^{(\alpha)} [\mathcal{K}_0 \widehat{\partial}_\tau R \sigma_\alpha] \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\beta)} L \gamma_i \right]. \quad (30)$$

Осталось показать, что он совпадает со вторым слагаемым из (27).

Учтем, что в тройной сумме (30) операция L при действии на логарифмическую диаграмму $\sigma_\beta^{(\alpha)}$ определяется выражением $L = -\mathcal{K}_0 R'$, а также произведем замену переменных суммирования $\alpha \leftrightarrow \beta$, это дает

$$- \sum_{\sigma_\beta \in V(\gamma)} \sum_{\sigma_\alpha \in V_{\sigma_\beta}(\gamma)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[\mathcal{K}_0 R' \sigma_\alpha^{(\beta)} [\mathcal{K}_0 \hat{\partial}_\tau R \sigma_\beta] \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \quad (31)$$

В (27) суммирования по U_k и по σ_β независимы, поэтому их можно поменять местами:

$$- \sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{\sigma_\beta \in V(\sigma_\alpha)} \sum_{U_k \in U_{\sigma_\alpha}(\gamma)} \mathcal{K}_0 \gamma^{(U_k)} \left[(\mathcal{K}_0 R' \sigma_\alpha^{(\beta)} [\mathcal{K}_0 \hat{\partial}_\tau R \sigma_\beta]) \prod_{\gamma_i \in (U_k \setminus \sigma_\alpha)} L \gamma_i \right]. \quad (32)$$

Теперь нам остается доказать, что суммирования $\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)} \sum_{\sigma_\beta \in V(\sigma_\alpha)}$ в (32) и $\sum_{\sigma_\beta \in V(\gamma)} \sum_{\sigma_\alpha \in V_{\sigma_\beta}(\gamma)}$ в (31) идут по одинаковым наборам σ_α и σ_β . В этом нетрудно убедиться, если учесть, что в (32) отличный от нуля вклад дают слагаемые из суммы $\sum_{\sigma_\alpha \in V(\gamma)}$, в которых $\sigma_\alpha \in V_{\sigma_\beta}(\gamma)$, в противном случае отсутствуют слагаемые в $\sum_{\sigma_\beta \in V(\sigma_\alpha)}$. Аналогичным образом вклад в (31) дают только слагаемые с $\sigma_\beta \in V(\sigma_\alpha)$.

4. КОМБИНАТОРНАЯ ЧАСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Покажем, что равенство (17) выполняется в каждом порядке теории возмущений. В беспетлевом приближении условия нормировки (4) приводят к тому, что $\bar{\Gamma}_i|_{g=0} = 1$ и величины F_i и f_i из (15) равны нулю. Ряды теории возмущений для функций $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3$ имеют вид

$$\mathcal{K}_0 \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} = \sum_n g^n \sum_j C_{n,j} \gamma_{n,j}(\tau) \quad (33)$$

(для модели φ^3 на самом деле ряд по $u = g^2$), где $\gamma_{n,j}(\tau)$ – n -петлевые диаграммы на нулевых внешних импульсах, а $C_{n,j}$ – их симметричные коэффициенты. Коэффициенты соответствующего ряда для $\mathcal{K}_0 \Gamma_2$ будем помечать верхним индексом 1, а диаграммы обозначать буквой σ (как и все двухвостые подграфы на нулевых импульсах в других диаграммах):

$$\mathcal{K}_0 \Gamma_2 = \sum_n g^n \sum_j C_{n,j}^{(1)} \sigma_{n,j}(\tau). \quad (34)$$

Подставляя (33), (34) в (15), (16), находим

$$F = \sum_n g^n \sum_j C_{n,j} R' \hat{\partial}_\tau \gamma_{n,j}(\tau), \quad f = \sum_n g^n \sum_j C_{n,j} \hat{\partial}_\tau R' \gamma_{n,j}(\tau), \quad (35)$$

$$F_1 = \sum_n g^n \sum_j C_{n,j}^{(1)} R \hat{\partial}_\tau \sigma_{n,j}(\tau). \quad (36)$$

Подставляя (35), (36) в (17) и приравнивая коэффициенты при g^n , получаем

$$\sum_j C_{n,j} (R' \hat{\partial}_\tau - \hat{\partial}_\tau R') \gamma_{n,j} = \sum_{n_1, n_2} \sum_{j, l} C_{n_1, j} C_{n_2, l}^{(1)} (R' \hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1, j}) (\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2, l}), \quad (37)$$

где $n_1, n_2 > 0$, $n_1 + n_2 = n$. При $n = 1$ равенство (37), очевидно, выполняется: правая часть равна нулю, а в левой $R' = 1$ и оба вклада сокращаются. Методом индукции мы убедимся в справедливости соотношения (37) для всех $n \geq 1$, основываясь на соотношении (21).

Подставляя (21) в (37), имеем

$$\sum_{j,l} C_{n,j} R' \hat{\gamma}_{n,j}^{(l)} (\hat{\partial}_\tau R \sigma_l) = \sum_{n_1, n_2} \sum_{j,l} C_{n_1,j} C_{n_2,l}^{(1)} (R' \hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1,j}) (\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2,l}). \quad (38)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства достаточно, очевидно, доказать соответствующее равенство, в котором опущена R' -операция в левой и правой частях:

$$\sum_{j,l} C_{n,j} \hat{\gamma}_{n,j}^{(l)} (\hat{\partial}_\tau R \sigma_l) = \sum_{n_1, n_2} \sum_{j,l} C_{n_1,j} C_{n_2,l}^{(1)} (\hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1,j}) (\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2,l}). \quad (39)$$

Доказательство соотношения (39) будет основано на том, что обе его части после приведения подобных членов имеют вид суммы вкладов всевозможных произведений

$$\dot{C}_{n_1} \dot{\gamma}_{n_1} C_{n_2} \hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2}, \quad (40)$$

где $\dot{\gamma}_{n_1}$ – диаграмма со вставленной в одну из линий точкой, а $\dot{C}_{n_1}$ и C_{n_2} – симметричные коэффициенты величин $\dot{\gamma}_{n_1}$ и σ_{n_2} .

Рассмотрим правую часть соотношения (39). В ней величина $\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2,l}$ уже входит со своим симметричным коэффициентом $C_{n_2,l}^{(1)}$. Второй множитель $\hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1,j}$ представляет собой сумму вкладов вида $\dot{\gamma}_{n_1,j}$, в которых вставлена точка в одну из линий. Среди них есть одинаковые. Покажем, что после приведения подобных членов каждый вклад также войдет со своим симметричным коэффициентом $\dot{C}_{n_1,j}$.

Симметричный коэффициент 1-неприводимой N -хвостки определяется соотношением

$$C = \frac{N!}{S}, \quad (41)$$

где S – мощность (число элементов) группы симметрии Λ диаграммы по перестановкам вершин, линий, соединяющих одинаковые вершины, и внешних хвостов. Разобьем линии диаграммы $\gamma_{n_1,j}$ на группы линий (орбиты), переходящих друг в друга при всевозможных преобразованиях из группы симметрии. Перенумеруем орбиты индексом $[k]$ и обозначим через $t_k^{(n_1,j)}$ число элементов в k -й орбите. Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ каждой из линий орбиты дает одинаковую диаграмму $\dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]}$, в которую вставлена точка в одну из линий орбиты:

$$\hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1,j} = \sum_{[k]} t_k^{(n_1,j)} \dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]}. \quad (42)$$

Из теории групп следует, что мощность S группы равна произведению числа элементов орбиты t на мощность стабилизатора S_{st} любого элемента орбиты (подгруппы с фиксированным элементом):

$$S = t S_{\text{st}}. \quad (43)$$

Выбирая в качестве фиксированного элемента линию с точкой, находим

$$S_{n_1,j} = t_k^{(n_1,j)} S_{n_1,j}^{[k]}, \quad (44)$$

откуда с учетом (41) получаем

$$C_{n_1,j} \hat{\partial}_\tau \gamma_{n_1,j} = \sum_{[k]} \frac{(N_{n_1,j})! t_k^{(n_1,j)}}{S_{n_1,j}} \dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]} = \sum_{[k]} \frac{(N_{n_1,j})!}{S_{n_1,j}^{[k]}} \dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]} = \sum_{[k]} \dot{C}_{n_1,j}^{[k]} \dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]}, \quad (45)$$

где $\dot{C}_{n_1,j}^{[k]} = (N_{n_1,j})! / S_{n_1,j}^{[k]}$ – симметричный коэффициент диаграммы $\dot{\gamma}_{n_1,j}^{[k]}$. Подстановка (45) в правую часть (39) приводит ее к виду

$$\sum_{n_1, n_2} \sum_{j, l, k} C_{n_1,j}^{[k]} \gamma_{n_1,j}^{[k]} C_{n_2,l}^{(1)} (\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2,l}), \quad (46)$$

имеющему вид суммы вкладов (40).

Рассмотрим теперь левую часть (39). Если в диаграмме $\gamma_{n,j}$ имеется несколько одинаковых подграфов σ_l , то среди возникающих при их последовательном стягивании диаграмм $\gamma_{n,j}^{(l)}$ могут быть одинаковые. Чтобы привести подобные члены, определим для каждого σ_l -подграфа “орбиту” – совокупность σ_l -подграфов, переходящих друг в друга при преобразованиях симметрии диаграммы $\gamma_{n,j}$, в которую вставлен подграф.

Перенумеруем орбиты подграфа $\sigma_{n_2,l}$ индексом $[k]$ и обозначим через $t_{n,j}^{(n_2,l,[k])}$ число элементов в k -й орбите. В сумме $\sum_l$ по всевозможным подграфам σ_l диаграммы $\hat{\gamma}_{n,j}$ в левой части (39) все элементы одной орбиты дают одинаковый вклад. Сумму по подграфам можно записать как сумму $\sum_{n_2}$ по числу петель подграфа $n_2 < n$, сумму $\sum_l$ по различным подграфам $\sigma_{n_2,l}$ и сумму по орбитам подграфа $\sigma_{n_2,l}$. Вклад k -й орбиты будет входить с множителем $t_{n,j}^{(n_2,l,[k])}$ и в ней будет учитываться только один элемент, т. е. левая часть (39) примет вид

$$\sum_{j, n_2, l, k} C_{n,j} t_{n,j}^{(n_2,l,[k])} \hat{\gamma}_{n,j}^{(n_2,l,[k])} (\hat{\partial}_\tau R \sigma_{n_2,l}). \quad (47)$$

Чтобы завершить приведение подобных членов, учтем, что при замене на точку несимметричного по внешним концам подграфа в “несимметричной” линии получаются два одинаковых вклада²⁾. Таким образом, чтобы свести (47) к сумме различных вкладов, надо ввести при них дополнительный множитель $\kappa_{n,j}^{(n_2,l,[k])}$ (в дальнейшем называемый просто κ_1), который равен единице для всех симметричных подграфов $\sigma_{n_2,l}$, а для несимметричных подграфов он равен единице, если они вставлены в симметричную линию, и равен двум, если они вставлены в несимметричную линию. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что произведение $C_{n,j} t_{n,j}^{(n_2,l,[k])} \kappa_{n,j}^{(n_2,l,[k])}$ сводится к произведению симметричных коэффициентов диаграмм $\sigma_{n_2,l}$ и $\hat{\gamma}_{n,j}^{(n_2,l,[k])}$.

²⁾Подграф σ будем называть в дальнейшем симметричным, если в его группу симметрии входит перестановка внешних хвостов. Линию, в которую вставлена точка, будем называть симметричной, если в группу симметрии входит перестановка концов линии.

Опуская индексы, эту задачу можно сформулировать в виде равенства

$$C_\gamma t_\sigma \kappa_1 = C_\sigma C_{\dot{\gamma}}. \quad (48)$$

Здесь C_γ – симметричный коэффициент рассматриваемой 1-неприводимой N -хвостки, t_σ – число элементов некоторой σ -орбиты, один из элементов которой заменен на точку, κ_1 – множитель, равный двум, если заменяемый подграф несимметричен и находится на несимметричной линии, и равный единице в остальных случаях. Множители C в правой части (48) имеют смысл симметричных коэффициентов подграфа и диаграммы $\dot{\gamma}$, в которой подграф заменен на точку. Симметричные коэффициенты в (48) выражаются через соответствующие симметричные множители диаграмм S соотношениями

$$C_\gamma = \frac{N!}{S_\gamma}, \quad C_{\dot{\gamma}} = \frac{N!}{S_{\dot{\gamma}}}, \quad C_\sigma = \frac{2}{S_\sigma}, \quad (49)$$

с учетом которых подлежащее доказательству равенство (48) сводится к соотношению

$$2S_\gamma = t_\sigma \kappa_1 S_{\dot{\gamma}} S_\sigma. \quad (50)$$

Пусть $S_{\text{st}}^{(\sigma)}$ – мощность стабилизатора с фиксированным подграфом, тогда величина $S_{\dot{\gamma}}$ может рассматриваться как мощность этого стабилизатора с заменой подграфа на точку в линии. Эти величины связаны между собой соотношением

$$S_{\dot{\gamma}} = \kappa_2 S_{\text{st}}^{(\sigma)}, \quad (51)$$

где $\kappa_2 = 1$ для симметричных подграфов и для несимметричных подграфов, вставленных в несимметричную линию, и $\kappa_2 = 2$ для несимметричных подграфов и симметричных линий, так как только в последнем варианте замена подграфа на точку приводит к появлению дополнительной симметрии диаграммы.

С учетом (51) соотношение (50) принимает вид

$$2S_\gamma = t_\sigma \kappa_1 \kappa_2 S_{\text{st}}^{(\sigma)} S_\sigma. \quad (52)$$

Для его доказательства необходимо выразить мощность группы симметрии S_γ всей диаграммы через мощности групп симметрии подграфа S_σ и его стабилизатора $S_{\text{st}}^{(\sigma)}$. Сделаем это в два приема. Сначала будем рассматривать все σ -подграфы в орбите как бесструктурные элементы $\bar{\sigma}$, определим на получающейся диаграмме группу симметрии $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ с мощностью $S_{\bar{\sigma}}$ и мощностью стабилизатора орбиты $S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})}$ и выразим S_γ и $S_{\text{st}}^{(\sigma)}$ через $S_{\bar{\sigma}}$ и $S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})}$. Мощность группы S_γ связана с $S_{\bar{\sigma}}$, S_σ и числом элементов орбиты t_σ соотношением

$$S_\gamma = S_{\bar{\sigma}} \left(\frac{S_\sigma}{\kappa_3} \right)^{t_\sigma}, \quad (53)$$

где $\kappa_3 = 1$ для несимметричных σ -подграфов и $\kappa_3 = 2$ для симметричных. Дополнительный множитель $1/2$ для симметричных подграфов в этом соотношении компенсирует дополнительную симметрию этих подграфов, которая не проявляется, когда они стоят внутри общей диаграммы. Мощность $S_{\bar{\sigma}}$ группы $\Lambda_{\bar{\sigma}}$ связана

с мощностью $S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})}$ стабилизатора элемента орбиты и числом элементов орбиты t_σ соотношением вида (43):

$$S_{\bar{\sigma}} = t_\sigma S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})}. \quad (54)$$

После фиксации какого-либо элемента орбиты оставшиеся элементы разбиваются на сумму орбит. Для каждой из них справедливо соотношение вида (53), поэтому мощность стабилизатора элемента σ -орбиты $S_{\text{st}}^{(\sigma)}$ выражается через $S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})}$ соотношением

$$S_{\text{st}}^{(\sigma)} = S_{\text{st}}^{(\bar{\sigma})} \left(\frac{S_\sigma}{\kappa_3} \right)^{t_\sigma - 1}. \quad (55)$$

С учетом (51)–(55) соотношение (50) сводится к равенству

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 2. \quad (56)$$

Сведем все множители κ_i в таблицу:

	ss	sn	ns	nn
κ_1	1	1	1	2
κ_2	1	1	2	1
κ_3	2	2	1	1

Здесь пары типа (sn) указывают на симметричность (s) или несимметричность (n) подграфа и линии соответственно. Из таблицы видно, что для всех сочетаний соотношение (56) действительно выполняется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное в настоящей работе соотношение (1) не является специфичным для теории φ^3 , совершенно аналогичным образом оно доказывается и для теории φ^4 . Это соотношение позволяет рассчитывать аномальные размерности и β -функцию непосредственно по диаграммам ренормированных функций, минуя константы ренормировки. R -операция в используемой схеме ренормировки может быть реализована с помощью введения параметров растяжения импульсов, втекающих в существенные подграфы [3], [1]. Это позволяет представить результат ее действия в виде единого интеграла, не содержащего УФ-расходящихся вкладов (они сокращены в явном виде), что делает его удобным для численного расчета и позволяет существенно увеличить точность вычислений.

Эффективность данного подхода проверена нами на теории φ^4 , в которой мы выполнили пятипетлевой расчет β -функции и критических размерностей, результат совпал с точностью до пяти значащих цифр с известным аналитическим ответом [4].

Отметим также, что в использованной нами схеме ренормировки, помимо уравнений ренормгруппы, могут быть получены уравнения Каллана–Симанчика (КС) [5]. Совместное применение уравнений РГ и КС можно использовать для альтернативного доказательства формулы (1).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-00874_а). В.К. Сазонов благодарны Austrian Scientific Fund (FWF) за поддержку (грант № P21970-N16).

Список литературы

- [1] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 100–111.
- [2] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [3] О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, М., 1979.
- [4] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachev, *Phys. Lett. B*, **99**:2 (1981), 147–150; **101**:6 (1981), 457–458; H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, *Phys. Lett. B*, **272**:1–2 (1991), 39–44; Erratum **319**:4 (1993), 545.
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002; H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, World Sci., River Edge, NJ, 2001.