Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, Вычисление корреляционных функций в полностью асимметричных точно решаемых моделях на кольце, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 370–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:35:09

© 2013 г.

Н. М. Боголюбов*

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫХ ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЯХ НА КОЛЬЦЕ

Рассмотрены точно решаемые полностью асимметричные модели маломерной неравновесной статистической физики на периодической цепочке, а именно полностью асимметричный простой процесс с запретом и полностью асимметричный простой процесс с нулевым радиусом. Описан метод вычисления корреляционных функций моделей на периодической решетке. Скалярные произведения векторов состояний моделей представлены в виде определителей.

Ключевые слова: асимметричные процессы, интегрируемые системы, корреляционные функции.

DOI: 10.4213/tmf8476

1. ВВЕДЕНИЕ

Полностью асимметричные процессы описывают систему неразличимых частиц на одномерной решетке, движущихся случайным образом в одном направлении справа налево с одинаковой постоянной перескока в соседний узел решетки. В каждый момент времени лишь одна частица покидает занятый узел. Когда частицы обладают отталкивательным взаимодействием с твердой сердцевиной, принцип исключения запрещает более чем одной частице находиться в узле решетки. В этом случае модель называется *полностью асимметричный простой процесс с запретом* (общепринятое сокращенное названия модели: TASEP – totally asymmetric simple exclusion process). Если частицы обладают нулевым радиусом взаимодействия, то каждый узел решетки может содержать любое целое число частиц. Эта модель называется *полностью асимметричный простой процесс нулевого радиуса* (общепринятое сокращенное названия модели: TAZRP – totally asymmetric simple zero range process).

Модели подобного типа были предложены в середине прошлого века [1] и с тех пор интенсивно исследуются с помощью различных методов [2]–[18]. В настоящей статье мы сосредоточимся на подходе к решению моделей, основанном на квантовом

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

методе обратной задачи (КМОЗ) [19]–[22]. КМОЗ применялся к исследованию модели TAZRP в работах [23]–[27], эту модель можно рассматривать как специальный случай более общей q -бозонной модели [6], [28].

В настоящей статье мы описываем метод вычисления корреляционных функций моделей на периодической решетке. Скалярные произведения векторов состояний моделей представлены в виде определителей. В разделе 2 мы приводим краткое квантово-механическое описание систем TASEP и TAZRP. Подход КМОЗ к решению моделей рассмотрен в разделе 3, а вычисление скалярных произведений и корреляционных функций проведено в разделе 4.

2. ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Одним из способов описания TASEP на решетке, состоящей из M узлов, является спиновое описание: состояние $|\uparrow\rangle$ со спином вверх в узле решетки соответствует пустому узлу, а состояние $|\downarrow\rangle$ со спином вниз – заполненному. Конфигурации из N частиц ($2N \leq M$), расположенных в узлах m_i и образующих строгую последовательность

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N), \quad M \geq m_1 > m_2 > \dots > m_N \geq 1,$$

ставится в соответствие базисный вектор

$$|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle = \sigma_{m_1}^- \sigma_{m_2}^- \dots \sigma_{m_N}^- |0\rangle,$$

где $|0\rangle$ является состоянием со всеми спинами вверх: $|0\rangle = \bigotimes_{i=1}^M |\uparrow\rangle_i$. Полное число конфигураций равно

$$\Omega_E = \frac{M!}{N!(M-N)!}. \quad (1)$$

Генератором описанного выше процесса с запретом является неэрмитов гамильтониан [2]

$$H = - \sum_{j=1}^M \left\{ \sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ + \frac{1}{4} (\sigma_{j+1}^z \sigma_j^z - 1) \right\}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma^{\pm, z}$ – матрицы Паули, матрица с индексом j действует нетривиально только в j -м спиновом подпространстве полного спинового пространства решетки $(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$: $s_j = I \otimes \dots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \dots \otimes I$. При этом наложены периодические граничные условия $\sigma_n = \sigma_{n+M}$.

Если вести вектор вероятности

$$|\Psi_N\rangle_t = \sum_{\mathbf{m}} P_t(m_1, m_2, \dots, m_N) |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle,$$

где $P_t(m_1, m_2, \dots, m_N)$ есть вероятность обнаружить систему в конфигурации $\mathbf{m}$ в момент времени t , а суммирование ведется по Ω_E (1) строгим разбиениям $\mathbf{m}$, то основное кинетическое уравнение можно записать в виде уравнения Шредингера по мнимому времени:

$$\frac{d}{dt} |\Psi_N\rangle_t = -H |\Psi_N\rangle_t. \quad (3)$$

В стационарном состоянии каждая спиновая конфигурация $\mathbf{m}$ из N спинов имеет одинаковый вес:

$$|S_N^E\rangle = \frac{1}{\Omega_E} \sum_{\mathbf{m}} |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle.$$

Данное состояние является основным состоянием гамильтониана (2) с собственным значением, равным нулю: $H|S_N^E\rangle = 0$. Левый собственный вектор гамильтониана H с нулевым собственным значением есть

$$\langle S_N^E| = \sum_{\mathbf{m}} \langle m_1, m_2, \dots, m_N|.$$

Конфигурация N частиц в модели TAZRP может быть представлена набором $\mathbf{k} = (k_M, \dots, k_2, k_1)$ чисел заполнения k_j , удовлетворяющих условиям

$$0 \leq k_1, k_2, \dots, k_M \leq N, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_M = N.$$

Чтобы описать динамику системы с помощью квантово-механической модели, следует представить конфигурацию частиц как фокковский вектор $|k_1, k_2, \dots, k_M\rangle$ и определить вектор вероятности

$$|\Psi_N\rangle_t = \sum_{\mathbf{k}} P_t(k_1, k_2, \dots, k_M) |k_1, k_2, \dots, k_M\rangle,$$

где суммирование ведется по

$$\Omega_Z = \frac{(N + M - 1)!}{N!(M - 1)!}$$

наборам чисел заполнения $\mathbf{k}$, а $P_t(k_1, k_2, \dots, k_M)$ – вероятность находиться в конфигурации $(k_1, k_2, \dots, k_M)$ в момент времени t .

Генератор модели TAZRP можно представить в виде [26]

$$H = - \sum_{m=1}^M (\phi_m \phi_{m+1}^\dagger - \phi_m^\dagger \phi_m) = - \sum_{m=1}^M (\phi_{m+1}^\dagger - \phi_m^\dagger) \phi_m. \quad (4)$$

Фазовые операторы $\phi_n, \phi_n^\dagger$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{N}_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [\hat{N}_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij},$$

где $\hat{N}_j$ – оператор числа частиц, а $\pi_i = 1 - \phi_i^\dagger \phi_i$ есть вакуумный проектор.

Далее, фокковские векторы $|k_1, k_2, \dots, k_M\rangle$ порождаются из вакуумного состояния $|0\rangle = \prod_{j=1}^M |0\rangle_j$ с помощью действия повышающих операторов $\phi_j^\dagger$:

$$|k_1, k_2, \dots, k_M\rangle = \prod_{j=1}^M (\phi_j^\dagger)^{k_j} |0\rangle, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \sum_{j=1}^M k_j = N. \quad (5)$$

Оператор

$$\hat{K} = \sum_{m=1}^M (1 - \pi_m) = \sum_{m=1}^M \phi_m^\dagger \phi_m$$

задает число K оккупированных узлов решетки в конфигурации $(k_1, k_2, \dots, k_M)$:

$$\widehat{K}|k_1, k_2, \dots, k_M\rangle = K|k_1, k_2, \dots, k_M\rangle.$$

Эволюция квантовой системы определяется уравнением Шредингера (3) по мнимому времени с гамильтонианом (4). Стационарное решение этого уравнения соответствует установившемуся состоянию $|S_N^Z\rangle$, в котором все наборы $\mathbf{k}$ чисел заполнения имеют одинаковый вес:

$$|S_N^Z\rangle = \frac{1}{\Omega_Z} \sum_{\mathbf{k}} |k_1, k_2, \dots, k_M\rangle.$$

Данное состояние является основным состоянием гамильтониана (4) с нулевым собственным значением: $H|S_N^Z\rangle = 0$. Левое стационарное состояние имеет вид

$$\langle S_N^Z| = \sum_{\mathbf{k}} \langle k_1, k_2, \dots, k_M|.$$

3. ПОДХОД КМОЗ К РЕШЕНИЮ АСИММЕТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

С точки зрения КМОЗ описанные модели связаны с R -матрицей вида

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}, \quad u, v \in \mathbb{C}.$$

L -операторы моделей удовлетворяют сплетающему условию

$$R(u, v)(L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u))R(u, v).$$

Произведение L -операторов образует матрицу монодромии. Для вычисления корреляционных функций моделей удобно представить ее в виде

$$\begin{aligned} T(u) &= L(M|u)L(M-1|u)\dots L(1|u) = T_{M-1}(u)L(1|u) = \\ &= \begin{pmatrix} A_{M-1}(u) & B_{M-1}(u) \\ C_{M-1}(u) & D_{M-1}(u) \end{pmatrix} L(1|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Перестановочные соотношения матричных элементов матрицы монодромии определяются той же R -матрицей (6):

$$R(u, v)(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))R(u, v). \quad (8)$$

Матрица перехода $\tau(u)$ определяется как матричный след матрицы монодромии:

$$\tau(u) = \text{tr } T(u) = (A(u) + D(u)). \quad (9)$$

Соотношение (8) означает, что $[\tau(u), \tau(v)] = 0$ при произвольных значениях параметров $u, v \in \mathbb{C}$.

L -оператор модели TASEP [24], [26] есть (2×2) -матрица с матричными элементами, действующими на пространстве состояний спиновой ($s = 1/2$) цепочки из M узлов:

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} us_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & uI - u^{-1}s_n \end{pmatrix},$$

где проектор на состояние со спином вниз $s_n = (I_n - \sigma_n^z)/2$, а параметр $u \in \mathbb{C}$.

В терминах матрицы перехода гамильтониан (2) имеет вид [29]

$$H = -\frac{1}{2}\tau^{-1}(1)\frac{\partial\tau(u)}{\partial u}\Big|_{u=1} + M.$$

L -оператор модели TAZRP [26] это (2×2) -матрица с матричными элементами, действующими в пространстве Фока (5):

$$L(n|u) \equiv \begin{pmatrix} u^{-1} + u\pi_n & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан модели (4) выражается через матрицу перехода (9) [26], [29]:

$$H = -\frac{\partial(u^M\tau(u))}{\partial u^2}\Big|_{u=0} + M.$$

Правые N -частичные векторы состояний моделей строятся путем последовательного применения операторов $\tilde{B}(u) \equiv u^{-(M-1)}B(u)$ к производящему состоянию $|0\rangle$:

$$|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i)|0\rangle, \quad (10)$$

где u_j – произвольные параметры. Производящие состояния являются собственными векторами операторов $A(u)$ и $D(u)$,

$$A(u)|0\rangle = \alpha(u)|0\rangle, \quad D(u)|0\rangle = \delta(u)|0\rangle,$$

с собственными значениями

$$\alpha(u) = u^M, \quad \delta(u) = (u - u^{-1})^M \quad (11)$$

для модели TASEP и собственными значениями

$$\alpha(u) = (u^{-1} + u)^M, \quad \delta(u) = u^M \quad (12)$$

для модели TAZRP. Левый N -частичный вектор есть

$$\langle\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)| = \left\langle 0 \left| \prod_{i=1}^N \tilde{C}(u_i), \quad \tilde{C}(u_i) = u^{-(M-1)}C(u), \quad (13) \right. \right.$$

а $\langle 0|B(u) = 0$.

Согласно алгебраическому анзацу Бете векторы состояний (10) и (13) являются левыми и правыми собственными векторами гамильтонианов (2) и (4), если параметры $u_1, u_2, \dots, u_N$ удовлетворяют уравнениям Бете. Эти уравнения имеют вид

$$(1 - u_n^{-2})^M u_n^{2N} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N u_j^2 \quad (14)$$

для модели TASEP и вид

$$(1 + u_n^{-2})^M u_n^{-2N} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N u_j^{-2} \quad (15)$$

для модели TAZRP.

Собственные энергии рассматриваемых моделей даются выражениями [29]

$$E_N^E = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{u_j^2 - 1}, \quad E_N^Z = \sum_{m=1}^N u_m^{-2}$$

для модели TASEP и модели TAZRP соответственно. Специальное решение вида $u_1 = u_2 = \dots = u_N = \infty$ уравнений Бете (14), (15) соответствует стационарным состояниям $|S_N^{T,Z}\rangle$ с нулевыми собственными значениями $E_N^{T,Z} = 0$. Из определения (10) мы получаем представления для стационарных состояний:

$$|S_N\rangle = \frac{1}{\Omega_E} \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i) |0\rangle, \quad \langle S_N| = \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \langle 0| \prod_{i=1}^N \tilde{C}(u_i). \quad (16)$$

4. СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Скалярные произведения векторов состояний интегрируемых моделей, связанных с R -матрицей (6), определяются формулой [30]

$$\begin{aligned} \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \\ = (-1)^{N(N-1)/2} \Delta^{-1}(v^{-2}) \Delta^{-1}(u^{-2}) \prod_{j=1}^N (v_j^2 u_j^2)^{-(N+M)} \det Q, \end{aligned} \quad (17)$$

где матричные элементы $(N \times N)$ -матрицы Q равны

$$Q_{jk} = \frac{\alpha(v_j) \delta(u_k) (u_k/v_j)^{N-1} - \alpha(u_k) \delta(v_j) (u_k/v_j)^{-N+1}}{u_k/v_j - v_j/u_k}.$$

Функции $\alpha(u)$ и $\delta(u)$ для моделей TASEP и TAZRP даются формулами (11) и (12) соответственно. В формуле (17) $\Delta(x) = \prod_{j>k} (x_k - x_j)$ есть определитель Вандермонда.

При вычислении корреляционных функций рассматриваемых моделей нам необходимо знать проекцию вектора состояния на стационарное состояние. Согласно представлению (16) имеем

$$\langle S_N | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \lim_{\{v\} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle. \quad (18)$$

Взяв этот предел в формуле (17), получим [17], [29]

$$\langle S_N | \Phi_N(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \prod_{N \geq l > n \geq 1} \frac{u_l^2 u_n^2}{u_l^2 - u_n^2} \det U,$$

где U – это $(N \times N)$ -матрица с матричными элементами

$$U_{jk} = \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{-2(N-j-1+n)}, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

$$U_{Nk} = - \sum_{n=N}^M (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{-2(n-1)}$$

для модели TASEP и матричными элементами

$$U_{jk} = u_k^{-2(N-j-1)} [(1 + u_k^{-2})^M - \delta_{jN}], \quad 1 \leq j \leq N, \quad (19)$$

для модели TAZRP.

Подход к вычислению корреляционных функций мы продемонстрируем на примере модели TAZRP, хотя данный метод применим к обоим моделям.

Рассмотрим корреляционную функцию вида

$$\Omega_Z^{-1} \langle S_N^Z | \Pi_m e^{-tH} \Pi_m | S_N^Z \rangle, \quad (20)$$

где проектор $\Pi_m = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m$ определяет область длины m , свободную от частиц. Вычисление корреляционной функции (20) начнем с вычисления матричного элемента $\langle S_N | \Pi_m | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle$, который согласно (16) выражается через среднее $\langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Pi_m | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle$. Умножив матрицу монодромии (7) слева на оператор π_1 и воспользовавшись коммутативностью этого оператора с матричными элементами матрицы монодромии $T_{M-1}(u)$, получим $\pi_1 B(u) = u B_{M-1}(u) \pi_1$. Умножение справа дает $C(u) \pi_1 = (u + u^{-1}) \pi_1 C_{M-1}(u)$. Обобщение данной процедуры приводит к следующим перестановочным соотношениям:

$$\Pi_m B(u) = u^m B_{M-m}(u) \Pi_m, \quad C(u) \Pi_m = (u + u^{-1})^m \Pi_m C_{M-m}(u),$$

где $B_{M-m}(u)$ и $C_{M-m}(u)$ являются операторами рождения и уничтожения на решетке с $M - m$ узлами. Воспользовавшись явными выражениями для векторов состояний (10) и (13), мы можем свести вычисление среднего

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Pi_m | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \\ & = \left\langle 0 \left| \prod_{j=1}^N \tilde{C}(v_j) \Pi_m \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \prod_{j=1}^N \tilde{C}(v_j) \Pi_m^2 \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i) \right| 0 \right\rangle = \\ & = \prod_{k=1}^N (1 + v_k^{-2})^m \left\langle 0 \left| \prod_{j=1}^N \tilde{C}_{M-m}(v_j) \prod_{i=1}^N \tilde{B}_{M-m}(u_i) \right| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

к вычислению скалярного произведения векторов состояний, определенных на решетке с $M - m$ узлами. Взяв предел (18), получим

$$\langle S_N^Z | \Pi_m | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \prod_{N \geq l > n \geq 1} \frac{u_l^2 u_n^2}{u_l^2 - u_n^2} \det U^{(M-m)},$$

где матричные элементы $(N \times N)$ -матрицы $U^{(M-m)}$ определяются формулой (19), в которой M заменено на $M - m$. Матричный элемент $\langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Pi_m | S_N^Z \rangle$ дается такой же формулой с транспонированной матрицей $U^{(M-m)}$.

В работе [29] было доказано, что собственные векторы моделей образуют полную систему. Мы имеем разложение единичного оператора

$$I = \sum_{\{u\}} \frac{|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle \langle \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)|}{\mathcal{N}^2(u_1, u_2, \dots, u_N)},$$

где суммирование ведется по всем различным решениям уравнения Бете (14) или уравнения Бете (15), а $\mathcal{N}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ – нормы соответствующих собственных векторов. Подставляя разложение единичного оператора в формулу (20), мы получаем точное выражение для корреляционной функции модели TAZRP на решетке конечной длины. Аналогично вычисляются корреляционные функции модели TASEP.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 10-01-00600).

Список литературы

- [1] C. T. MacDonald, J. H. Gibbs, A. C. Pipkin, *Biopolimers*, **6**:1 (1968), 1–25.
- [2] L.-H. Gwa, H. Spohn, *Phys. Rev. A*, **46**:2 (1992), 844–854.
- [3] B. Derrida, J. Lebowitz, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2 (1998), 209–213, arXiv:cond-mat/9809044.
- [4] M. R. Evans, *Brazilian J. Phys.*, **30**:1 (2000), 42–57.
- [5] V. B. Priezzhev, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:5 (2003), 050601, 4 pp., arXiv:cond-mat/0211052.
- [6] A. M. Povolotsky, *Phys. Rev. E*, **69**:6 (2004), 061109, 7 pp., arXiv:cond-mat/0401249.
- [7] M. Prähofer, H. Spohn, *J. Statist. Phys.*, **115**:1–2 (2004), 255–279, arXiv:cond-mat/0212519.
- [8] O. Golinelli, K. Mallick, *J. Phys. A*, **37**:10 (2004), 3321–3331, arXiv:cond-mat/0312371.
- [9] M. R. Evans, T. Hanney, *J. Phys. A*, **38**:19 (2005), R195–R240, arXiv:cond-mat/0501338.
- [10] V. B. Priezzhev, *Pramana*, **64**:6 (2005), 915–925.
- [11] A. M. Povolotsky, J. F. F. Mendes, *J. Statist. Phys.*, **123**:1 (2006), 125–166, arXiv:cond-mat/0411558.
- [12] A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *J. Stat. Mech.*, 2006, P07002, 28 pp., arXiv:cond-mat/0605150.
- [13] M. Kanai, *J. Phys. A*, **40**:26 (2007), 7127–7138, arXiv:cond-mat/0701190.
- [14] A. Borodin, P. Ferrari, M. Prahofer, T. Sasamoto, *J. Statist. Phys.*, **129**:5–6 (2007), 1055–1080, arXiv:math-ph/0608056.
- [15] A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *J. Stat. Mech.*, **8** (2007), P08018, 27 pp.
- [16] S. Prolhac, K. Mallick, *J. Phys. A*, **41**:17 (2008), 175002, 20 pp., arXiv:0801.4659.
- [17] N. M. Bogoliubov, *SIGMA*, **5** (2009), 052, 11 pp., arXiv:0904.3680.
- [18] Y. Yamada, M. Katori, *Phys. Rev. E*, **84**:4 (2011), 041141, 8 pp., arXiv:1108.0753.
- [19] L. D. Faddeev, *Sov. Sci. Rev. Math. C*, **1** (1980), 107–155; “Quantum completely integrable models in field theory”, *40 Years in Mathematical Physics*, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, **2**, World Sci., Singapore, 1995, 187–235.
- [20] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, 1982, 61–119.
- [21] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

- [22] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Наука, М., 1992.
- [23] J. D. Noh, D. Kim, *Phys. Rev. E*, **49**:3 (1994), 1943–1961, arXiv: cond-mat/9312001.
- [24] D. Kim, *Phys. Rev. E*, **52**:4 (1995), 3512–3524.
- [25] D. S. Lee, D. Kim, *Phys. Rev. E*, **59**:6 (1999), 6476–6482, arXiv: cond-mat/9902001.
- [26] N. M. Bogoliubov, T. Nassar, *Phys. Lett. A*, **234**:5 (1997), 345–350.
- [27] O. Golinelli, K. Mallick, *J. Phys. A*, **39**:41 (2006), 12679–12705, arXiv: cond-mat/0611701.
- [28] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, *Nucl. Phys. B*, **516**:3 (1998), 501–528.
- [29] Н. М. Боголюбов, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **398** (2012), 5–25.
- [30] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38**:43 (2005), 9415–9430, arXiv: cond-mat/0503748.