Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, Осциллятор
Чебышёва–Коорнвиндера, *ТМФ*, 2013, том 175, но-
мер 3, 379–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:15:47

© 2013 г.

В. В. Борзов*, Е. В. Дамаскинский†

ОСЦИЛЛЯТОР ЧЕБЫШЁВА–КООРНВИНДЕРА

Построен обобщенный осциллятор, связанный с полиномами Чебышёва–Коорнвиндера от двух переменных, ассоциированными с системой корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$.

Ключевые слова: обобщенный осциллятор, многочлены Чебышёва–Коорнвиндера.

DOI: 10.4213/tmf8477

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрос интерес к построению, исследованию и применениям ортогональных многочленов от нескольких переменных [1], [2]. Широкий класс таких многочленов связан с корневыми диаграммами алгебр Ли [3], [4]. Одними из первых работ в этом направлении были работы Коорнвиндера [5] (изложение основных результатов см. в монографии [6]), где были введены ортогональные полиномы от двух переменных $\{U_{k,l}(z, \bar{z})\}_{k,l=0}^{\infty}$, связанные с представлениями алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$ и являющиеся естественными обобщениями многочленов Чебышёва. Эти полиномы Чебышёва–Коорнвиндера (ЧК) могут быть определены рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} z U_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k+1,l}(z, \bar{z}) + U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}), \\ \bar{z} U_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k,l+1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

и условиями

$$U_{0,-1} = U_{-1,0} = 0, U_{0,0} = 1, \quad \overline{U}_{k,l}(z, \bar{z}) = U_{l,k}(z, \bar{z}) = U_{k,l}(\bar{z}, z).$$

Известно [5], что полиномы ЧК образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(S; \mu(dx, dy))$, где S – область, ограниченная гипоциклоидой Штейнера (см. рис. 1), а μ – вероятностная мера на S :

$$\mu(dx, dy) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{27 - 18z\bar{z} + 4z^3 + 4\bar{z}^3 - \bar{z}^2 z^2} dx dy, \quad z = x + iy.$$

*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

†Военный инженерный технический институт, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Рис. 1. Гипоциклоида Штейнера.

В дальнейшем мы будем использовать следующие ортогональные разложения $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}, \quad N = k + l, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{even}} \oplus \mathcal{H}_{\text{odd}}.$$

Здесь N -частичный сектор $\mathcal{H}^{(N)}$ является замыканием в $\mathcal{H}$ линейной оболочки множества базисных векторов $U_{k,l}$ с $k + l = N$, а подпространства $\mathcal{H}_{\text{even}}$ и $\mathcal{H}_{\text{odd}}$ — замыкания линейных оболочек множеств

$$\{U_{k,l} : k + l = 2n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{U_{k,l} : k + l = 2n + 1\}_{n=0}^{\infty}.$$

Далее мы будем обозначать через $\mathcal{H}_{\bullet,0}$ и $\mathcal{H}_{0,\bullet}$ замыкания в $\mathcal{H}$ линейных оболочек $\{U_{k,0}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{U_{0,l}\}_{l=0}^{\infty}$, а также положим $\mathcal{H}^{\bullet,0} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{\bullet,0}$ и $\mathcal{H}^{0,\bullet} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{0,\bullet}$.

В настоящей работе предложенная в [7] конструкция обобщенного осциллятора, связанного с ортонормированной системой полиномов на вещественной оси, переносится на случай полиномов ЧК от двух переменных. Мы будем рассматривать этот осциллятор (осциллятор ЧК) как объединение четырех осцилляторов — “секториального”, “радиального” и двух “граничных”. Лестничные операторы $a_{\text{sect}}^{\pm}$ секториального осциллятора будут действовать внутри подпространств $\mathcal{H}^{(N)}$. Лестничные операторы $a_{\text{rad}}^{\pm}$ радиального оператора преобразуют подпространство $\mathcal{H}^{(N)}$ в подпространства $\mathcal{H}^{(N \pm 2)}$. Операторы $a_{\text{sect}}^{\pm}$ и $a_{\text{rad}}^{\pm}$ оставляют инвариантными подпространства $\mathcal{H}_{\text{even}}$ и $\mathcal{H}_{\text{odd}}$. Наконец, операторы $a_{\bullet,0}^{\pm}$ и $a_{0,\bullet}^{\pm}$ граничных осцилляторов переводят $\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{\bullet,0}$ ($\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{0,\bullet}$) в $\mathcal{H}^{(N \pm 1)} \cap \mathcal{H}_{\bullet,0}$ ($\mathcal{H}^{(N \pm 1)} \cap \mathcal{H}_{0,\bullet}$) и равны нулю на $\mathcal{H}^{\bullet,0}$ ($\mathcal{H}^{0,\bullet}$). Для наглядности действие этих операторов приведено на диаграмме на рис. 2, где полиномы $U_{k,l}$ изображены точками прямоугольной решетки.

Рис. 2. Действие лестничных операторов.

2. ОСНОВНЫЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Следуя работе [7] и учитывая рекуррентные соотношения (1.1), определим операторы “координат” Z и $\bar{Z}$:

$$\begin{aligned} ZU_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k+1,l}(z, \bar{z}) + U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}), \\ \bar{Z}U_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k,l+1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим, что эти симметрические операторы, заданные на плотном множестве всевозможных линейных комбинаций полиномов ЧК $U_{k,l}(z, \bar{z})$, после замыкания являются ограниченными самосопряженными операторами, определенными на всем пространстве $\mathcal{H}$, которые мы будем обозначать теми же символами.

Определим далее соответствующие операторы “импульса” $P_Z = Z^*$ и $P_{\bar{Z}} = \bar{Z}^*$ как операторы, сопряженные к Z и $\bar{Z}$ относительно выбранного базиса пространства $\mathcal{H}$:

$$Z^* := \mathbb{K}^{-1}\zeta\mathbb{K}, \quad \bar{Z}^* := \mathbb{K}^{-1}\bar{\zeta}\mathbb{K}, \quad (2.2)$$

где $\mathbb{K}$ – интегральный оператор с ядром Пуассона

$$K(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}; t, \tau) = \sum_{k,l=0}^{\infty} t^k \tau^l \bar{U}_{k,l}(z, \bar{z}) U_{k,l}(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.3)$$

Оператор $\mathbb{K}$ действует из гильбертова пространства $\mathcal{H} = L^2(S; \mu(dx, dy))$, $z = x + iy$, в гильбертово пространство $\mathcal{H}_1 = L^2(S; \mu(d\zeta, d\bar{\zeta}))$, $\zeta = \xi + i\eta$, а символами ζ и $\bar{\zeta}$ обозначены операторы координаты в $\mathcal{H}_1$, определенные формулами, аналогичными (2.1). При $|t| = |\tau| = 1$ существует обратный оператор $\mathbb{K}^{-1}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$, а оператор $\mathbb{K}$ унитарен, т. е. $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}^{-1}$, где $\mathbb{K}^*$ – интегральный оператор, сопряженный к оператору $\mathbb{K}$. Можно показать, что введенные выше операторы импульса ограничены и самосопряжены на всем пространстве $\mathcal{H}$ и действуют на базисные элементы $U_{k,l}(z, \bar{z})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Z^* U_{k,l}(z, \bar{z}) &= \bar{t} U_{k+1,l}(z, \bar{z}) + \bar{\tau} U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + t\tau U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}), \\ \bar{Z}^* U_{k,l}(z, \bar{z}) &= t U_{k,l+1}(z, \bar{z}) + \tau U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + \bar{t}\bar{\tau} U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим квадратичный “гамильтониан”

$$H_s(t, \tau) = H_s^{(1)}(t, \tau) + H_s^{(2)}(t, \tau), \quad (2.5)$$

где

$$H_s^{(1)} = \frac{1}{40}(Z\bar{Z} + Z\bar{Z}^* + Z^*\bar{Z} + Z^*\bar{Z}^*), \quad H_s^{(2)} = \frac{1}{40}(\bar{Z}Z + \bar{Z}Z^* + \bar{Z}^*Z + \bar{Z}^*Z^*).$$

Можно доказать, что равенства

$$H_s(t, \tau) U_{k,l}(z, \bar{z}) = \lambda_{k,l} U_{k,l}(z, \bar{z}) \quad (2.6)$$

выполняются лишь при $t = \tau = -1$, и в этом случае

$$\lambda_{0,0} = 0, \quad \lambda_{N,0} = \lambda_{0,N} = \frac{1}{10}, \quad N \geq 1, \quad \lambda_{k,l} = \frac{1}{5}, \quad k, l \geq 1. \quad (2.7)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $H_s = H_s(-1, -1)$ ограничен и самосопряжен в пространстве $\mathcal{H}$. Его собственными функциями являются полиномы ЧК $U_{k,l}(z, \bar{z})$, а соответствующие собственные значения $\lambda_{k,l}$ определяются равенствами (2.7).*

3. АЛГЕБРА СЕКТОРИАЛЬНОГО ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Будем рассматривать пространство $\mathcal{H}$ как пространство Фока и определим лестничные операторы $a_{\text{sect}}^{\pm}$ равенствами

$$a_{\text{sect}}^+ = \frac{1}{40}(Z + Z^*), \quad a_{\text{sect}}^- = \frac{1}{40}(\bar{Z} + \bar{Z}^*). \quad (3.1)$$

Действие этих операторов на базисные элементы пространств $\mathcal{H}^{(N)}$, $N = k + l$, имеет вид

$$\begin{aligned} 2a_{\text{sect}}^+ U_{k,l}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{10}} U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}), & a_{\text{sect}}^+ U_{0,N}(z, \bar{z}) &= 0, \\ a_{\text{sect}}^- U_{k,l}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{10}} U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}), & a_{\text{sect}}^- U_{N,0}(z, \bar{z}) &= 0. \end{aligned}$$

Справедливы соотношения $(a_{\text{sect}}^{\pm})^* = a_{\text{sect}}^{\mp}$, а гамильтониан H_s может быть записан как

$$H_s = H_s^{(1)} + H_s^{(2)}, \quad H_s^{(1)} = a_{\text{sect}}^+ a_{\text{sect}}^-, \quad H_s^{(2)} = a_{\text{sect}}^- a_{\text{sect}}^+. \quad (3.2)$$

Определим “операторы числа” $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 + \mathbb{N}_2$ соотношениями

$$\mathbb{N}_1 U_{k,l} = k U_{k,l}, \quad \mathbb{N}_2 U_{k,l} = l U_{k,l}, \quad \mathbb{N} U_{k,l} = (k+l) U_{k,l}. \quad (3.3)$$

Эти операторы являются самосопряженными в $\mathcal{H}$, и пространства $\mathcal{H}^{(N)}$ остаются инвариантными относительно действия всех определенных выше операторов. Тогда в соответствии с формулами (1.2) имеем

$$H_s = \bigoplus_{N=0}^{\infty} H_s^{(N)}, \quad a_{\text{sect}}^{\pm} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} a_{\text{sect}}^{\pm, (N)}, \quad \mathbb{N} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathbb{N}^{(N)}. \quad (3.4)$$

Введем также два вспомогательных оператора

$$\mathbb{P}_1 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{N,0}, \quad \mathbb{P}_2 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{0,N}, \quad (3.5)$$

где $P_{N,0} U_{k,l} = \delta_{k,N} \delta_{l,0} U_{k,l}$, $P_{0,N} U_{k,l} = \delta_{k,0} \delta_{l,N} U_{k,l}$.

Определим алгебру $\mathfrak{A}_s$ секториального обобщенного осциллятора как ассоциативную алгебру, порождаемую генераторами $a_{\text{sect}}^{\pm}$, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$, $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ и единичным оператором $\mathbb{I}$, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [a_{\text{sect}}^+, a_{\text{sect}}^-] &= \frac{1}{10} (\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2), \quad [\mathbb{N}_1, a_{\text{sect}}^{\pm}] = \mp a_{\text{sect}}^{\pm}, \quad [\mathbb{N}_2, a_{\text{sect}}^{\pm}] = \pm a_{\text{sect}}^{\pm}, \\ [\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2] &= 0, \quad [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0, \quad [\mathbb{N}_i, \mathbb{P}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \\ \mathbb{P}_1 a_{\text{sect}}^+ &= 0, \quad a_{\text{sect}}^- \mathbb{P}_1 = 0, \quad a_{\text{sect}}^+ \mathbb{P}_2 = 0, \quad \mathbb{P}_2 a_{\text{sect}}^- = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. РАДИАЛЬНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Как и в случае секториального осциллятора, начнем с определения оператора координаты:

$$X := -5H_s - \frac{1}{4} (Z\bar{Z}^* + Z^*\bar{Z} + \bar{Z}Z^* + \bar{Z}^*Z), \quad \text{Dom}[X] = \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

Используя соотношения (2.1), (2.4)–(2.6), получаем

$$\begin{aligned} XU_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k+1, l+1}(z, \bar{z}) + U_{k-1, l-1}(z, \bar{z}), \quad k, l \geq 1, \\ XU_{N,0}(z, \bar{z}) &= U_{N+1,1}(z, \bar{z}) + \frac{1}{2} U_{N,0}(z, \bar{z}), \\ XU_{0,N}(z, \bar{z}) &= U_{1, N+1}(z, \bar{z}) + \frac{1}{2} U_{0,N}(z, \bar{z}), \\ XU_{0,0}(z, \bar{z}) &= U_{1,1}(z, \bar{z}) + U_{0,0}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

По аналогии с (2.2), используя ядро Пуассона (2.3), определим импульс $P_X = X^*$, сопряженный с оператором координаты относительно базиса в пространстве $\mathcal{H}$. Как

и ранее, следует положить $|t| = |\tau| = 1$. Оператор X^* действует на полиномы ЧК по правилам

$$\begin{aligned} X^*U_{k,l}(z, \bar{z}) &= \bar{t}\tau U_{k+1,l+1}(z, \bar{z}) + t\bar{\tau}U_{k-1,l-1}(z, \bar{z}), \quad k, l \geq 1, \\ X^*U_{N,0}(z, \bar{z}) &= \bar{t}\tau U_{N+1,1}(z, \bar{z}) + \frac{1}{2}U_{N,0}(z, \bar{z}), \\ X^*U_{0,N}(z, \bar{z}) &= \bar{t}\tau U_{1,N+1}(z, \bar{z}) + \frac{1}{2}U_{0,N}(z, \bar{z}), \\ X^*U_{0,0}(z, \bar{z}) &= \bar{t}\tau U_{1,1}(z, \bar{z}) + U_{0,0}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем квадратичный радиальный “гамильтониан”

$$H_r(t, \tau) = \frac{1}{4}(X^2 + (X^*(t, \tau))^2), \quad \text{Dom}[H_r] = \mathcal{H}. \quad (4.4)$$

Можно показать, что равенство

$$H_r(t, \tau)U_{m,n}(z, \bar{z}) = \nu_{m,n}U_{m,n}(z, \bar{z}) \quad (4.5)$$

выполняется только при

$$\tau_k = e^{i(2k+1)\pi/4}, \quad t_k^\pm = \mp i\tau_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

При этом

$$\nu_{0,0} = \frac{4}{5}, \quad \nu_{N,0} = \nu_{0,N} = \frac{1}{2}, \quad N \geq 1, \quad \nu_{m,n} = \frac{1}{5}, \quad m, n \geq 1. \quad (4.7)$$

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $H_r(t_k^\pm, \tau_k)$, определяемый формулами (4.1)–(4.4), (4.6), является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$, причем базисные элементы – полиномы ЧК $U_{m,n}(z, \bar{z})$ – являются собственными функциями оператора $H_r(t_k^\pm, \tau_k)$, а соответствующие собственные значения $\nu_{m,n}$ задаются равенствами (4.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем считать, что

$$t = t_3^+ = e^{-i\pi/4}, \quad \tau = \tau_3 = e^{-i\pi/4}, \quad H_r = H_r(t_3^+, \tau_3). \quad (4.8)$$

Для построения алгебры радиального осциллятора будем рассматривать пространство $\mathcal{H}$ как пространство Фока. Определим вспомогательный оператор $I_B(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, задав его действие на полиномы ЧК:

$$I_B(\alpha, \beta)U_{k,l}(z, \bar{z}) = \{\alpha(\delta_{k,N}\delta_{l,0} + \delta_{k,0}\delta_{l,N})(1 - \delta_{k,0}\delta_{l,0}) + \beta\delta_{k,0}\delta_{l,0}\}U_{k,l}(z, \bar{z}). \quad (4.9)$$

Введем лестничные операторы равенствами

$$a_{\text{rad}}^\pm = \frac{1}{\sqrt{10}}(X \pm iX^*) - \frac{2}{\sqrt{5}}I_B\left(\frac{1}{4}e^{\pm i\pi/4}, \frac{1}{2}e^{\pm i\pi/4}\right). \quad (4.10)$$

Из формул (4.2), (4.3), (4.9) следует

$$a_{\text{rad}}^{\pm} U_{k,l}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{2}{5}} U_{k\pm 1, l\pm 1}(z, \bar{z}). \quad (4.11)$$

Сравнивая выражения (4.1), (4.2), (4.4) и (4.9)–(4.11), имеем

$$H_{\text{r}} = (a_{\text{rad}}^{+} a_{\text{rad}}^{-} + a_{\text{rad}}^{-} a_{\text{rad}}^{+}) + I_{\text{B}} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right), \quad (4.12)$$

т. е., в отличие от H_{s} , гамильтониан H_{r} содержит помимо стандартного члена дополнительное слагаемое. Заметим также, что из инвариантности подпространств $\mathcal{H}_{\text{even}}$ и $\mathcal{H}_{\text{odd}}$ относительно действия операторов $a_{\text{rad}}^{\pm}$ и H_{r} и (1.2) следует, что

$$a_{\text{rad}}^{\pm} = (a_{\text{rad}}^{\pm})_{\text{even}} \oplus (a_{\text{rad}}^{\pm})_{\text{odd}}, \quad H_{\text{r}} = (H_{\text{r}})_{\text{even}} \oplus (H_{\text{r}})_{\text{odd}}. \quad (4.13)$$

Алгеброй радиального осциллятора $\mathfrak{A}_{\text{r}}$ будем называть ассоциативную алгебру, порождаемую генераторами $a_{\text{rad}}^{\pm}$, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$, $I_{\text{B}}(1/2, 1/2)$, $\mathbb{I}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} [a_{\text{rad}}^{-}, a_{\text{rad}}^{+}] &= \frac{4}{5} I_{\text{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), & a_{\text{rad}}^{-} I_{\text{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= 0, & I_{\text{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) a_{\text{rad}}^{+} &= 0, \\ [\mathbb{N}_1, a_{\text{rad}}^{\pm}] &= \pm a_{\text{rad}}^{\pm}, & [\mathbb{N}_2, a_{\text{rad}}^{\pm}] &= \pm a_{\text{rad}}^{\pm}, \\ \left[\mathbb{N}_1, I_{\text{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] &= 0, & \left[\mathbb{N}_2, I_{\text{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

5. ГРАНИЧНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

При построении пространства Фока будем использовать разложения

$$\mathcal{H}_{\bullet,0} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} (\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{\bullet,0}), \quad \mathcal{H}_{0,\bullet} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} (\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{0,\bullet})$$

и операторы $P_{s,t}^{m,n}$: $P_{s,t}^{m,n} U_{k,l} = \delta_{k,m} \delta_{l,n} U_{s,t}$. Определим лестничные операторы

$$\begin{aligned} a_{\bullet,0}^{+} &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{m+1,0}^{m,0}, & a_{\bullet,0}^{-} &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{m-1,0}^{m,0}, \\ a_{0,\bullet}^{+} &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{0,m+1}^{0,m}, & a_{0,\bullet}^{-} &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{0,m-1}^{0,m}. \end{aligned}$$

Как и выше, можно доказать, что квадратичный гамильтониан граничного осциллятора $H_0 = (1/5)(H_{\bullet,0} + H_{0,\bullet} - P_{0,0}^{0,0})$, где

$$H_{\bullet,0} = (a_{\bullet,0}^{+} a_{\bullet,0}^{-} + a_{\bullet,0}^{-} a_{\bullet,0}^{+}), \quad H_{0,\bullet} = (a_{0,\bullet}^{+} a_{0,\bullet}^{-} + a_{0,\bullet}^{-} a_{0,\bullet}^{+}),$$

является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$. Его собственными функциями будут полиномы ЧК, а соответствующие собственные значения равны

$$\mu_{0,0} = \frac{1}{5}, \quad \mu_{0,N} = \mu_{N,0} = \frac{2}{5}, \quad N \geq 1, \quad \mu_{k,l} = 0, \quad k, l \geq 1.$$

Операторы $a_{\bullet,0}^{\pm}$, $H_{\bullet,0}$ ($a_{0,\bullet}^{\pm}$, $H_{0,\bullet}$) равны нулю на $\mathcal{H}^{\bullet,0}$ ($\mathcal{H}^{0,\bullet}$). Определим граничный осциллятор $\mathfrak{A}_0$ как ассоциативную алгебру с генераторами $P_{m,0}^{s,0}$, $P_{0,m}^{0,s}$, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$, $\mathbb{I}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} [P_{m,0}^{k,0}, P_{n,0}^{l,0}] &= \delta_{k,n} P_{m,0}^{l,0} - \delta_{m,l} P_{n,0}^{k,0}, & [\mathbb{N}_1, P_{m,0}^{k,0}] &= (m-k) P_{m,0}^{k,0}, \\ [P_{0,m}^{0,k}, P_{0,n}^{0,l}] &= \delta_{k,n} P_{0,m}^{0,l} - \delta_{m,l} P_{0,n}^{0,k}, & [\mathbb{N}_2, P_{0,m}^{0,k}] &= (m-k) P_{0,m}^{0,k}. \end{aligned}$$

6. ОБОБЩЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ЧК

При построении двумерного обобщенного осциллятора ЧК мы будем использовать построенные выше осцилляторы и их алгебры. В качестве гамильтониана обобщенного осциллятора ЧК выберем $H = H_s + H_r + H_0$. Из приведенных ранее результатов следует, что H – самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, а полиномы ЧК являются его собственными функциями, соответствующими единственному собственному значению $\rho_{m,n} = 1$. Отметим, что приведенный ранее выбор нормировочных постоянных при определении гамильтонианов H_s , H_r , $H_{\bullet,0}$ и H_0 был ориентирован на то, чтобы осциллятор ЧК имел единственное собственное значение. Это соответствует случаю классических полиномов Чебышёва второго рода. В качестве алгебры двумерного осциллятора ЧК выберем ассоциативную алгебру $\mathfrak{A}$, порождаемую генераторами

$$a_{\text{sect}}^{\pm}, \quad a_{\text{rad}}^{\pm}, \quad a_{\bullet,0}^{\pm}, \quad a_{0,\bullet}^{\pm}, \quad \mathbb{N}_1, \quad \mathbb{N}_2, \quad P_{k,l}^{m,n}, \quad P_{\pm,l}^k, \quad P_{l,\pm}^k, \quad \mathbb{I},$$

где $P_{\pm,l}^k = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{m\pm l,l}^{m\pm k,k}$, $P_{l,\pm}^k = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{l,m\pm l}^{k,m\pm k}$, и перестановочными соотношениями, которые мы не приводим из-за ограничения в объеме. Они могут быть получены из приведенных выше перестановочных соотношений для секториального, радиального и граничного осцилляторов с учетом равенства

$$I_B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(P_{0,+}^0 + P_{+,0}^0 - P_{0,0}^{0,0}).$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является первым шагом в построении и исследовании осцилляторных алгебр, соответствующих классическим ортогональным многочленам от нескольких переменных, связанным с системами корней алгебр Ли. Мы представили здесь конструкцию осцилляторной алгебры для простейшего случая двумерных полиномов ЧК. К сожалению, ограничение объема публикации вынуждает нас опустить исследование свойств построенной осцилляторной алгебры. Надеемся, что эти вопросы будут предметом ближайших публикаций.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность организаторам IV международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT – 2012), посвященной А. Н. Васильеву. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00207).

Список литературы

- [1] П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 283–293.
- [2] P. P. Kulish, “Integrable spin chains and representation theory”, *Proceedings of the XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics* (Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, August 20–26, 2012), eds. C. Bai, I.-P. Garen, M.-L. Ge, World Sci., Singapore, 2013.
- [3] H. Bacry, “Generalized Chebyshev polynomials and characters of $GL(N, C)$ and $SL(N, C)$ ”, *Group Theoretical Methods in Physics*, Lecture Notes in Physics, **201**, eds. G. Penardo, G. Ghirardi, T. Weber, Springer, Berlin, 1984, 483–485.
- [4] R. J. Beerends, *Trans. AMS*, **328**:2 (1991), 779–814.
- [5] T. H. Koornwinder, *Indag. Math.*, **77**:1 (1974), 48–58; 59–66; **77**:4 (1974), 357–369; 370–381.
- [6] П. К. Суетин, *Ортогональные многочлены по двум переменным*, Наука, М., 1988.
- [7] V. V. Borzov, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **12**:2 (2001), 115–138.