Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Браун, Энергия Казимира квантованного поля в среде с дисперсией и поглощением, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 388–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:20:57

© 2013 г.

М. А. Браун*

ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА КВАНТОВАННОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

Энергия Казимира квантового поля между двумя металлическими пластинами, разделенными диэлектриком, вычислена в микроскопическом подходе, при котором диэлектрик моделируется набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами. Рассмотрен случай одного пространственного измерения. Сравнение вычисленных дополнительной энергии и силы, возникающей за счет взаимодействия со средой, с результатами, полученными в рамках феноменологического подхода, сходного с применением известной формулы Лифшица, показывает, что они имеют противоположные знаки.

Ключевые слова: силы Казимира, поглощение квантового поля средой, диагонализация Фано, формула Лифшица.

DOI: 10.4213/tmf8478

1. ВВЕДЕНИЕ

В рамках макроскопической электродинамики изучение сил Казимира в диэлектрике с дисперсией и поглощением может быть осуществлено с помощью введения стохастического шума, имитирующего диссипативное взаимодействие со средой [1], [2]. Однако последовательная трактовка требует корректного квантово-механического описания этого взаимодействия. Оно может быть осуществлено в рамках формализма, развитого в работе Хуттнера и Барнетта [3] и позднее обобщенного Филбиным [4], в котором предполагается, что среда моделируется набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами [5]. Такое взаимодействие приводит к поглощению поля и его исчезновению как независимой динамической переменной. Система полностью описывается в терминах эффективных осцилляторов, также имеющих непрерывно распределенные частоты. Возбуждения квантованного поля выражаются через возбуждения этих эффективных осцилляторов. Энергия Казимира в этом подходе была исследована Филбиным [6], однако в его подходе влияние среды не отделено от общей энергии Казимира в среде. Кроме того, его общие результаты трудно приложимы к простым многослойным диэлектрикам. Настоящая работа близко следует идеологии работ [3], [4]. Разница заключается в более

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: braun1@pobox.spbu.ru

простой модели среды и в новой технике, допускающей четкое выделение эффектов среды и облегчающей применение к таким простым случаям, как диэлектрик между двумя металлическими пластинами. Для этого случая мы вычисляем дополнительную энергию Казимира и силу, возникающую за счет взаимодействия со средой, и сравниваем их с результатами, полученными в макроскопическом подходе с использованием техники функции Грина [7]. В обоих случаях результаты оказываются малы, но имеют противоположные знаки. На этом предварительном этапе мы ограничиваемся скалярным полем в одном пространственном измерении.

2. МОДЕЛЬ. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ФАНО

В интервале пространственной переменной $0 < x < a$ наша модель описывает набор дискретных осцилляторных мод, взаимодействующих с континуумом. Эта модель обобщает модель, предложенную Фано [8] для демонстрации того, как континуум расплавляет дискретную моду и таким образом осуществляет поглощение. В этом разделе мы воспроизводим реализацию идеи Фано в технике работы [3] с некоторыми изменениями.

В нашей модели лагранжиан $L(t)$ есть сумма трех слагаемых: $L = L_0 + L_1 + L_I$. Здесь L_0 есть лагранжиан поля

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_0^a dx (\dot{\phi}^2 - (\partial\phi)^2 - \mu^2\phi^2), \quad (1)$$

где $\dot{\phi}$ и $\partial\phi$ обозначают производные по времени t и координате x соответственно.

Поглощающая среда моделируется набором осцилляторов на том же интервале координат $[0, a]$ с непрерывно распределенными частотами:

$$L_1 = \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^\infty d\omega (\dot{Y}_\omega^2 - \omega^2 Y_\omega^2). \quad (2)$$

Наконец, L_I описывает взаимодействие между квантовым полем и средой. Следуя [3], мы выбираем его в виде

$$L_I = - \int_0^a dx \int d\omega v(\omega) \phi \dot{Y}_\omega, \quad (3)$$

где $v^2(\omega)$ – квадратично-интегрируемая функция, которая может быть аналитически продолжена на отрицательные ω как четная функция. Мы налагаем граничные условия, соответствующие металлическим пластинам:

$$\phi(x)|_{x=0} = \phi(x)|_{x=a} = 0, \quad Y_\omega(x)|_{x=0} = Y_\omega(x)|_{x=a} = 0. \quad (4)$$

Для квантования мы стандартным образом вводим сопряженные переменные и налагаем канонические одновременные коммутационные соотношения. В импульсном пространстве интеграл по области $[0, a]$ переходит в сумму по дискретным значениям импульса $k_n = \pi n/a$, $n = 1, 2, \dots$.

Мы вводим операторы рождения и поглощения для поля b_n , $b^\dagger$ и среды $b_{n,\omega}$, $b_{n,\omega}^\dagger$ со стандартными коммутационными соотношениями. В терминах этих операторов находим полный гамильтониан

$$H^{\text{tot}} = H_0 + H_1 + H_I + e_0(a) + e_1(a) = H + e_0(a) + e_1(a), \quad (5)$$

где H_0 и H_1 – гамильтонианы квантового поля и среды в нормальной форме,

$$H_0 = \sum_n \omega_n b_n^\dagger b_n, \quad H_1 = \sum_n \int_0^\infty d\omega \omega b_{n,\omega}^\dagger b_{n,\omega}. \quad (6)$$

Сдвиг энергии вакуума есть сумма таких сдвигов для поля ϕ и среды

$$e_0(a) = \frac{1}{2} \sum \omega_n, \quad e_1(a) = \frac{1}{2} \sum_n \int \omega d\omega. \quad (7)$$

Наконец, гамильтониан H_I описывает взаимодействие между полем и континуумом:

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_n \int_0^\infty d\omega V_n(\omega) (b_n + b_n^\dagger) (b_{n,\omega} + b_{n,\omega}^\dagger), \quad (8)$$

где $V_n^2(\omega) = (\omega/\omega_n) v^2(\omega)$.

Можно показать, что гамильтониан H может быть диагонализирован введением новых полевых переменных [3]

$$B_{n,\omega} = \alpha_{0n}(\omega) b_n + \beta_{0n}(\omega) b_n^\dagger + \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{1n}(\omega, \omega') b_{n,\omega'} + \beta_{1n}(\omega, \omega') b_{n,\omega'}^\dagger], \quad (9)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[B_{n,\omega}, B_{n',\omega'}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta(\omega - \omega'), \quad [B_{n,\omega}, B_{n',\omega}] = 0. \quad (10)$$

Эти коммутационные соотношения вместе с требованием $[B_{n,\omega}, H] = \omega B_{n,\omega}$ определяют коэффициенты α и β (см. [3]):

$$\begin{aligned} \beta_{0n}(\omega) &= \frac{\omega - \omega_n}{\omega + \omega_n} \alpha_{0n}(\omega), \\ \alpha_{1n}(\omega, \omega') &= \frac{\omega_n}{\omega + \omega_n} \alpha_{0n}(\omega) V_n(\omega') \left[P \frac{1}{\omega - \omega'} + y(\omega) \delta(\omega - \omega') \right], \\ \beta_{1n}(\omega, \omega') &= \frac{\omega_n}{\omega + \omega_n} \alpha_{0n}(\omega) V_n(\omega') \frac{1}{\omega + \omega'}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\alpha_{0n}(\omega)$ дается выражением

$$|\alpha_{0n}(\omega)|^2 = \frac{(\omega + \omega_n)^2}{\omega_n^2} \frac{1}{V_n^2(\omega) [y_n^2(\omega) + \pi^2]}, \quad (12)$$

а $y_n(\omega)$ есть

$$y_n(\omega) = \frac{1}{V_n^2(\omega)} \left[2 \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega_n} + I_n(\omega) \right], \quad I_n(\omega) = P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{V_n^2(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (13)$$

В терминах новых переменных гамильтониан H имеет вид

$$H = \sum_n \int_0^\infty d\omega \omega B_{n,\omega}^\dagger B_{n,\omega} + E(a). \quad (14)$$

Здесь константа $E(a)$ имеет очевидный смысл энергии основного состояния системы, помимо изначального сдвига в (5). Отметим, что эта энергия была опущена в работе [3]. Изучение энергии основного состояния и ее компонент, порождаемых тремя частями гамильтониана, составляет основной предмет нашей работы.

Предполагая, что новые операторы $B_{n,\omega}$ и $B_{n,\omega}^\dagger$ образуют полный набор, можно обратить соотношения (9) и их сопряженные и выразить исходные операторы как линейные суперпозиции новых операторов:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^\infty d\omega [\alpha_{0n}^*(\omega) B_{n,\omega} - \beta_{0n}(\omega) B_{n,\omega}^\dagger], \\ b_{n,\omega} &= \int_0^\infty d\omega' [\alpha_1^*(\omega', \omega) B_{n,\omega'} - \beta_1(\omega', \omega) B_{n,\omega'}^\dagger]. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения (15) являются тем инструментом, который позволяет изучать энергию системы как сумму энергий квантового поля, среды и их взаимодействия, чему посвящен следующий раздел.

3. ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ E И ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА

Согласно формуле (14) основное состояние гамильтониана H определяется условием $B_{n,\omega}|\rangle = 0$. Его энергия, очевидно, есть E в выражении (14). Вычисление E не представляет труда. Используя (15), можно выразить старые операторы через $B_{n,\omega}$, $B_{n,\omega}^\dagger$ в исходном гамильтониане (5), а затем взять среднее в основном состоянии. Используя явные выражения для коэффициентов $\alpha_{0,1}$ и $\beta_{0,1}$, мы находим средние в основном состоянии:

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle &= \sum_n \omega_n \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega - \omega_n)^2}{(\omega + \omega_n)^2} |\alpha_{0n}(\omega)|^2, \\ \langle H_1 \rangle &= 2 \sum_n \omega_n \int_0^\infty d\omega \frac{\omega - \omega_n}{\omega + \omega_n} |\alpha_{0n}(\omega)|^2, \\ \langle H_1 \rangle &= \sum_n \omega_n^2 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(\omega + \omega_n)^2} J_n(\omega) |\alpha_{0n}(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$J_n(\omega) = \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega' V_n^2(\omega')}{(\omega + \omega')^2}.$$

Полная энергия основного состояния гамильтониана H есть

$$E(a) = \langle H \rangle = \langle H_0 \rangle + \langle H_1 \rangle + \langle H_I \rangle.$$

Полная энергия всей системы при заданном расстоянии между пластинами a есть $E^{\text{tot}}(a) = E(a) + e_0(a) + e_1(a)$. Для нормировки мы должны вычесть из нее энергию вакуума в том же интервале без пластин. Она дается плотностью энергии вакуума, умноженной на a . Обозначим эту энергию $E^{\text{tot}}(\infty)$. Как и $E^{\text{tot}}(a)$, она состоит из трех частей: $E^{\text{tot}}(\infty) = E(\infty) + e_0(\infty) + e_1(\infty)$. Разность между $E^{\text{tot}}(a)$ и $E^{\text{tot}}(\infty)$ дает сумму двух энергий Казимира, для поля и для среды. Чтобы найти энергию

Казимира для поля, мы должны дополнительно вычесть весь вклад в отсутствие поля, равный $\epsilon_1(a) - \epsilon_1(\infty)$. Таким образом, энергия Казимира поля есть

$$E^{\text{Cas}} = e_0(a) - e_0(\infty) + E(a) - E(\infty) = E_0^{\text{Cas}}(a) + E_1^{\text{Cas}}(a), \quad (17)$$

где $E_0^{\text{Cas}}(a) = e_0(a) - e_0(\infty)$ есть стандартная энергия Казимира без наличия среды между пластинами, а $E_1^{\text{Cas}} = E(a) - E(\infty)$ есть дополнительная энергия, возникающая за счет взаимодействия с диэлектрической средой.

В отсутствие пластин наши выражения, полученные для конечных a , сохраняют свой вид, но только суммирование по дискретным значениям импульса k_n заменяется на интегрирование:

$$\sum_n \rightarrow a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} = a \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\pi} = \int_0^{\infty} dn, \quad (18)$$

где мы использовали симметрию относительно замены $k \rightarrow -k$ и ввели непрерывную переменную n , полагая $k = \pi n/a$.

4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ И ПРОПАГАТОР

Чтобы установить связь с диэлектрическими свойствами среды, рассмотрим нашу систему в отсутствие пластин. Запаздывающий пропагатор поля определяется как среднее в основном состоянии:

$$P(t, x) = i\theta(t) \langle T[\phi(t, x), \phi(0, 0)] \rangle, \quad \phi(t, x) = \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega(k)}} (b(t, k) + \text{э.с.}), \quad (19)$$

где $\omega(k) = k^2 + \mu_1^2$. В диэлектрике операторы $b(t, k)$ и $b^\dagger(t, k)$, зависящие от времени, могут быть выражены через операторы $B(k, \omega)$, зависимость от времени которых тривиальна:

$$b(t, k) = \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_0^*(k, \omega) B(k, \omega) e^{-i\omega t} - \beta_0(k, \omega) B^\dagger(k, \omega) e^{i\omega t}] \quad (20)$$

и аналогично для $b^\dagger(t, k)$. Новый вакуум удовлетворяет условию $B(k, \omega)|\rangle = 0$. Выражая в (19) $\phi(t, x)$ через $B(k, \omega)$ и $B^\dagger(k, \omega)$ и переходя к энергетической переменной, мы получаем

$$P(k, \omega) = \frac{1}{2\omega(k)} \int_0^{\infty} d\omega' \rho(k, \omega') \left(\frac{1}{\omega' - \omega - i0} + \frac{1}{\omega' + \omega + i0} \right), \quad (21)$$

где

$$\rho(k, \omega) = |\alpha_0(k, \omega) - \beta_0(k, \omega)|^2. \quad (22)$$

На комплексной плоскости ω это определяет аналитическую функцию ω в верхней полуплоскости, удовлетворяющую условиям $P(-\omega^*) = P^*(\omega)$ и

$$\text{Im } P(k, \omega) = \frac{\pi}{2\omega(k)} \rho(\omega), \quad \omega > 0. \quad (23)$$

Следующим шагом преобразуем α_0 и β_0 , следуя [3]. Используя (12) и (13), представим $\alpha_0(\omega)$ в виде

$$\alpha_0(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \omega(k)) \frac{V(k, \omega)}{\epsilon^*(k, \omega)\omega^2 - \omega_0^2(k)}, \quad (24)$$

где

$$\epsilon^*(k, \omega) = 1 + \frac{\omega(k)}{2\omega} F_1(k, \omega), \quad F_1(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{V^2(k, \omega')}{\omega' - \omega + i0}. \quad (25)$$

Вычисляя мнимую часть пропагатора согласно (23) и (22), мы находим, что он дается формулой

$$P(k, \omega) = \frac{1}{\omega_0^2(k) - \omega^2 \epsilon(k, \omega)}, \quad (26)$$

так что $\epsilon(k, \omega)$ имеет смысл диэлектрической постоянной.

5. ПОДХОД ФУНКЦИИ ГРИНА

Для сравнения с феноменологическим подходом, связанным с известной формулой Лифшица [9], следуя [7], вычислим энергию вакуума, используя феноменологическое уравнение и его функцию Грина. Согласно [7] такой подход ведет к результатам, соответствующим формуле Лифшица. Стандартные методы дают выражение для энергии поля в нашей модели

$$E = \frac{1}{2} \sum_n (\dot{\phi}_n^2 + \omega_n^2 \phi_n^2), \quad (27)$$

где $\omega_n^2 = k_n^2 + \mu^2$. Следуя [3], [7], введем диэлектрик через нетривиальную комплексную диэлектрическую постоянную $\epsilon(\omega)$ в уравнении движения для $\phi_n(\omega)$

$$(\epsilon(\omega)\omega^2 - \omega_n^2)\phi_n(\omega) = j_n(\omega), \quad (28)$$

где $j_n(\omega)$ – “шум”, ответственный за поглощение. Решение уравнения (28) может быть представлено в виде

$$\phi_n(\omega) = \frac{j_n(\omega)}{\epsilon(\omega)\omega^2 - \omega_n^2}. \quad (29)$$

Стандартным образом разделим $\phi_n(t)$ на части с положительными и отрицательными энергиями и будем их рассматривать как два набора независимых операторов, эрмитово сопряженных друг другу и определяемых источниками шума согласно формуле (29). Потребуем, чтобы они удовлетворяли стандартным коммутационным соотношениям. Можно показать, что для выполнения этого нужно выбрать [3]

$$j_n^{(\pm)}(\omega) = \mp i\omega \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\pi}} f_n^{(\pm)}(\omega), \quad (30)$$

где $\epsilon_2 = \text{Im } \epsilon$ и операторы $f_n^{(\pm)}$ имеют ненулевые коммутаторы

$$[f_n^{(-)}(\omega), f_m^{(+)}(\omega')] = \delta_{mn} \delta(\omega - \omega'). \quad (31)$$

Основное состояние определяется условием

$$f_n^{(-)}(\omega)|\rangle = \phi_n^{(-)}(\omega)|\rangle = 0. \quad (32)$$

Энергия основного состояния дается вакуумным средним (27). Выражая $\phi_n^{(\pm)}(\omega)$ сначала через $j^{(\pm)}(\omega)$, а затем через $f^{(\pm)}(\omega)$ и вычисляя вакуумное среднее с использованием (31) и (32), находим

$$E(a) = -\frac{1}{2} \text{Im} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\omega^2 + \omega_n^2}{\epsilon(\omega)\omega^2 - \omega_n^2}. \quad (33)$$

Повернем контур интегрирования для следования вдоль мнимой оси $\omega = i\xi$, получим

$$E(a) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_n^2 - \xi^2}{\epsilon(i\xi)\xi^2 + \omega_n^2} \equiv \sum_n f_n, \quad (34)$$

где использовано, что функция $\epsilon(i\xi)$ вещественна.

При больших ξ подынтегральное выражение в (34) стремится к -1 и интеграл становится независимым от n . Это позволяет добавить единицу к подынтегральному выражению. Нас интересует вклад в энергию Казимира за счет диэлектрика, который получается после вычитания из $E(a)$ ее значения при $\epsilon = 1$.

Это дает окончательное выражение для энергии Казимира

$$E_1^{\text{Cas}}(a) = E(a) - E(a)_{\epsilon=1} = \sum_{n=1} f_n^{(1)} - \int_0^\infty dn f^{(1)}(n), \quad (35)$$

где

$$f_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \left(\frac{(\epsilon(i\xi) - 1)\xi^2 + 2\omega_n^2}{\epsilon(i\xi)\xi^2 + \omega_n^2} - \frac{2\omega_n^2}{\xi^2 + \omega_n^2} \right). \quad (36)$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Положим массу квантового поля равной нулю: $\mu = 0$. Тогда вакуумная энергия Казимира есть $E_0^{\text{Cas}} = -\pi/24a$. Дополнительная энергия и сила, возникающая за счет взаимодействия с диэлектриком, в этом случае имеют форму

$$E_1^{\text{Cas}}(a) = m e_1^{\text{Cas}}(ma), \quad F_1^{\text{Cas}}(a) = m^2 [f_1^{\text{Cas}}(ma)]',$$

где m – масштаб в $v(\omega)$.

В соответствии со свойствами $V_n(\omega)$ простейшая форма для $v^2(\omega)$ есть (вариант 1)

$$v^2(\omega) = g^2 \frac{1}{\omega^2 + m^2}, \quad \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\pi g^2}{2m\omega} \frac{1}{\omega + im}, \quad (37)$$

так что $\text{Im} \epsilon(k, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \sim 1/\omega$. Чтобы включить в рассмотрение случай конечной $\text{Im} \epsilon(k, \omega)$ при $\omega = 0$, мы выбрали в качестве альтернативы (вариант 2)

$$v^2(\omega) = g^2 \frac{\omega^2}{(\omega^2 + m^2)^2}, \quad \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\pi g^2}{4m(\omega + im)^2} \quad (38)$$

и $\text{Im} \epsilon(k, \omega) = 0$ при $\omega = 0$. Мы положили $g^2 = 1/\pi$.

Рис. 1. Дополнительная энергия Казимира в диэлектрике $e_1^{\text{Cas}}(ma)$ для варианта 1 (37) (кривая 1) и варианта 2 (38) (кривая 2).

Рис. 2. Дополнительная сила Казимира в диэлектрике $f_1^{\text{Cas}}(ma)$ для варианта 1 (37) (кривая 1) и варианта 2 (38) (кривая 2).

В обоих случаях интегралы I_n и J_n вычисляются аналитически и у нас остаются два численных интегрирования: по ω в выражениях для энергии при данном ω_n и при сравнении с $a \rightarrow \infty$.

Результаты численных расчетов энергии Казимира и силы в нашем подходе (формулы (16)) для обоих вариантов выбора v^2 представлены на рис. 1, 2. Как видно, дополнительная сила Казимира за счет взаимодействия с диэлектриком есть сила притяжения. Для выбранного значения g^2 она много меньше, чем вакуумная сила, в особенности при малых расстояниях a , где она остается конечной, тогда как вакуумная сила растет как $1/a^2$.

Для сравнения мы также вычислили энергию Казимира в феноменологическом подходе, соответствующем формуле Лифшица (формулы (35) и (36)) для тех же вариантов выбора диэлектрической постоянной. Эти результаты для энергии и силы

Рис. 3. Дополнительная энергия Казимира в диэлектрике $e_1^{\text{Cas}}(ma)$ для варианта 1 (37) (кривая 1) и варианта 2 (38) (кривая 2) в феноменологическом подходе.

Рис. 4. Дополнительная сила Казимира в диэлектрике $f_1^{\text{Cas}}(ma)$ для варианта 1 (37) (кривая 1) и варианта 2 (38) (кривая 2) в феноменологическом подходе.

Казимира показаны на рис. 3, 4 для двух вариантов выбора ϵ , соответствующих вариантам 1 и 2 выбора функции v .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей микроскопической картине, основанной на подходе, предложенном в работе [3], дополнительные энергия и сила Казимира оказываются малыми и соответствуют притяжению. Применение метода, основанного на феноменологической

функции Грина, дает дополнительные энергию и силу того же порядка, но соответствующие отталкиванию. Подчеркнем, что последний подход не основывается на последовательной трактовке квантового поля и среды с их взаимодействием.

Благодарности. Настоящее исследование поддерживалось Санкт-Петербургским государственным университетом (проект № 11.0.77.2010).

Список литературы

- [1] W.L. Mochán, C. Villarreal, *New J. Phys.*, **8**:10 (2006), 242, 22 pp.
- [2] F.C. Lombardo, F.D. Mazzitelli, A.E. Rubio López, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2012), 052517, 12 pp.
- [3] B. Huttner, S.M. Barnett, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4306–4322.
- [4] T. Philbin, *New J. Phys.*, **12** (2010), 123008, 22 pp.
- [5] J.J. Hopfield, *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1555–1566.
- [6] T. Philbin, *New J. Phys.*, **13** (2011), 063026, 21 pp.
- [7] C. Raabe, D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 013814, 15 pp., arXiv:quant-ph/0408075.
- [8] U. Fano, *Phys. Rev.*, **124**:6 (1961), 1866–1878.
- [9] Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, **29**:1 (1955), 94–110.