Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ангсачон, С. Н. Манида, М. Е. Чайковский, Законы сохранения для классических частиц в пространстве анти-де Ситтера–Бельтрами, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 13–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:14:18

© 2013 г. Т. Ангсачон*, С. Н. Манида*, М. Е. Чайковский*

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА–БЕЛЬТРАМИ

В пространстве анти-де Ситтера поведение свободных классических точечных частиц определяется законами сохранения. Представлен общий вид этих законов и их реализация в координатах Бельтрами. В этих координатах возможен переход к нерелятивистскому пределу, приводящему к физике в R -пространстве. Построена начальная ковариантная функция распределения идеального газа, равномерно заполняющего все R -пространство.

Ключевые слова: принцип относительности, релятивистская кинематика, пространство анти-де Ситтера, координаты Бельтрами.

DOI: 10.4213/tmf8474

1. ВВЕДЕНИЕ

Пространство-время (анти-)де Ситтера (наряду с пространством Минковского) является максимально симметричным решением уравнений Эйнштейна. В этом пространстве-времени есть десять генераторов симметрии, как и в пространстве Минковского, но при этом существуют две универсальные постоянные, в отличие от одной в пространстве Минковского. Эти две константы имеют различную физическую размерность, и если одну из них выбирают (как и в пространстве Минковского) с размерностью скорости c , то вторую принято выбирать с размерностью квадрата длины $\pm R^2$. В зависимости от знака этой константы мы имеем дело с пространствами де Ситтера или анти-де Ситтера. Сама величина R имеет смысл радиуса положительной (пространство де Ситтера) или отрицательной (пространство анти-де Ситтера) внутренней кривизны.

Несмотря на то что значительное число работ посвящено исследованию свойств этих пространств [1]–[10], кинематика и динамика частиц еще не описана достаточно подробно. В случае пространства де Ситтера подробный анализ динамики частиц приведен в работах [11], [12]. Следуя основным идеям этих работ, мы представляем

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sergey@manida.com

аналогичный анализ законов сохранения и кинематики классических частиц в пространстве анти-де Ситера. В этом пространстве в координатах Бельтрами возможен переход к “нерелятивистскому” пределу $c \rightarrow \infty$. Этот предельный переход, несмотря на свой “нерелятивистский” характер, приводит к кинематике частиц и законам сохранения, которые локально совпадают со своими аналогами в пространстве Минковского [13]–[15]. Однако, в отличие от пространства Минковского, в данном случае удастся пояснить, откуда возникают дополнительные законы сохранения при переходе к механике Галилея–Ньютона, связанные с двенадцатипараметрической группой симметрии Шредингера [16]–[21]. Далее мы строим сферически-симметричное начальное распределение классических частиц в этом пространстве, ковариантное относительно подгруппы трансляций. Его свойства и зависимость от времени получены в явном виде для случая одного пространственного измерения.

2. ГЕНЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА В КООРДИНАТАХ БЕЛЬТРАМИ

Определим четырехмерное (обобщение в случае произвольной размерности пространства тривиально) пространство-время анти-де Ситтера как гиперболическую гиперповерхность

$$AdS_4 = \{X \in M^{(2,3)}, X^2 = \eta_{AB} X^A X^B = R^2\}$$

в пятимерном пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B,$$

где $\eta_{AB} = \text{diag}\{1, 1, -1, -1, -1\}$ в инерциальных системах отсчета и лоренцевых координатах, а индексы A и B принимают значения $-1, 0, 1, 2, 3$.

Группа симметрии $SO(2,3)$ пространства анти-де Ситтера порождается генераторами

$$L_{AB} = \left(X_A \frac{\partial}{\partial X^B} - X_B \frac{\partial}{\partial X^A} \right).$$

Координаты Бельтрами можно определить как проекцию половины гиперболоида на гиперплоскость с лоренцевыми координатами

$$x_\mu = R \frac{X_\mu}{X_{-1}}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

Полученное таким образом многообразие носит название пространства анти-де Ситтера–Бельтрами [10].

Для построения генераторов трансляций $L_{(-1)i}$ рассмотрим инфинитезимальный поворот в плоскости (X_{-1}, X_i) , $i = 1, 2, 3$:

$$X'_{-1} = X_{-1} \text{ch } \alpha + X_i \text{sh } \alpha \simeq X_{-1} + \alpha X_i, \quad (2)$$

$$X'_i = X_i \text{ch } \alpha + X_{-1} \text{sh } \alpha \simeq X_i + \alpha X_{-1}, \quad (3)$$

где α – инфинитезимальный параметр. Подставляя преобразования (2), (3) в формулу (1), получаем явный вид генератора трансляций в координатах Бельтрами:

$$L_{(-1)i} = -\frac{x_i x_j}{R} \frac{\partial}{\partial x_j} + R \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Генератор $L_{0(-1)}$ строится аналогично из инфинитезимального поворота в плоскости (X_0, X_{-1}) :

$$\begin{aligned} X'_0 &= X_0 \cos \alpha + X_{-1} \sin \alpha \simeq X_0 + \alpha X_{-1}, \\ X'_{-1} &= -X_0 \sin \alpha + X_{-1} \cos \alpha \simeq -\alpha X_0 + X_{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя преобразования (4) в формулу (1), получаем явный вид генератора $L_{0(-1)}$ в координатах Бельтрами:

$$L_{0(-1)} = \left(\frac{x_0^2}{R} + R \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{x_0 x_i}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Явный вид генераторов бустов L_{i0} и вращений $J_i = \varepsilon_{ijk} L_{jk}$ в координатах Бельтрами совпадает с соответствующими выражениями в пространстве Минковского в лоренцевых координатах:

$$L_{i0} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad J_i = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (5)$$

Таким образом, мы построили все десять генераторов симметрии в пространстве анти-де Ситтера–Бельтрами.

3. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА

Действие для свободной массивной классической частицы на гиперboloиде в пятимерном пространстве можно представить в виде

$$S = -mc \int [(V^2)^{1/2} + a(X^2 - R^2)] d\lambda, \quad (6)$$

где $X(\lambda)$ – времениподобная кривая с дополнительным условием $X^2 = R^2$, которое задается множителем Лагранжа a . Здесь $V^A(\lambda) = dX^A/d\lambda$ – пятимерная скорость частицы ($X \cdot V = 0$). Действие (6) инвариантно относительно преобразований

$$X_A \rightarrow X_A + \omega_{AB} X^B,$$

где ω_{AB} – десять антисимметричных инфинитезимальных параметров преобразований. Из теоремы Нётер следует сохранение десяти величин вдоль времениподобной геодезической [12]:

$$L_{AB} = \frac{m}{R\sqrt{V^2}} (X_A V_B - X_B V_A). \quad (7)$$

Далее мы опишем сохраняющиеся величины в терминах параметризованной времениподобной геодезической. Поскольку эта геодезическая является пересечением гиперboloида и двумерной плоскости, проходящей через его геометрический центр $(0, 0, 0, 0, 0)$, задача параметризации геодезической сводится к параметризации двумерной плоскости. В отличие от пространства де Ситтера [12], эта параметризация достигается введением двух времениподобных векторов ξ и η ($\xi^2 > 0, \eta^2 > 0$):

$$\xi = (0, \xi_0, \vec{\xi}), \quad \eta = (\eta_{-1}, 0, \vec{\eta}). \quad (8)$$

В этих терминах геодезическая параметризована следующим образом:

$$X = \frac{R(\lambda\xi + \eta)}{\sqrt{\lambda^2\xi^2 + \eta^2 + 2\lambda(\xi \cdot \eta)}}. \quad (9)$$

Подставляя эту параметризацию в (7), получаем сохраняющиеся величины в простом виде:

$$L_{AB} = \frac{m[\eta_A\xi_B - \eta_B\xi_A]}{\sqrt{\eta^2\xi^2 - (\xi \cdot \eta)^2}}. \quad (10)$$

4. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА В КООРДИНАТАХ БЕЛЬТРАМИ

Записывая пятимерные координаты (9) в четырехмерном виде и подставляя их в формулу (1), получаем $x_\mu = \lambda\xi_\mu + \eta_\mu$. Выбирая конкретный вид параметров $\xi = (0, c, \vec{\xi})$ и $\eta = (R, 0, \vec{\eta})$, получаем

$$x_\mu = (\lambda c, \lambda\vec{\xi} + \vec{\eta}).$$

Введенные в (8) параметры геодезической приобретают в координатах Бельтрами простой физический смысл:

$$x_0 = \lambda c, \quad x_i = \lambda\xi_i + \eta_i, \quad \frac{dx_i}{d\lambda} = \dot{x}_i = \xi_i,$$

где η_i – начальная координата, ξ_i – скорость частицы, λ – время.

Теперь получим явные выражения для десяти сохраняющихся величин в координатах Бельтрами. Прежде всего вычислим знаменатель в выражении (10):

$$\eta^2\xi^2 - (\xi \cdot \eta)^2 = R^2c^2 - R^2\dot{\vec{x}}^2 - c^2(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2 + (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2.$$

Теперь сохраняющиеся величины можно представить в виде

$$H = L_{0(-1)} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2 - (\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2/R^2 + (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2/R^2c^2}}, \quad (11)$$

$$K_i = RL_{0i} = \frac{m(x_i - \lambda\dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2 - (\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2/R^2 + (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2/R^2c^2}}, \quad (12)$$

$$J_i = \frac{m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_j x_k}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2 - (\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2/R^2 + (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2/R^2c^2}}, \quad (13)$$

$$P_i = cL_{i(-1)} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2 - (\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2/R^2 + (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2/R^2c^2}}. \quad (14)$$

Общеизвестный предельный переход $R \rightarrow \infty$ приводит нас к обычным законам сохранения в специальной теории относительности. Гораздо менее известный предельный переход $c \rightarrow \infty$ приводит к нас к физике в так называемом R -пространстве [13], к описанию которой мы сейчас и перейдем.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТИКСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим законы сохранения для частиц, которые движутся со скоростями $\dot{x}_i \ll c$ в пространстве анти-де Ситтера–Бельтрами. При этом выражения (11), (12) и (14) принимают вид

$$H = \frac{m}{\sqrt{1 - (\lambda\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}})^2/R^2}}, \quad (15)$$

$$K_i = \frac{m(x_i - \lambda\dot{x}_i)}{R\sqrt{1 - (\lambda\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}})^2/R^2}}, \quad (16)$$

$$P_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - (\lambda\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}})^2/R^2}}. \quad (17)$$

Уравнение массовой поверхности $H^2 - K_i^2 = m^2$ теперь содержит только величины H и K_i . Покажем, что локально рассматриваемая кинематика в R -пространстве не отличается от обычной релятивистской кинематики. Положим $\lambda = T + t$, $R/T \equiv c_0$ и рассмотрим малую пространственно-временную окрестность точки $(T, 0)$: $t \ll T$, $|\vec{x}| \ll R$. Заметим, что при этом не требуется, чтобы выполнялось соотношение $(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2 \ll R^2$. В этом случае выражения (15)–(17) принимают вид

$$H = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c_0^2}}, \quad K_i + \frac{R}{c_0}P_i = \frac{m(x_i - t\dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c_0^2}}, \quad P_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c_0^2}}.$$

Таким образом мы видим, что “космологическая” динамика в “нерелятивистском” пределе локально не отличается от стандартной релятивистской теории со скоростью света c_0 .

6. ЭНЕРГИЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТИКОМ НЕКОСМОЛОГИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Если перейти в выражениях (16), (17) к приближению $r^2 \equiv (\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2 \ll R^2$, то мы получим обычный нерелятивистский трехмерный импульс $P_i = m\dot{x}_i$ и закон движения центра масс $K_i + (R/c_0)P_i = m(x_i - t\dot{x}_i)$. Однако подобное приближение в выражении (15) приводит к соотношению

$$H = m + \frac{m(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2}{2R^2} + O\left(\frac{r^4}{R^4}\right). \quad (18)$$

Вместо обычной нерелятивистской кинетической энергии получаем более сложное выражение. Положим $\lambda = T + \tau$, $\tau \ll T$, и перепишем (18) в виде

$$HR^2 = mR^2 + T^2 \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + T \frac{m\dot{\vec{x}}(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})}{R} + \frac{m(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{2}.$$

Если потребовать дополнительно, чтобы данное выражение сохранялось независимо от выбора точки разложения T , то должны сохраняться по отдельности следующие

величины:

$$H_0 = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2}, \quad (19)$$

$$W = m\dot{\vec{x}}(t\dot{\vec{x}} - \vec{x}), \quad (20)$$

$$I = \frac{m(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{2}. \quad (21)$$

Сохранение величин (20), (21) в дополнение к сохранению кинетической энергии (19) в нерелятивистской физике – это следствие симметрии нерелятивистского действия для точечных свободных частиц относительно группы преобразований Шредингера [16]–[21]. Вышеизложенная процедура не является, конечно, выводом этих дополнительных законов сохранения, но показывает, что изучение кинематики частиц в R -пространстве помогает лучше понять природу симметрии нерелятивистской механики.

7. (

Идеальный газ в R -пространстве) Идеальный газ в R -пространстве

Для иллюстрации приведенной выше кинематики рассмотрим произвольное облако точечных свободных массивных частиц в “нерелятивистском” и “некосмологическом” пределах. Если газ является бесстолкновительным или столкновения абсолютно упругие, то поведение этого облака будет полностью определяться двенадцатью законами сохранения:

$$H_0 = \sum_n \frac{m_n \dot{\vec{x}}_n^2}{2}, \quad (22)$$

$$\vec{P} = \sum_n m_n \dot{\vec{x}}_n, \quad (23)$$

$$\vec{K} = \sum_n m_n (\vec{x}_n - t\dot{\vec{x}}_n) \equiv \vec{K}(0), \quad (24)$$

$$\vec{J} = \sum_n m_n [(\vec{x}_n - t\dot{\vec{x}}_n), \dot{\vec{x}}_n], \quad (25)$$

$$W = \sum_n m_n ((\vec{x}_n - t\dot{\vec{x}}_n), \dot{\vec{x}}_n) \equiv W(0), \quad (26)$$

$$I = \sum_n m_n \frac{(\vec{x}_n - t\dot{\vec{x}}_n)^2}{2} \equiv I(0). \quad (27)$$

Здесь индекс n нумерует различные частицы.

Рассмотрим следующие зависящие от времени конструкции:

$$\vec{K}(t) = \sum_n m_n \vec{x}_n \quad (28)$$

– координата центра масс облака, умноженная на его массу;

$$W(t) = \sum_n m_n (\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n) \quad (29)$$

– коррелятор координат и скоростей частиц (при его отрицательных значениях облако сжимается, при положительных разлетается);

$$I(t) = \sum_n m_n \frac{(\vec{x}_n)^2}{2} \quad (30)$$

– след тензора момента инерции облака (деленный на два), по аналогии с термином “энергия” (energy) предлагаем для этой величины термин “инергия” (inergy).

Из равенств (23) и (24) легко получить явную зависимость от времени величины (28): $\vec{K}(t) = \vec{K}(0) + t\vec{P}$. Это соотношение представляет собой хорошо известный закон движения центра масс системы. Поступая аналогично с выражением (29), из формул (22) и (26) получаем явную зависимость коррелятора от времени:

$$W(t) = W(0) + 2tH_0. \quad (31)$$

И, наконец, из выражения (30) с использованием формул (22) и (31) получаем явную зависимость от времени величины “инергии”:

$$I(t) = I(0) + tW(0) + t^2 H_0.$$

Из положительности величины $I(t)$ вытекает условие $W^2(0) \leq 4H_0 I(0)$ для начального значения модуля коррелятора.

8. КОВАРИАНТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В R -ПРОСТРАНСТВЕ

Полученный в выражении (3) генератор трансляций в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами сохраняет свой вид и в R -пространстве, что приводит к конечным трансляциям вида

$$\vec{r}'_{\parallel} = \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{a}}{1 - \vec{a}\vec{r}/R^2}, \quad \vec{r}'_{\perp} = \frac{\vec{r}_{\perp} \sqrt{1 - a^2/R^2}}{1 - \vec{a}\vec{r}/R^2}, \quad t' = \frac{t \sqrt{1 - a^2/R^2}}{1 - \vec{a}\vec{r}/R^2}. \quad (32)$$

Очевидно, что при таких преобразованиях точка $\vec{a}$ переходит в начало координат, а сфера радиуса R переходит в себя.

Предположим, что в рассматриваемом пространстве находится идеальный газ – совокупность точечных частиц одинаковой массы. Из формул (15)–(17) следует, что в начальный момент весь газ сосредоточен в сфере радиуса R . Наложим условие однородности и изотропности распределения газа. Сферической симметрии добиться легко, а для однородности необходимо выполнение условия $\rho(r) d^3r = \rho(r') d^3r'$. Из этого соотношения и формул (32) найдем плотность в точке r :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 - r^2/R^2)^2}, \quad \rho_0 \equiv \rho(0).$$

Очевидно, что интеграл от этой плотности по всему объему шара расходится.

Из формул (32) можно получить преобразование скоростей частиц при трансляциях. Для получения ковариантного распределения достаточно связать скорость в произвольной точке со скоростью в начале координат:

$$\vec{u}_{\parallel}(r) = \vec{u}_{\parallel}(0) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{u}_{\perp}(0).$$

Предполагая симметричность углового распределения частиц по скоростям в начале координат, получаем функцию распределения скоростей частиц по направлению в точке $x \equiv r/R$:

$$\rho(x, \theta) = \frac{\rho(0)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \frac{1}{1 - x^2}.$$

Аналитическое изучение зависимости этой функции от времени весьма затруднительно, поэтому проведем анализ простейшей одномерной модели.

Зададим на отрезке $[-1, 1]$ распределения плотности $\rho(x) = \rho_0/(1 - x^2)$ и скоростей частиц $u(x) = u_0\sqrt{1 - x^2}$ в начальный момент времени. Найдём зависимость плотности числа частиц от времени. Положение частицы в момент времени t обозначим через $y = x(t)$, а начальное положение – через $x = x(0)$. Скорость этой частицы постоянна и равна $u = u_0\sqrt{1 - x^2}$:

$$y = x + u_0 t \sqrt{1 - x^2}, \quad dy = dx \left(1 - \frac{u_0 t x}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

Плотность числа частиц в процессе движения меняется:

$$\rho(y, t) = \rho(x, 0) \frac{dx}{dy} = \rho(x, 0) \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2} - u_0 t x}. \quad (33)$$

Рассмотрим плотность в начале координат, т. е. при $y = 0$. В этой точке

$$x = -u_0 t \sqrt{1 - x^2}, \quad \rho(x, 0) = \frac{\rho(0, 0)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Подставляя эти величины в (33), получаем оригинальный и нетривиальный результат:

$$\rho(0, t) = \rho(0, 0). \quad (34)$$

Постоянство плотности в начале координат означает также постоянство плотности на всем отрезке. При этом поток вещества за пределы отрезка отличен от нуля. При неизменной плотности скорости частиц меняются со временем. Так, скорость в начале координат в зависимости от времени имеет вид

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + u_0^2 t^2}}.$$

Заметим, что именно требование ковариантности начального распределения плотности внутри отрезка и приводит к такому нетривиальному результату.

Список литературы

- [1] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *A second Poincaré group*, [arXiv:gr-qc/9809061](#).
- [2] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida, J. G. Pereira, *Internat. J. Modern Phys. D*, **13**:10 (2004), 2241–2248, [arXiv:gr-qc/0405104](#).
- [3] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida, J. G. Pereira, *Class. Quantum Grav.*, **24**:6 (2007), 1385–1404, [arXiv:gr-qc/0606122](#).
- [4] H.-Y. Guo, *Sci. China Ser. A*, **51**:4 (2008), 568–603, [arXiv:0707.3855](#).
- [5] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *On de Sitter invariant special relativity and cosmological constant as origin of inertia*, [arXiv:hep-th/0405137](#).

- [6] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, H.-T. Wu, B. Zhou, *The principle of relativity, kinematics and algebraic relations*, arXiv:0812.0871.
- [7] H.-Y. Guo, H.-T. Wu, B. Zhou, *Phys. Lett. B*, **670**:4–5 (2009), 437–441, arXiv:0809.3562.
- [8] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *Class. Quantum Grav.*, **24**:16 (2007), 4009–4035, arXiv:gr-qc/0703078.
- [9] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *Front. Phys. China*, **2**:3 (2007), 358–363, arXiv:hep-th/0607016.
- [10] H.-Y. Guo, *The Beltrami model of de Sitter space: from Snyder’s quantized space-time to de Sitter invariant relativity*, arXiv:hep-th/0607017.
- [11] S. Cacciatori, V. Gorini, A. Kamenshchik, *Ann. Phys. (8)*, **17**:9–10 (2008), 728–768, arXiv:0807.3009.
- [12] S. Cacciatori, V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, *Class. Quantum Grav.*, **25**:7 (2008), 075008, 23 pp., arXiv:0710.0315.
- [13] С.Н. Манида, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 323–336.
- [14] S.N. Manida, *Fock–Lorentz transformations and time-varying speed of light*, arXiv:gr-qc/9905046.
- [15] С.Н. Манида, *Дополнительные главы курса общей физики. Механика*, Изд-во “СОЛЮ”, СПб., 2007.
- [16] O. Jahn, V.V. Sreedhar, *Amer. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1039–1043, arXiv:math-ph/0102011.
- [17] L. O’Raifeartaigh, V.V. Sreedhar, *Ann. Phys.*, **293**:2 (2001), 215–227, arXiv:hep-th/0007199.
- [18] R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **129**:1 (1980), 183–200.
- [19] U. Niederer, *Helv. Phys. Acta*, **45**:5 (1972), 802–810.
- [20] C.R. Hagen, *Phys. Rev. D*, **5**:2 (1972), 377–388.
- [21] R. Jackiw, *Phys. Today*, **25**:1 (1972), 23–29.