Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, Н. М. Гулицкий, Аномальный скейлинг
в статистических моделях переноса пассивного вектор-
ного поля, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 22–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:07:51

© 2013 г.

Н. В. Антонов*, Н. М. Гулицкий*

АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ В СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Методами ренормализационной группы и операторного разложения рассматривается задача стохастического переноса пассивного векторного поля с нелинейным членом наиболее общего вида, разрешенного галилеевой симметрией. Внешнее поле скорости удовлетворяет уравнению Навье–Стокса. Показано, что в инерционном интервале корреляционные функции обладают аномальным скейлингом. Соответствующие аномальные показатели определяются критическими размерностями тензорных составных полей (операторов), целиком построенных из самих полей. Данные аномальные размерности вычислены в ведущем порядке разложения по степенному показателю, входящему в коррелятор внешней силы в уравнении Навье–Стокса (однопетлевое приближение ренормгруппы). Аномальные показатели обладают иерархией, связанной со степенью анизотропии: чем меньше ранг тензорного оператора, тем меньше его размерность. Таким образом, ведущие члены асимптотики и в изотропном, и в анизотропном случаях определяются скалярными операторами, что полностью согласуется с гипотезой Колмогорова о локальном восстановлении изотропии.

Ключевые слова: пассивное векторное поле, турбулентный перенос, аномальный скейлинг, ренормализационная группа, операторное разложение.

DOI: 10.4213/tmf8475

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется моделям турбулентного переноса пассивной скалярной примеси (см. обзор [1] и имеющиеся в нем ссылки). Проблема турбулентного переноса, сама по себе имеющая важное практическое значение, стала краеугольным камнем в изучении развитой гидродинамической турбулентности: эта задача может рассматриваться как исходная точка при изучении явлений перемежаемости и аномального скейлинга в турбулентности в целом [2]. Наиболее значительные успехи были достигнуты на этом пути для модели, предложенной

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петродворец, Россия. E-mail: nikolai.antonov@pobox.spbu.ru, ngulitskiy@gmail.com

Крейчнаном: впервые бесконечный набор аномальных показателей был вычислен на основе микроскопической модели в рамках регулярной теории возмущений [3].

В оригинальной модели Крейчнана поле скорости $v_i(x)$, где $x = \{t, \mathbf{x}\}$, выбирается гауссовым с нулевым временем корреляции, статистически изотропным и несжимаемым, имеющим парную корреляционную функцию вида $\langle vv \rangle \propto \delta(t - t')k^{-d-\xi}$, где $k \equiv |\mathbf{k}|$ – волновое число, d – размерность пространства, ξ – произвольный показатель (с наиболее реалистичным “колмогоровским” значением $\xi = 4/3$).

“Метод нулевых мод”, предложенный в работе [3], основан на том, что благодаря отсутствию временной корреляции поля скорости Крейчнана можно вывести некоторые замкнутые дифференциальные уравнения для одновременных корреляционных функций пассивных полей. В этом смысле данная модель эквивалентна некоторой квантово-механической задаче и является “точно решаемой”. Несмотря на то что эти уравнения нельзя решить в явном виде, аномальные показатели можно определить из анализа их инфракрасной асимптотики (см. работу [1] для подробного обзора и ссылок).

В статье [4] и последующих работах к модели Крейчнана были применены методы ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения (ОР) (см. обзор [5] и имеющиеся в нем ссылки). В рамках данного подхода аномальный скейлинг проявляется как результат существования в ОР некоторых составных полей (“операторов” в квантово-полевой терминологии) с *отрицательными* размерностями, которые и сопоставляются аномальным показателям. Этот факт позволяет построить регулярную теорию возмущений и вычислить аномальные показатели вплоть до порядков ξ^2 [4] и ξ^3 [6]. Кроме того, большим преимуществом метода РГ в сочетании с ОР является его универсальность: метод применим также в случаях конечного времени корреляции или негауссовых перемешивающих полей скорости.

Для пассивно переносимых *векторных* полей любое вычисление показателей для корреляционных функций более высоких порядков требует применения метода РГ даже в $O(\xi)$ -приближении.

Вследствие появления “растягивающего члена” в уравнениях динамики поведение пассивного векторного поля является гораздо более интересным, нежели скалярного: “... в крупномасштабном переносе векторных величин обнаруживается заметно больше жизни” [2]. Действительно, пассивные векторные поля демонстрируют аномальный скейлинг уже на уровне парной корреляционной функции [7]–[9]. Также они обладают интересными крупномасштабными неустойчивостями, которые можно интерпретировать как проявление эффекта динамо [7], [10], [11]. Специальный случай $\mathcal{A} = 0$ (см. ниже) оказывается сходным с турбулентностью в уравнении Навье–Стокса (НС) [12]–[14]. С физической точки зрения пассивные векторные поля могут иметь различный смысл: это может быть магнитное поле, слабые возмущения фоновых потоков, концентрация или плотность примесных частиц с внутренней структурой.

В настоящей работе мы изучаем аномальный скейлинг пассивной векторной величины, которая перемешивается негауссовым полем скорости, обладающим конечным временем корреляции и подчиняющимся уравнению НС.

Статья построена следующим образом: в разделе 2 дано детальное описание стохастической задачи и объяснены предпосылки настоящей работы, а также ее связь

с предыдущими работами; в разделе 3 сформулирована квантово-полевая постановка задачи; в разделе 4 установлена ренормируемость данной модели, выведены соответствующие уравнения РГ и представлены явные однопетлевые результаты для констант перенормировки и функций РГ; возможные инфракрасно-притягивающие (ИК-притягивающие) фиксированные точки обсуждаются в разделе 5; в разделе 6 с помощью ОР показано наличие аномального скейлинга корреляционных функций в инерционном интервале. Соответствующие аномальные показатели определяются критическими размерностями тензорных составных операторов, целиком построенных из пассивных полей; вычисление выполнено в ведущем (однопетлевом) приближении и представлено в разделе 7. Раздел 8 содержит краткое заключение; в частности, в нем обсуждается иерархия анизотропных вкладов.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением модели с поперечными (бездивергентными) векторными полями: пассивным полем $\theta_i(x)$ и перемешивающим полем скорости $v_i(x)$. Уравнение конвекции–диффузии имеет вид

$$\nabla_t \theta_i - \mathcal{A}_0 (\theta_k \partial_k) v_i + \partial_i \mathcal{P} = \kappa_0 \partial^2 \theta_i + \eta_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + (v_k \partial_k), \quad (2.1)$$

где ∇_t – галилеево-ковариантная (лагранжева) производная, $\mathcal{P}(x)$ – давление, κ_0 – коэффициент диффузии, ∂^2 – оператор Лапласа, $\eta_i(x)$ – поперечная гауссова случайная сила с нулевым средним и заданной ковариацией

$$\langle \eta_i(x) \eta_k(x') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(r/L). \quad (2.2)$$

Параметр L является внешним масштабом турбулентности, связанным со *сторонней* силой, C_{ik} – безразмерные функции, обладающие свойством $\partial_i C_{ik} = 0$, конечные при $r = 0$ и быстро убывающие при $r \rightarrow \infty$; их явный вид не является важным и не будет использоваться. Благодаря поперечности полей θ_i и v_i , а именно условиям $\partial_i \theta_i = \partial_i v_i = 0$, давление может быть представлено как решение уравнения Пуассона

$$\partial^2 \mathcal{P} = (\mathcal{A}_0 - 1) \partial_i v_k \partial_k \theta_i. \quad (2.3)$$

Таким образом, член, который отвечает давлению, обеспечивает согласование динамики (2.1) с условием поперечности. Амплитудный множитель $\mathcal{A}_0$ перед “растягивающим членом” $(\theta_k \partial_k) v_i$ не фиксирован галилеевой симметрией и является произвольным. Сформулированная выше модель наиболее общего вида, так называемая $\mathcal{A}$ -модель, была введена и рассматривалась в работах [15]–[17]; ее можно естественным образом объяснить в рамках так называемой мультимасштабной техники.

С физической точки зрения наиболее интересным является случай $\mathcal{A}_0 = 1$, в котором давление обращается в ноль: данный случай соответствует турбулентности в магнитной гидродинамике (МГД) [18]. Данная задача уже неоднократно изучалась, см., например, работы [7]–[9], [19], [20] и ссылки, содержащиеся в них.

В предшествующих работах поле скорости в (2.1) задавалось “моделью быстрых изменений” Крейчнана, т. е. обладало гауссовой статистикой с нулевым временем корреляции и заданной степенной корреляционной функцией. В настоящей работе поле скорости описывается стохастическим уравнением НС

$$\nabla_t v_i = \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i \wp + f_i, \quad (2.4)$$

где ∇_t – лагранжева производная, а $\wp$ и f_i – удельные по массе давление и поперечная случайная сила. Предполагается, что f имеет гауссово распределение с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{k \geq m} d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_f(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (2.5)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $d_f(k)$ – некоторая функция от $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Величина $m = 1/L$, обратная внешнему масштабу турбулентности L , связанному с полем скорости, обеспечивает ИК-регуляризацию. Для простоты мы будем отождествлять данный внешний масштаб, связанный с полем скорости, с внешним масштабом случайной силы, упоминавшимся в (2.2).

Задача (2.4), (2.5) допускает решение методами РГ в том случае, когда коррелятор случайной силы имеет степенной вид [21]:

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-y}, \quad (2.6)$$

где $D_0 > 0$ является амплитудным множителем, а показатель $0 < y \leq 4$ играет роль параметра РГ-разложения. Наиболее реалистичным значением для него является $y = 4$: при $y \rightarrow 4$ и соответствующем выборе амплитуды функция (2.6) стремится к дельта-функции, $d_f(k) \propto \delta(k)$, что отвечает накачке системы энергией через взаимодействие с крупномасштабными турбулентными вихрями (для более детальных пояснений см., например, монографии [22], [23]).

3. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В соответствии с общей теоремой (см., например, книгу [22]) стохастическая задача (2.1)–(2.6) соответствует квантово-полевой модели с удвоенным набором полей $\Phi = \{v, v', \theta, \theta'\}$ и функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \mathcal{S}_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) + \frac{\theta' D_\theta \theta'}{2} + \theta' \{-\nabla_t - \mathcal{A}_0(\theta_k \partial_k) v_i + \kappa_0 \partial^2\} \theta, \quad (3.1)$$

где D_θ – корреляционная функция (2.2) случайной силы η_i в (2.1), а $\mathcal{S}_v$ – функционал действия для задачи (2.4)–(2.6):

$$\mathcal{S}_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{v' D_v v'}{2} + v' \{-\nabla_t + \nu_0 \partial^2\} v, \quad (3.2)$$

причем D_v – корреляционная функция (2.5) случайной силы f_i . Интегрирование по $x = \{t, \mathbf{x}\}$ и суммирование по векторным индексам подразумеваются. Вспомогательные поля v' и θ' также являются поперечными, $\partial_i v'_i = \partial_i \theta'_i = 0$; с помощью интегрирования по частям, используя это обстоятельство, мы можем исключить члены, отвечающие давлению, в правых частях равенств (3.1) и (3.2), например

$$\int dt \int d\mathbf{x} v'_i \partial_i \wp = - \int dt \int d\mathbf{x} \wp (\partial_i v'_i) = 0.$$

Это, конечно, не означает, что данные члены не являются важными: поля v' и θ' действуют как поперечные проекторы на выражения, с которыми производится свертка, оставляя только поперечную часть от них.

Роль констант связи играют три параметра: $g_0 \equiv D_0/\nu_0^3$, $\mathcal{A}_0$ и параметр $u_0 = \kappa_0/\nu_0$, являющийся аналогом обратного числа Прандтля в скалярном случае. По размерности $g_0 \propto \Lambda^y$, $\mathcal{A}_0 \propto \Lambda^0$ и $u_0 \propto \Lambda^0$, где Λ – характерный ультрафиолетовый (УФ) масштаб. Таким образом, модель (3.1), (3.2) является логарифмической (все константы взаимодействия безразмерны) при $y = 0$, а УФ-расходимости проявляются как полюсы по y .

4. УРАВНЕНИЯ РГ И РЕНОРМИРОВКА

Ренормировка и РГ-анализ модели (3.1), (3.2) осуществляется способом, аналогичным описанной в статье [24] процедуре для скалярного поля, которое переносится полем скорости, подчиняющимся уравнению НС. Анализ размерностей показывает, что поверхностные УФ-расходимости присутствуют только в одночастично-неприводимых функциях Грина $\langle v'v \rangle$, $\langle v'vv \rangle$, $\langle \theta'\theta \rangle$ и $\langle \theta'v\theta \rangle$, а соответствующие контрчлены имеют вид $v' \partial_t v$, $v' \partial^2 v$, $v'(v\partial)v$, $\theta' \partial_t \theta$, $\theta' \partial^2 \theta$, $\theta'(\theta\partial)v$ и $\theta'(v\partial)\theta$.

С помощью интегрирования по частям пространственная производная ∂ в вершинах $v'(v\partial)v$, $\theta'(\theta\partial)v$ и $\theta'(v\partial)\theta$ в действии (3.1) может быть переброшена на вспомогательные поля v' и θ' , таким образом, любой контрчлен должен иметь по одной пространственной производной на каждое вспомогательное поле. Это требование исключает контрчлены $v' \partial_t v$ и $\theta' \partial_t \theta$, не имеющие таких производных. Вследствие этого также исключаются структуры $v'(v\partial)v$ и $\theta'(v\partial)\theta$, поскольку благодаря наличию галилеевой симметрии они должны входить в контрчлены только в галилеевоинвариантных комбинациях $v'\nabla_t v$ и $\theta'\nabla_t \theta$.

Оставшиеся три контрчлена $v'\partial^2 v$, $\theta'\partial^2 \theta$ и $\theta'(\theta\partial)v$ могут быть воспроизведены с помощью мультипликативной ренормировки параметров

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad \kappa_0 = \kappa Z_\kappa, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{A} Z_\mathcal{A}, \quad g_0 = g \mu^y Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}; \quad (4.1)$$

при этом ренормировка полей $\Phi = \{v, v', \theta, \theta'\}$ и характерного ИК-параметра m не требуется. Здесь символами ν , g , κ и $\mathcal{A}$ обозначены ренормированные аналоги затравочных параметров ν_0 , g_0 , κ_0 и $\mathcal{A}_0$; ренормировочная масса μ является дополнительным параметром ренормированной теории. Последнее соотношение в (4.1) следует из отсутствия ренормировки амплитуды $D_0 = g_0 \nu_0^3 = g \mu^y \nu^3$ в первом члене действия $\mathcal{S}_{\text{vR}}$. Константы ренормировки $Z_i = Z_i(g, u, \mathcal{A}, d, y)$ содержат в себе все УФ-расходимости, таким образом, функции Грина, будучи выраженными в ренормированных переменных, являются УФ-конечными (т. е. конечными при $y = 0$).

Соответствующее ренормированное действие имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{R}}(\Phi) &= \mathcal{S}_{\text{vR}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) + \frac{\theta' D_\theta \theta'}{2} + \theta' \{ -\nabla_t - \mathcal{A} Z_\mathcal{A} (\theta_k \partial_k) v_i + \kappa Z_\kappa \partial^2 \} \theta, \\ \mathcal{S}_{\text{vR}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) &= \frac{v' D_v v'}{2} + v' \{ -\nabla_t + \nu Z_\nu \partial^2 \} v, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем в соответствии с формулами (4.1) корреляционная функция D_v выражена в ренормированных параметрах. Это действие отличается от исходного (неренормированного) действия (3.1), (3.2) только выбором параметров: $\mathcal{S}_{\text{R}}(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}_0(\Phi, e_0)$, где e_0 – полный набор затравочных параметров, e – их ренормированные аналоги. Поэтому исходные функции Грина $G = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ и ренормированные функции

Грина G_R связаны друг с другом аналогичным образом: $G(e_0, \dots) = G_R(e, \mu, \dots)$, где многоточие отвечает всем прочим аргументам (времени/частоте и координате/импульсу).

Обозначим символом $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ дифференциальную операцию $\mu\partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах e_0 . Действуя этой операцией на обе части уравнения для функций Грина от затравочных и ренормированных параметров, получаем основное уравнение РГ:

$$\{\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u + \beta_{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{A}}\} G_R = 0, \quad (4.3)$$

где $u = \kappa/\nu$, $\mathcal{D}_s = s\partial_s$ для любой переменной s . Функции РГ (аномальная размерность γ и бета-функция) определяются следующим образом: $\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F$ для любой переменной F и

$$\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-y + 3\gamma_\nu], \quad \beta_u = \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = u[\gamma_\nu - \gamma_\kappa], \quad \beta_{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{A} = -\mathcal{A}\gamma_{\mathcal{A}} \quad (4.4)$$

для безразмерных переменных (констант взаимодействия) g , u и $\mathcal{A}$. Правые части равенств (4.4) следуют из определений и уравнений (4.1). Стоит отметить, что дифференциальный оператор в уравнении (4.3) является не чем иным, как оператором $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженным в ренормированных переменных

Однопетлевое вычисление дает следующий ответ:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= 1 - g\bar{S}_d \frac{d-1}{4(d+2)} \frac{1}{y} + O(g^2), \\ Z_{\mathcal{A}} &= 1 + O(g^2), \\ Z_\kappa &= 1 - \frac{g\bar{S}_d}{u(u+1)^2} \frac{Q}{2d(d+2)} \frac{1}{y} + O(g^2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$Q = (u+1)(3\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}d - 2\mathcal{A} + d^2 - 3) - 2\mathcal{A}(\mathcal{A} - 1), \quad \bar{S}_d \equiv \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad (4.6)$$

$S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве. Благодаря тому что поле θ является пассивным, константа ренормировки Z_ν , связанная с полем скорости, оказывается такой же, как и для модели (3.2): она не зависит от параметров u и $\mathcal{A}$, являющихся характеристиками пассивного поля θ . Интересно, что выражение (4.6) для Q упрощается в вышеупомянутых специальных случаях параметра $\mathcal{A}$:

$$Q = \begin{cases} (u+1)(d-1)(d+2) & \text{для } \mathcal{A} = 1, \\ (u+1)(d^2 - 3) & \text{для } \mathcal{A} = 0. \end{cases}$$

Из соотношений (4.5) следуют явные выражения для аномальных размерностей в однопетлевом приближении:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu &= g\bar{S}_d \frac{d-1}{4(d+2)} + O(g^2), \\ \gamma_{\mathcal{A}} &= O(g^2), \\ \gamma_\kappa &= \frac{g\bar{S}_d}{u(u+1)^2} \frac{Q}{2d(d+2)} + O(g^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В модели из работы [15], отличающейся от рассматриваемой нулевым временем корреляции, все нетривиальные фейнмановские диаграммы одночастично-неприводимой функции Грина $\langle \theta' v \theta \rangle$ содержат замкнутые циклы запаздывающих пропагаторов и, следовательно, тождественно равны нулю, поэтому $Z_A = 1$ и $\gamma_A = 0$. В данном случае Z_A и γ_A не содержат члена порядка g из-за сокращения нетривиальных вкладов трех однопетлевых диаграмм одночастично-неприводимой функции Грина $\langle \theta' v \theta \rangle$. Для контрчлена $\theta'(v\partial)\theta$ такое сокращение гарантировано во всех порядках по g в силу наличия галилеевой симметрии (см. выше), в то время как для контрчлена $\theta'(\theta\partial)v$ данный факт выглядит случайным и может быть объяснен слишком простым видом однопетлевых диаграмм: структуры, отвечающие данному контрчлену, входят в диаграммы с теми же коэффициентами и благодаря этому сокращаются. Нет оснований полагать, что этот механизм будет работать и дальше для многопетлевых диаграмм, поэтому Z_A и γ_A могут содержать члены порядка g^2 или выше.

5. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Как хорошо известно, ИК-асимптотики в мультипликативно ренормируемой теории поля определяются ИК-притягивающими фиксированными точками соответствующих уравнений РГ. При этом координаты точек определяются из условия равенства нулю всех бета-функций, $\beta_i(g_*) = 0$, а тип фиксированной точки – матрицей $\Omega = \{\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g_*}\}$: для ИК-притягивающих фиксированных точек данная матрица положительно определена, т.е. вещественная часть всех ее собственных значений больше нуля. Здесь $g = \{g_i\}$ – полный набор констант взаимодействия, а β_i – полный набор соответствующих бета-функций.

Из выражений (4.4) и (4.7) для β_g следует, что модель (3.2) имеет нетривиальную фиксированную точку

$$g_* \bar{S}_d = y \frac{4(d+2)}{3(d-1)} + O(y^2), \quad (5.1)$$

которая является положительной и ИК-притягивающей ($\partial_g \beta_g > 0$) при $y > 0$ (см., например, монографии [22], [23]). Подставляя (5.1) в уравнение $\beta_u = 0$ и используя выражения (4.4) и (4.7), получаем уравнение

$$2Q = u(u+1)^2 d(d-1) \quad (5.2)$$

с функцией Q , определенной в (4.6); данное равенство верно с точностью до членов порядка $O(y)$.

Еще одним уравнением является $\beta_A = 0$. Из формул (4.4) и (4.7) следует, что в первом порядке по g данное условие удовлетворяется автоматически, таким образом, существуют два варианта, различить которые в однопетлевом приближении невозможно: либо $Z_A = 1$ во всех порядках по g , либо присутствуют исчезающие вклады порядка g^2 или старших порядков.

Если $Z_A = 1$ во всех порядках по g , как это имеет место в некоррелированной по времени версии данной модели (см. работу [15]), то уравнение $\beta_A = 0$ становится тождеством и не налагает каких-либо ограничений на координаты фиксированных точек, а уравнение (5.2) определяет точку u_* как функцию свободного параметра A .

В частности, численный расчет показывает, что в наиболее интересном с физической точки зрения случае $d = 3$ положительное решение u_* уравнения (5.2) существует и единственно для всех $\mathcal{A}$. Как функция от $\mathcal{A}$ оно имеет минимум при $\mathcal{A} \simeq -0.5$, равный $u_* \simeq 0.94$, и возрастает как $u_* = |\mathcal{A}| + O(1)$ при $\mathcal{A} \rightarrow \pm\infty$. Частными случаями являются значения $u_* \simeq 1.393$ при $\mathcal{A} = 1$, что согласуется с кинематической фиксированной точкой полномасштабной МГД-задачи [25], $u_* = 1$ при $\mathcal{A} = 0$, что согласуется с выводами работы [13], и $u_* = 1$ при $\mathcal{A} = -1$. Из данного расчета также следует, что указанная фиксированная точка является ИК-притягивающей: $\partial_u \beta_u > 0$, $\partial_{\mathcal{A}} \beta_{\mathcal{A}} = \partial_u \beta_{\mathcal{A}} = 0$.

Подобное поведение функции $u_*(\mathcal{A})$ наблюдается при всех $d > 2$. Как функция переменной d данное решение монотонно убывает и стремится к единице при $d \rightarrow \infty$. Решение в радикалах кубического уравнения (5.2) для произвольного d является слишком громоздким и поэтому в нашей статье не приводится. Для $d \leq 2$ полученные результаты неприменимы, поскольку сама процедура ренормировки действия (3.2) для стохастического уравнения НС должна быть иной (см. книгу [23]).

Если функция $\beta_{\mathcal{A}}$ не равна тождественно нулю и имеет неисчезающие вклады порядка g^2 либо старших порядков, то уравнения $\beta_u = \beta_{\mathcal{A}} = 0$ определяют набор фиксированных точек u_* и $\mathcal{A}_*$. Для нахождения всех возможных точек необходим двухпетлевой расчет $Z_{\mathcal{A}}$. Без всяких вычислений ясно, что $\mathcal{A}_* = 0$ и $\mathcal{A}_* = 1$ являются возможными значениями фиксированной точки $\mathcal{A}$ во всех порядках по g . В первом случае существует дополнительная симметрия по отношению к сдвигу $\theta \rightarrow \theta + \text{const}$ (в стохастическое уравнение (2.1) входят только производные поля θ), во втором случае нелинейный член $V_i = (v_k \partial_k) \theta_i - (\theta_k \partial_k) v_i = \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i)$ в уравнении (2.1) является поперечным ($\partial_i V_i = 0$), таким образом, нелокальный член уравнения (2.3), отвечающий давлению, исчезает. Оба этих свойства сохраняются при процедуре ренормировки.

Существование других фиксированных точек нельзя определить без явного двухпетлевого расчета; такая задача лежит вне рамок настоящей работы. Мы можем только утверждать, что такие точки существуют для пассивного векторного поля, переносимого сжимаемым полем скорости Крейчнана (см. работу [16]).

6. АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ИНЕРЦИОННОМ ИНТЕРВАЛЕ, СОСТАВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

При вычислении аномальных показателей ключевую роль играют критические размерности $\Delta_{n,l}$ неприводимых тензорных полей (“локальных составных операторов” в квантово-полевой терминологии), которые построены целиком из самих полей θ , взятых в одной и той же точке пространства-времени $x = (t, \mathbf{x})$. Такие операторы имеют вид

$$F_{n,l} \equiv \theta_{i_1}(x) \dots \theta_{i_l}(x) (\theta_i(x) \theta_i(x))^p + \dots, \quad (6.1)$$

где $l \leq n$ – число свободных векторных индексов, а $n = l + 2p$ – полное число полей, входящих в данный оператор; тензорные значки и аргумент x функции $F_{n,l}$ подразумеваются. Многоточие в конце формулы отвечает вычитанию структур

с дельта-символами Кронекера, обеспечивающее неприводимость данного тензора, т. е. равенство нулю свертки по любой паре значков (например, $\theta_i \theta_j - \delta_{ij}(\theta_k \theta_k/d)$).

Объектами изучения являются, в частности, одновременные парные корреляционные функции операторов (6.1). Решение уравнения РГ для таких корреляторов дает

$$\langle F_{n,l}(t, \mathbf{x}) F_{k,j}(t, \mathbf{x}') \rangle \simeq r^{-\Delta_{n,l} - \Delta_{k,j}} \zeta_{n,l;k,j}(mr), \quad (6.2)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, а $\zeta(mr)$ – некоторая неизвестная функция. Для упрощения обозначений во всех подобных выражениях тензорные индексы, как и ИК-несущественные параметры (например, Λ и ν_0), будут опускаться.

Данная асимптотика верна при $\Lambda r \gg 1$ и произвольных значениях mr . Инерционный интервал соответствует дополнительному условию $mr \ll 1$, вид скейлинговой функции $\zeta(mr)$ в этом интервале изучается с помощью ОР Вильсона.

В соответствии с ОР одновременное произведение двух ренормируемых операторов $F_1(x)F_2(x')$ имеет вид

$$F_1(x)F_2(x') \simeq \sum_F C_F(\mathbf{r}) F(t, \mathbf{x}), \quad (6.3)$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{x}')/2 = \text{const}$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rightarrow 0$, коэффициенты C_F (вильсоновские коэффициенты) регулярны по m^2 . В соотношении (6.3) F – все возможные ренормированные локальные составные операторы, разрешенные симметрией задачи, а именно все операторы, появляющиеся в тейлоровском разложении, а также те, которые могут примешиваться к ним в результате ренормировки. Если какие-либо из этих операторов имеют дополнительные векторные индексы, то они должны быть свернуты с соответствующими индексами коэффициентов C_F .

Всегда можно предположить, что разложение (6.3) выполнено для операторов с определенными критическими размерностями Δ_F . Тогда корреляционные функции (6.2) получаются с помощью усреднения соотношения (6.3) с весом $e^{\mathcal{S}}$, где $\mathcal{S}$ – функционал действия (4.2); при этом в правой части возникают величины $\langle F \rangle$. Их асимптотика при $m \rightarrow 0$ находится с помощью уравнения РГ и имеет вид $\langle F \rangle \propto m^{\Delta_F}$.

Таким образом, из разложения (6.3) следует, что искомая асимптотика для скейлинговых функций $\zeta(mr)$ асимптотического представления (6.2) в области $mr \ll 1$ имеет вид

$$\zeta(mr) \simeq \sum_F A_F(mr)^{\Delta_F},$$

где коэффициенты $A_F = A_F(mr)$ регулярны по $(mr)^2$.

7. АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ И АНОМАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Специфическая особенность моделей турбулентности – наличие составных операторов с *отрицательными* критическими размерностями. Вклады таких операторов в ОР расходятся при $mr \rightarrow 0$, поэтому они называются опасными [22], [23].

Наиболее опасными являются, очевидно, операторы (6.1) с критической размерностью $\Delta_{n,l} = -n + O(y)$. Как и в случае модели Крейчнана, поскольку коррелятор (2.2) не входит в соответствующие фейнмановские диаграммы, их аномальные

размерности можно вычислить в рамках более простой модели без случайной силы в стохастическом уравнении (2.1) [9]. В таком случае данные операторы являются мультипликативно ренормируемыми, $F_{n,l} = Z_{n,l} F_{n,l}^R$. Практическое однопетлевое вычисление констант ренормировки $Z_{n,l}$ аналогично вычислениям для модели с полем скорости Крейчнана, которая подробно обсуждается в работах [9], [16], поэтому здесь мы приведем лишь ответ:

$$Z_{n,l} = 1 - \frac{g\bar{S}_d}{u(u+1)} \frac{\mathcal{A}^2 Q_{nl}}{4d(d+2)} \frac{1}{y} + O(g^2), \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n,l} &= 2n(n-1) - (d+1)(n-l)(d+n+l-2) = \\ &= -(d-1)(n-l)(d+n+l) + 2l(l-1), \end{aligned}$$

а $\bar{S}_d$ определено в (4.6). Стоит отметить, что такие же полиномы $Q_{n,l}$ возникают и в скалярном случае [26], и в модели Крейчнана для МГД [9].

Для соответствующих аномальных размерностей имеем

$$\gamma_{n,l} = \frac{g\bar{S}_d}{u(u+1)} \frac{\mathcal{A}^2 Q_{nl}}{4d(d+2)} + O(g^2). \quad (7.2)$$

Подставляя значение неподвижной точки (5.1), получаем

$$\gamma_{n,l} = \frac{\mathcal{A}^2}{u(u+1)} \frac{Q_{n,l}}{3d(d-1)} y + O(y^2). \quad (7.3)$$

Если функция $\beta_{\mathcal{A}}$ тождественно равна нулю, в выражение (7.3) необходимо подставить $u_*(\mathcal{A})$ – решение уравнения (5.2); при этом в $\gamma_{n,l}$ сохранится зависимость от свободного параметра $\mathcal{A}$. Если же $\beta_{\mathcal{A}}$ содержит вклады старших порядков по g , то для обоих параметров необходимо использовать их значения u_* , $\mathcal{A}_*$ в фиксированной точке (см. подробное обсуждение в разделе 5). В частности, для $\mathcal{A}_* = 1$ значение фиксированной точки u_* является положительным решением квадратного уравнения $u(u+1) = 2(d+2)/d$. В этом случае формула (7.3) принимает вид

$$\gamma_{n,l} = \frac{Q_{n,l}}{6(d-1)(d+2)} y + O(y^2), \quad (7.4)$$

что согласуется с результатом, полученным в работе [20] для МГД. Кроме того, при подстановке $\xi \rightarrow y/3$ значение аномальной размерности (7.4) совпадает с аналогичным выражением, полученным для модели Крейчнана [9].

При $\mathcal{A} = 0$ операторы $F_{n,l}$ являются УФ-конечными и не требуют ренормировки, поэтому аномальная размерность $\gamma_{n,l}$ тождественно равна нулю во всех порядках по y . В этом случае интересными объектами являются не парные корреляционные функции, а структурные функции; их поведение в инерционном интервале определяется операторами, построенными из производных полей θ (см. работы [12], [13]). Во всех остальных случаях амплитуда $\mathcal{A}^2/u(u+1)$ в (7.3) является положительной для любой физической фиксированной точки. Таким образом, для наиболее важного случая скалярного оператора с $l = 0$ аномальная размерность $\gamma_{n,l}$ отрицательна и при фиксированном n монотонно возрастает с ростом l .

Из соотношения $\Delta_{n,l} = -n + O(y)$ следует, что критические размерности удовлетворяют условию иерархии $\Delta_{n,l} > \Delta_{n,l'}$ при $l > l'$, которое удобно записать в виде неравенства $\partial\Delta_{n,l}/\partial l > 0$. Данный факт, впервые установленный в работе [8] для модели Крейчнана в МГД, имеет глубокий физический смысл: в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущий вклад в асимптотику корреляционных функций вида (6.2) в инерционном интервале $mr \rightarrow 0$ дает изотропная “оболочка” с $l = 0$. Поэтому соответствующие аномальные показатели являются такими же, как и в изотропном случае; анизотропия влияет только на поправки, убывающие при $mr \rightarrow 0$ тем быстрее, чем больше порядок анизотропии l . Этот эффект является подтверждением гипотезы Колмогорова о локальном восстановлении изотропии, что наблюдается как в экспериментах с турбулентностью в жидкости [27], так и в модели пассивного скалярного поля [26].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели задачу о стохастическом переносе пассивного бездивергентного (поперечного) векторного поля θ негауссовым полем скорости, обладающим конечным временем корреляции и подчиняющимся уравнению НС. Такая модель описывается уравнением диффузии с крупномасштабной внешней вынуждающей силой, нелокальным членом давления и наиболее общим видом нелинейности, характеризующимся параметром $\mathcal{A} \propto \mathcal{A}_0$. Показано, что в инерционном интервале корреляционные функции полей θ обнаруживают аномальный скейлинг. Соответствующие аномальные показатели определяются критическими размерностями тензорных составных операторов (6.1), целиком построенных из самих полей θ . Данные аномальные размерности вычислены в ведущем порядке разложения по y (включая анизотропные секторы) – степенному показателю, входящему в коррелятор внешней силы в уравнении НС (однопетлевое приближение РГ).

Как и в случае МГД, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 = 1$, аномальные показатели удовлетворяют условию иерархии, связанному с анизотропией: чем меньше ранг тензорного оператора, тем меньше его размерность, и, как следствие, тем больший вклад он дает в асимптотику в инерционном интервале. Таким образом, в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущие члены асимптотики как в изотропном, так и в анизотропном случаях определяются скалярными операторами, что полностью согласуется с гипотезой о локальном восстановлении изотропии.

Открытым остается вопрос о том, является ли множитель $\mathcal{A}$ перед “растягивающим членом” $(\theta\partial)\nu$ в уравнении диффузии свободным параметром, от которого зависят аномальные показатели или в действительности он стремится к некоторой фиксированной точке. Этот вопрос находится за рамками однопетлевого приближения. Мы надеемся, что его удастся решить в ближайшем будущем.

Благодарности. Авторы выражают признательность Л. Ц. Аджемяну, Михалу Гнатичу и Юхе Хонконену за плодотворные обсуждения задачи. Авторы благодарны оргкомитету IV Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2012), посвященной А. Н. Васильеву (Санкт-Петербург–Петродворец, 24–27 сентября 2012 г.), за возможность представить полученные результаты. Финансирование настоящей работы частично осуществлялось РФФИ (грант № 12-02-00874_а).

Список литературы

- [1] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975, arXiv: cond-mat/0105199.
- [2] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, ФАЗИС, М., 1998.
- [3] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:21 (1995), 3834–3837; D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Phys. Rev. E*, **54**:3 (1996), 2564–2572; M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, *Phys. Rev. E*, **52**:5 (1995), 4924–4941; M. Chertkov, G. Falkovich, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:15 (1996), 2706–2809.
- [4] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **58**:2 (1998), 1823–1835.
- [5] N. V. Antonov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7825–7865.
- [6] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **64**:5 (2001), 056306, 28 pp., arXiv: nlin/0106023.
- [7] M. Vergassola, *Phys. Rev. E*, **53**:4 (1996), R3021–R3024; I. Rogachevskii, N. Kleeorin, *Phys. Rev. E*, **56**:1 (1997), 417–426; I. Arad, L. Biferale, I. Procaccia, *Phys. Rev. E*, **61**:3 (2000), 2654–2662.
- [8] A. Lanotte, A. Mazzino, *Phys. Rev. E*, **60**:4 (1999), R3483–R3486.
- [9] N. V. Antonov, A. Lanotte, A. Mazzino, *Phys. Rev. E*, **61**:6 (2000), 6586–6605; M. Hnatich, M. Jurčišin, A. Mazzino, S. Šprinc, *Acta Phys. Slovaca*, **52**:6 (2002), 559–564; M. Hnatich, J. Honkonen, M. Jurčišin, A. Mazzino, S. Šprinc, *Phys. Rev. E*, **71**:6 (2005), 066312, 15 pp.
- [10] А. П. Казанцев, *ЖЭТФ*, **53**:5 (1968), 1806–1813.
- [11] D. Vincenzi, *J. Statist. Phys.*, **106**:5–6 (2002), 1073–1091; H. Arponen, P. Horvai, *J. Statist. Phys.*, **129**:2 (2007), 205–239, arXiv: nlin/0610023; H. Arponen, *Phys. Rev. E*, **81**:3 (2010), 036325, 8 pp.
- [12] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov, *Phys. Rev. E*, **64**:4 (2001), 046310, 30 pp., arXiv: nlin/0104012; Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, П. Б. Гольдин, М. В. Компаниец, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*. Вып. 1, 2009, 55–66.
- [13] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, P. B. Gol'din, M. V. Kompaniets, *J. Phys. A*, **46**:13 (2013), 135002, 16 pp., arXiv: 1212.3941.
- [14] E. Jurčišinova, M. Jurčišin, R. Remecký, M. Scholtz, *Phys. Particles Nuclei Lett.*, **5**:3 (2008), 219–222.
- [15] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. Mazzino, P. Muratore-Ginanneschi, A. V. Runov, *Europhys. Lett.*, **55**:6 (2001), 801–806.
- [16] N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, M. Jurčišin, *Phys. Rev. E*, **68**:4 (2003), 046306, 25 pp., arXiv: nlin/0305024.
- [17] H. Arponen, *Phys. Rev. E*, **79**:5 (2009), 056303, 14 pp., arXiv: 0811.0510.
- [18] Ю. В. Новожилов, Ю. А. Яппа, *Электродинамика*, Наука, М., 1978; Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, РХД, Ижевск, 2006.
- [19] N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, “Two-loop calculation of the anomalous exponents in the Kazantsev-Kraichnan model of magnetic hydrodynamics”, *Mathematical Modeling and Computational Science* (Stara Lesna, Slovakia, July 4–8, 2011), Lecture Notes in Computer Science, **7125**, eds. G. Adam, J. Busa, M. Hnatic, Springer, Berlin, 2012, 128–135; N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, *Phys. Rev. E*, **85**:6 (2012), 065301, 4 pp., arXiv: 1202.5992; Erratum **87**:3 (2013), 039902, 1 pp.; E. Jurčišinova, M. Jurčišin, *J. Phys. A*, **45**:48 (2012), 485501.
- [20] E. Jurčišinova, M. Jurčišin, R. Remecký, *J. Phys. A*, **42**:27 (2009), 275501, 21 pp.
- [21] C. De Dominicis, P. C. Martin, *Phys. Rev. A*, **19**:1 (1979), 419–422; P. L. Sulem, J. D. Fournier, A. Pouquet, “Fully developed turbulence and renormalization group”, *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics* (University of Geneva, Switzerland, April 2–6, 1979), Lecture Notes in Physics, **104**, ed. C. P. Enz, 1979, 320–335; J.-D. Fournier, U. Frisch, *Phys. Rev. A*, **28**:2 (1983), 1000–1002; Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, *ТМФ*, **57**:2 (1983), 268–281.

- [22] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [23] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *Метод ренормализационной группы в теории развитой турбулентности*, Изд-во СПбУ, СПб., 1998.
- [24] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, T. L. Kim, *Phys. Rev. E*, **71**:1 (2005), 016303, 20 pp., arXiv:nlin/0408057.
- [25] J. D. Fournier, P. L. Sulem, A. Pouquet, *J. Phys. A*, **15**:4 (1982), 1393–1420; Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич, *ТМФ*, **64**:2 (1985), 196–207.
- [26] N. V. Antonov, *Phys. Rev. E*, **60**:6 (1999), 6691–6707.
- [27] V. Borue, S. A. Orszag, *J. Fluid Mech.*, **306** (1994), 293–323; I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:24 (1998), 5330–5333.