Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Данчо, М. Гнатич, М. В. Комарова, Д. М. Краснов,
Т. Лучивянки, Л. Мижишин, М. Ю. Налимов, Влия-
ние гидродинамических флуктуаций на фазовый пере-
ход в E - и F -моделях критической динамики, *ТМФ*,
2013, том 176, номер 1, 69–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:32:05

© 2013 г. М. Данчо*, М. Гнатич^{*†}, М. В. Комарова[‡],
Д. М. Краснов[‡], Т. Лучивянски^{*†},
Л. Мижишин[†], М. Ю. Налимов[‡]

ВЛИЯНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В E - И F -МОДЕЛЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Методом ренормализационной группы исследуется E -модель критической динамики в присутствии флуктуаций скорости, которые возникают в соответствии со стохастическим уравнением Навье–Стокса. С помощью теоремы Мартина–Сиджи–Розе получена теоретико-полевая модель, поддающаяся пертурбативному ренормгрупповому анализу. Путем прямого подсчета степеней и анализа ультрафиолетовых расходимостей показано, что модель является мультипликативно ренормируемой, для вычисления констант ренормировки используется двухпараметрическое разложение по ϵ и δ . Параметр ϵ характеризует отклонение от критической размерности 4, а δ – параметр отклонения от колмогоровского режима. Представлены результаты однопетлевого приближения и частично структура фиксированных точек. Кратко обсуждается возможное влияние флуктуаций скорости на крупномасштабное поведение модели.

Ключевые слова: бозе-конденсация, F -модель, ренормализационная группа, аномальные скейлинговые показатели, критическая динамика.

DOI: 10.4213/tmf8479

1. ВВЕДЕНИЕ

Бозе-конденсация представляет собой важное физическое явление, которое на сегодняшний день наблюдается не только в сверхтекучести жидкого гелия, но и при конденсации инертных газов [1]. Согласно работе [2] критическую динамику вблизи фазового перехода такого типа можно описать с помощью F -модели. Эта модель

*Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia.
E-mail: danco@saske.sk

[†]Faculty of Science, P. J. Šafárik University, Košice, Slovakia

[‡]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петродворец, Россия

была проанализирована в работе [3] с использованием ренормгруппового (РГ) подхода. Было показано, что в критической области F -модель эквивалентна E -модели (в соответствии со стандартной терминологией, введенной в работе [2]).

Динамические E - и F -модели критической динамики свободны от гидродинамических мод, поскольку поле скоростей оказывается инфракрасно-несущественным (ИК-несущественным), т. е. несущественным в критической области. Поэтому критический индекс (например, для вязкости) по сей день неизвестен, хотя вязкость обращается в нуль при фазовом переходе и проявляет свойства параметра порядка. Более того, проблема, связанная с влиянием турбулентности на фазовый переход в сверхтекучее состояние, остается нерешенной.

Стохастическое уравнение для описания критической динамики бозе-системы в присутствии случайного поля скоростей было предложено в работе [4]. Такая модификация E -модели приводит к некоторым отклонениям от стандартного теоретико-полевого подхода, ее мы и будем применять. В настоящей работе мы продолжаем исследование, начатое в работе [4]. Наша цель – изучение различных скейлинговых режимов предложенной модели.

Работа построена следующим образом. Мы начинаем с анализа теоретико-полевой формулировки модели и ее ренормировки (см. раздел 2). В разделе 3 приведены некоторые интересные подробности однопетлевых вычислений и соотношения между константами ренормировки. В разделе 4 анализируются фиксированные точки и их области ИК-устойчивости, а также приводятся результаты однопетлевых вычислений функций РГ. Раздел 5 посвящен кратким выводам.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Стохастические уравнения систем бозе-типа можно описывать в окрестности их критических точек [4] с помощью уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t \psi + \partial_i (v_i \psi) = \lambda(1 + ib) \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi + g_2 m \psi \right] + \\ + i\lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + f_{\psi^+}, \end{aligned} \quad (1)$$

а также с помощью аналогичного уравнения для комплексно-сопряженного поля ψ^+ . Поля ψ , ψ^+ представляют собой параметр порядка (средние полевых операторов бозе-частиц), m – линейная комбинация внутренней энергии и плотности [2], является полем, которое связано с флуктуациями температуры рассматриваемой системы, причем ее эволюция описывается уравнением

$$\partial_t m + \partial_i (v_i m) = -\lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + i\lambda g_3 m + f_m.$$

Поле v есть флуктуирующее поле скоростей (поперечное вследствие несжимаемости), поведение которого описывается уравнением

$$\begin{aligned} \partial_t v + \partial_i (v_i v) = \nu \Delta v - \psi^+ \partial \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi + g_2 m \psi \right] - \\ - \psi \partial \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi^+ + g_2 m \psi^+ \right] - m \partial [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + f_v. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что случайные силы f_i , $i \in \{\psi^+, \psi, m, v\}$, являются гауссовыми случайными переменными с нулевыми средними, а корреляторы D_i имеют вид

$$D_\psi(p, t, t') = \lambda \delta(t - t'), \quad D_m(p, t, t') = \lambda u p^2 \delta(t - t'), \quad D_v(p, t, t') = g_4 \nu^3 p^{\epsilon - \delta} \delta(t - t').$$

Мы будем анализировать модель, используя размерную регуляризацию (см. ниже), в окрестности ее критической размерности 4 с помощью стандартного ϵ -разложения (где ϵ задается формулой $d = 4 - \epsilon$). Параметр δ определяет отклонение от колмогоровского режима, т.е. значение $\delta = -3$ (и $\epsilon = 1$) соответствует включению равновесных флуктуаций скорости, а $\delta = 4$ ($\epsilon = 1$) отвечает режиму развитой турбулентности [5]–[7]. Заметим, что уравнение (2) представляет собой стохастическое уравнение Навье–Стокса, дополненное членами, которые обеспечивают существование равновесного статистического предела предложенной модели. Важный физический факт состоит в том, что только случайный шум с коррелятором D_v определяет, какой именно конкретный гидродинамический режим будет реализован.

Наши рассуждения основаны на модификации E -модели не только из-за ее относительной простоты, но также и потому, что, как было показано в работе [3], эта модель соответствует устойчивому ИК-скейлинговому режиму в F -модели [2]. Применение стандартного формализма Мартина–Сиджи–Розе [8] к системе (1) дает теоретико-полевое действие в виде

$$\begin{aligned} S = & 2\lambda \psi^{+'} \psi' - \lambda u m' \partial^2 m' + v' D_v v' + \\ & + \psi^{+'} \left\{ -\partial_t \psi - \partial_i (v_i \psi) + \lambda \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi \right] + i \lambda g_3 \psi [-m + h] \right\} + \\ & + \psi' \left\{ -\partial_t \psi^+ - \partial_i (v_i \psi^+) + \lambda \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi^+ \right] - i \lambda g_3 \psi^+ [-m + h] \right\} + \\ & + m' \left\{ -\partial_t m - \partial_i (v_i m) - \lambda u \partial^2 [-m + h] + i \lambda g_5 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] \right\} + \\ & + v' \left\{ -\partial_t v + \nu \Delta v - \partial_i (v_i v) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где подразумевается интегрирование по пространству-времени $(t, \mathbf{x})$ и суммирование по повторяющимся векторным индексам. Члены

$$v' \left\{ -\psi^+ \partial \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi \right] - \psi \partial \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi^+ \right] - m \partial [-m + h] \right\}$$

не входят в действие (3), поскольку можно показать, что они ИК-несущественны.

Ренормировка предложенной модели подробно описана в работе [4]. В ренормализационном анализе нужно использовать следующие свойства модели:

- галиллеева инвариантность;
- отсутствие нелокальных контрчленов типа $v' D_v v'$;
- безразмерная постоянная ν выражается в виде $\nu = u_1 \lambda$, где u_1 рассматривается как новый заряд модели и имеет свою собственную константу ренормировки;
- контрчлены типа $v' \partial_t v$, $v' (v \partial v)$ отсутствуют, что является обычным для развитой турбулентности;
- производную в члене $\phi' \partial_i (v_i \phi)$ взаимодействия всегда можно перенести на поле ϕ' или поле ϕ , используя интегрирование по частям.

В рассматриваемой модели связь со статикой нарушается (из-за изменения вида коррелятора D_v). Тем не менее ранее было показано, что мультипликативную ренормировку можно компенсировать добавлением одного нового заряда во взаимодействие $g_5 m'(\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+)$, другими словами, неренормированное действие этого заряда связано с ренормированным обычными мультипликативными соотношениями для полей и параметров:

$$\begin{aligned} S_R(\varphi) &= S(Z_\varphi \varphi), \quad Z_\varphi \varphi \equiv \{Z_\psi \psi, Z_{\psi'} \psi', Z_{\psi^+} \psi^+, Z_{\psi'^+} \psi'^+, Z_m m, Z_{m'} m', Z_v v, Z_{v'} v'\}, \\ \lambda_0 &= \lambda Z_\lambda, \quad u_0 = u Z_u, \quad u_{10} = u_1 Z_{u_1}, \\ g_{10} &= g_1 \mu^\epsilon Z_{g_1}, \quad g_{30} = g_3 \mu^{\epsilon/2} Z_{g_3}, \quad g_{40} = g_4 \mu^\delta Z_{g_4}, \quad g_{50} = g_5 \mu^{\epsilon/2} Z_{g_5}. \end{aligned} \quad (4)$$

При $\epsilon = \delta = 0$ модель является логарифмической, и ультрафиолетовые (УФ) расходимости проявляются в виде полюсов по различным линейным комбинациям параметров ϵ и δ , что очень удобно для практических вычислений [9], [10]. Эти расходимости в размерной регуляризации можно устранить введением констант ренормировки. Их явный вид зависит от выбора схемы вычитания. Разумеется, универсальные результаты не зависят от выбора частной схемы. В схеме минимальных вычитаний из фейнмановских диаграмм вычитаются только УФ-расходящиеся члены, мы используем эту схему в наших вычислениях. Упомянутые выше факты на самом деле позволяют доказать, что ренормированное действие имеет тот же вид, что и (3), и отличается наличием констант ренормировки $Z_{\psi'^+}$, $Z_{\psi'}$, Z_{ψ^+} , Z_ψ , $Z_{m'}$, Z_m , Z_{g_1} , Z_{g_3} , Z_{g_5} , Z_u , Z_{u_1} , Z_λ . Для констант ренормировки полей в действии (3) должны быть выполнены соотношения

$$Z_v Z_{v'} = 1, \quad Z_m Z_{m'} = 1,$$

что является следствием отсутствия ренормировки членов $m' \partial_t m$ и $v' \partial_t v$.

3. УФ-РЕНОРМИРОВКА

РГ-инвариантность [9] можно выразить с помощью дифференциального уравнения $D_{RG} W = 0$, где W соответствует связной или одночастично-неприводимой функции Грина, а дифференциальная часть оператора РГ определяется как

$$D_{RG} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} a \frac{\partial}{\partial a}. \quad (5)$$

Дифференцирование проводится при фиксированном значении затравочных параметров, что отмечено нижним индексом 0. Первое суммирование проводится по всем значениям зарядов $g_i = \{g_1, g_3, g_4, g_5, u, u_1\}$, а второе суммирование – по значениям $\alpha = \lambda, h$. РГ-функции β_{g_i} и γ_F , $F = a, g_i$, даются выражениями

$$\beta_i = \mu \frac{\partial g_i}{\partial \mu} \Big|_0, \quad \gamma_F = \mu \frac{\partial \ln Z_F}{\partial \mu} \Big|_0. \quad (6)$$

Из этого определения и из соотношений (4) следует явный вид бета-функций. Целесообразно перемасштабировать константы взаимодействия:

$$\frac{g_1}{8\pi^2} \rightarrow g_1, \quad \frac{g_4}{8\pi^2} \rightarrow g_4, \quad \frac{g_3}{\sqrt{8\pi^2}} \rightarrow g_3, \quad \frac{g_5}{\sqrt{8\pi^2}} \rightarrow g_5. \quad (7)$$

Из разложения по теории возмущений можно видеть, что “вещественные” константы взаимодействия суть функции g_3^2 и g_5^2 , а не просто g_3 и g_5 . Отсюда происходит квадратный корень для g_3 и g_5 в (7). Этот факт также проявляется в координатах фиксированных точек, поскольку мы ожидаем получить $g_3^2 \propto \epsilon$ и, следовательно, $g_3 \propto \sqrt{\epsilon}$ (это же применимо и для заряда g_5). Используя соотношения (4) и (5), можно записать бета-функции (6) в виде

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} &= g_1(-\epsilon - \gamma_{g_1}), & \beta_{g_4} &= g_4(-\delta + 3\gamma_\nu), & \beta_{u_1} &= -u_1\gamma_{u_1}, \\ \beta_{g_3} &= g_3\left(-\frac{\epsilon}{2} - \gamma_{g_3}\right), & \beta_{g_5} &= g_5\left(-\frac{\epsilon}{2} - \gamma_{g_5}\right), & \beta_u &= -u\gamma_u. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления констант ренормировки в схеме минимальных вычитаний [9] необходимо выделить УФ-расходящиеся члены (в нашем случае полюсы по ϵ и δ) из разложения соответствующих одночастично-неприводимых функций для заданного члена в действии (3) по фейнмановским диаграммам. В частотно-импульсном представлении эти функции можно схематически записать как

$$\begin{aligned} \Gamma_{\psi+\psi'} &= 2\lambda Z_1 + \text{diagram 1}, \\ \Gamma_{m'm'} &= 2\lambda u p^2 Z_2 + \text{diagram 2}, \\ \Gamma_{\psi+\psi} &= i\omega Z_3 - \lambda p^2 Z_4 + \text{diagram 3}, \\ \Gamma_{\psi+\psi+\psi\psi} &= -\frac{2\lambda g_1 \mu^\epsilon}{3} Z_5 + \text{diagram 4}, \\ \Gamma_{\psi+\psi m} &= -i\lambda g_3 \mu^{\epsilon/2} Z_6 + \text{diagram 5}, \\ \Gamma_{m'm} &= -\lambda u p^2 Z_7 + \text{diagram 6}, \\ \Gamma_{m'\psi+\psi} &= -i\lambda g_5 \mu^{\epsilon/2} Z_8 + \text{diagram 7}, \\ \Gamma_{v'v} &= -\nu p^2 Z_9 + \text{diagram 8}, \end{aligned} \quad (9)$$

где сплошные неориентированные линии обозначают хвосты, образованные полями ψ . Линии со стрелками соответствует полю отклика ψ' , линии с крестиками –

комплексно-сопряженным полям (ψ^+ или $\psi^{+'}$), волнистые линии соответствуют полям m и m' , а штриховые линии – полю v' (линия со стрелкой) и полю v . Круги представляют все возможные однопетлевые одночастично-неприводимые фейнмановские диаграммы для заданной функции.

Константы ренормировки (9) связаны с константами ренормировки параметров и полей (4) соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi^{+'}} Z_{\psi'}, & Z_2 &= Z_\lambda Z_u Z_{m'}^2, & Z_3 &= Z_{\psi^{+'}} Z_\psi = Z_{\psi^{+'}} Z_\psi Z_v, \\ Z_3^* &= Z_{\psi'} Z_{\psi^+} = Z_{\psi'} Z_{\psi^+} Z_v, & Z_4 &= Z_{\psi^{+'}} Z_\lambda Z_\psi, & Z_4^* &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_{\psi^+}, \\ Z_5 &= Z_{\psi^{+'}} Z_{g_1} Z_\lambda Z_{\psi^+} Z_\psi^2, & Z_5^* &= Z_{\psi'} Z_{g_1} Z_\lambda Z_{\psi^+} Z_\psi, & Z_6 &= Z_{\psi^{+'}} Z_\lambda Z_{g_3} Z_\psi Z_m, \\ Z_6^* &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_{g_3} Z_{\psi^+} Z_m, & Z_7 &= Z_{m'} Z_\lambda Z_u Z_m, & Z_8 &= Z_{m'} Z_\lambda Z_{g_5} Z_{\psi^+} Z_\psi, \\ & & Z_9 &= Z_{v'} Z_\nu Z_v. \end{aligned}$$

Эти соотношения легко обратить, получим

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= Z_4 Z_3^{-1}, & Z_u &= Z_7 Z_3 Z_4^{-1}, & Z_{m'} &= Z_2^{1/2} Z_7^{-1/2}, & Z_m &= Z_2^{-1/2} Z_7^{1/2}, \\ Z_{g_3} &= Z_6 Z_4^{-1} Z_2^{1/2} Z_7^{-1/2}, & Z_{g_5} &= Z_8 Z_7^{1/2} Z_1 Z_4^{-2} Z_2^{-1/2} Z_3 (Z_3^*)^{-1}, \\ Z_{g_1} &= Z_5 Z_1 Z_4^{-2} (Z_3^*)^{-1}, & Z_{\psi^{+'}} &= Z_{\psi'} = Z_1^{1/2} Z_3^{1/2} Z_4^{-1/2}, \\ Z_{\psi^+} &= Z_\psi = Z_1^{-1/2} Z_3^{1/2} Z_4^{1/2}, & Z_u &= Z_7 Z_4^{-1} Z_3, & Z_v &= 1, & Z_\nu &= Z_9, \end{aligned}$$

Таким образом, если нам известны константы ренормировки Z_1 – Z_9 , то мы немедленно находим аномальные размерности γ , и в однопетлевом приближении получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \frac{3g_4 u_1^2}{8(1+u_1)} + \frac{g_3^2}{(1+u)^3} + \frac{g_3 g_5 u(2+u)}{(1+u)^3}, \\ \gamma_u &= -\frac{g_3^2}{(1+u)^3} - \frac{g_3 g_5 (u^3 + u^2 - 3u - 1)}{2u(1+u)^3} + \frac{3g_4 u_1^2 (1+u_1 - uu_1 - u^2)}{8u(1+u_1)(u+u_1)}, \\ \gamma_{u_1} &= -\frac{g_3^2}{(1+u)^3} - \frac{g_3 g_5 u(2+u)}{(1+u)^3} + \frac{g_4 (1+u_1 - 3u_1^2)}{8(1+u_1)}, \\ \gamma_{g_1} &= -\frac{3g_4 u_1^2}{4(1+u_1)} - \frac{5g_1}{3} - \frac{3g_3^2 g_5 (g_3 - g_5)}{u g_1 (1+u)} + \frac{2g_3 (1+3u+u^2)(g_3 - g_5)}{(1+u)^3}, \\ \gamma_{g_3} &= -\frac{3g_4 u_1^2}{8(1+u_1)} - \frac{g_3^2}{(1+u)^3} + \frac{g_5^2}{4u} - \frac{g_3 g_5 (1+3u+11u^2+5u^3)}{4u(1+u)^3}, & \gamma_{g_4} &= \frac{g_4}{8}, \\ \gamma_{g_5} &= -\frac{3g_4 u_1^2 (1+2u+2u_1)}{8(1+u_1)(u+u_1)} - \frac{g_3 g_5 (5u+23u^2+9u^3-1)}{4u(1+u)^3} + \frac{g_3^2 (2+9u+3u^2)}{2(1+u)^3} - \frac{g_5^2}{4u}, \\ \gamma_m &= \frac{g_3 g_5}{4u} - \frac{g_5^2}{4u}, & \gamma_{m'} &= -\frac{g_3 g_5}{4u} + \frac{g_5^2}{4u}, \\ \gamma_\psi &= \gamma_{\psi^+} = \frac{3g_4 u_1^2}{16(1+u_1)} - \frac{g_3 (g_3 - g_5) (2+4u+u^2)}{2(1+u)^3}, \\ \gamma_{\psi'} &= \gamma_{\psi^{+'}} = -\frac{3g_4 u_1^2}{16(1+u_1)} + \frac{g_3 (g_3 - g_5) u(2+u)}{2(1+u)^3}. \end{aligned}$$

Заметим, что в предельном случае соотношения $g_3 = g_5$, $g_4 = 0$ полученные γ -функции согласуются с результатами для E -модели без учета флуктуаций скорости [3], [11].

4. СКЕЙЛИНГОВЫЕ РЕЖИМЫ И СТРУКТУРА ФИКСИРОВАННЫХ ТОЧЕК

Скейлинговые режимы связаны с фиксированными точками соответствующих РГ-функций. Фиксированные точки определяются как точки $g^* = (g_1^*, g_3^*, g_4^*, g_5^*, u^*, u_1^*)$, в которых все бета-функции одновременно обращаются в нуль:

$$\beta_{g_1}(g^*) = \beta_{g_3}(g^*) = \beta_{g_4}(g^*) = \beta_{g_5}(g^*) = \beta_u(g^*) = \beta_{u_1}(g^*) = 0.$$

Тип фиксированной точки определяется собственными значениями матрицы первых производных $\Omega = \{\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k\}$, где β_i – полный набор бета-функций, а g_k – полный набор зарядов $\{g_1, g_3, g_4, g_5, u, u_1\}$. Асимптотическое поведение в ИК-режиме определяется ИК-устойчивыми фиксированными точками, для которых все собственные значения матрицы Ω положительны. Анализ бета-функций (8) показывает, что имеются несколько возможных режимов в случае отсутствия тепловых флуктуаций, т. е. при $g_3 = 0$. Устойчивые фиксированные точки приведены в табл. 1, а неустойчивые – в табл. 2.

ТАБЛИЦА 1. Устойчивые фиксированные точки.

Тип фиксированной точки	ФТ-1	ФТ-2	ФТ-3	ФТ-4
g_1	0	0	$\frac{3\epsilon}{5}$	$\frac{3\epsilon}{5}$
g_3	0	0	$\epsilon^{1/2}$	$\epsilon^{1/2}$
g_4	0	$\frac{8\delta}{3}$	0	$\frac{8\delta}{3}$
g_5	0	0	$\epsilon^{1/2}$	$\epsilon^{1/2}$
u	0	1	1	1
u_1	0	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$	0	0

Тривиальная гауссова фиксированная точка ФТ-1 является ИК-устойчивой при $\epsilon < 0$ и $\delta < 0$ и соответствует модели, в которой отсутствуют какие бы то ни было нетривиальные взаимодействия. Фиксированная точка ФТ-2 ИК-устойчива в области, определяемой неравенствами $\delta > 0$ и $\delta > 3\epsilon/2$ и соответствует турбулентному режиму (поскольку $g_4^* \neq 0$, $\delta = 4$ и $\gamma_\nu^* = \delta/3$). Фиксированные точки ФТ-3 и ФТ-4 отличаются только значением заряда g_4^* . Для фиксированной точки ФТ-3 гидродинамические флуктуации поля скоростей являются несущественными в ИК-области, а для фиксированной точки ФТ-4 они существенны. Фиксированная точка ФТ-3 устойчива в области $\delta < 0$, $\epsilon > 0$, а фиксированная точка ФТ-4 устойчива в области $0 < \delta < 3\epsilon/2$. Сравнивая фиксированные точки ФТ-8 и ФТ-9 с их контрпартерами ФТ-3 и ФТ-4, мы видим, что отсутствие члена $\psi^{+\prime}\psi^+\psi^2$, отвечающего за взаимодействие, приводит к неустойчивости системы. Вероятно, такое поведение

Таблица 2. Неустойчивые фиксированные точки.

Тип фиксированной точки	ФТ-5	ФТ-6	ФТ-7	ФТ-8	ФТ-9
g_1	0	$\frac{3\epsilon - 2\delta}{5}$	$\frac{3\epsilon - 2\delta}{5}$	0	0
g_3	0	0	0	$\epsilon^{1/2}$	$\epsilon^{1/2}$
g_4	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$	0	$\frac{8\delta}{3}$
g_5	$\frac{\sqrt{2(-19 + \sqrt{13})\delta + 18\epsilon}}{3}$	$\frac{\sqrt{2(-19 + \sqrt{13})\delta + 18\epsilon}}{3}$	0	$\epsilon^{1/2}$	$\epsilon^{1/2}$
u	1	1	1	1	1
u_1	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$	0	0

Таблица 3. Фиксированные точки в предельном случае $u \rightarrow \infty$.

Тип фиксированной точки	ФТ-1a	ФТ-2a	ФТ-3a	ФТ-4a	ФТ-5a
g_1	0	$\frac{3\epsilon}{5}$	$\frac{3\epsilon}{5}$	$\frac{3\epsilon - 2\delta}{5}$	$\frac{3\epsilon - 2\delta}{5}$
f_3	0	$\frac{2\epsilon}{3}$	$\frac{2\epsilon}{3}$	0	0
f_5	0	$\frac{2\epsilon}{3}$	$\frac{2\epsilon}{3}$	0	$2\epsilon - 2\delta$
g_4	0	0	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$
w	0	0	0	0	0
u_1	0	0	0	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$	$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$

можно объяснить эффектом разупорядочивания, обусловленного тепловыми флуктуациями (заряд $g_3 \neq 0$), поскольку другие взаимодействия между существенными степенями свободы (ψ), что могло бы стабилизировать систему, отсутствуют.

Из грубого сравнения общих свойств фиксированных точек ФТ-5, ФТ-6 и ФТ-7 видно, что несмотря на наличие взаимодействия $\psi^{+\prime}\psi^+\psi^2$ флуктуации скоростей дестабилизируют ИК-поведение.

Заряды u и u_1 не играют роли параметров разложения, и поэтому представляется разумным рассмотреть конкретные пределы, когда их значения стремятся к бесконечности. Пусть $u \rightarrow \infty$, результаты для этого случая отражены в табл. 3. Для анализа такого режима введем новые переменные $w \equiv 1/u$, $f_3 \equiv g_3^2/u$ и $f_5 \equiv g_5^2/u$. Их бета-функции имеют вид $\beta_w = w\gamma_u$, $\beta_{f_3} = f_3[-\epsilon + \gamma_u - 2\gamma_{g_3}]$ и $\beta_{f_5} = f_5[-\epsilon + \gamma_u - 2\gamma_{g_5}]$. Фиксированная точка ФТ-1a отвечает гауссовой (свободной) фиксированной точке. Фиксированные точки ФТ-2a и ФТ-3a различаются лишь значением g_4^* . Фик-

Таблица 4. Фиксированные точки в предельном случае $u_1 \rightarrow \infty$.

Тип фиксированной точки	ФТ-1б	ФТ-2б	ФТ-3б	ФТ-4б	ФТ-5б
g_1	0	0	$\frac{3\epsilon}{5}$	$\frac{3(\epsilon - 2\delta)}{5}$	$\frac{3(\epsilon - 2\delta)}{5}$
g_3	0	0	0	0	0
g_5	0	$\sqrt{2\epsilon}$	$\sqrt{2\epsilon}$	0	$\sqrt{2(\epsilon - 4\delta)}$
f_4	0	0	0	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$
u	0	1	1	1	1
w_1	0	0	0	0	0

Таблица 5. Фиксированные точки в предельном случае $u \rightarrow \infty$, $u_1 \rightarrow \infty$.

Тип фиксированной точки	ФТ-1в	ФТ-2в	ФТ-3в	ФТ-4в	ФТ-5в
g_1	0	0	$\frac{3\epsilon}{5}$	$\frac{3(\epsilon - 2\delta)}{5}$	$\frac{3(\epsilon - 2\delta)}{5}$
f_3	0	$\frac{2\epsilon}{3}$	$\frac{2\epsilon}{3}$	0	0
f_5	0	$\frac{2\epsilon}{3}$	$\frac{2\epsilon}{3}$	0	$2(\epsilon - 3\delta)$
f_4	0	0	0	$\frac{8\delta}{3}$	$\frac{8\delta}{3}$
w	0	0	0	0	0
w_1	0	0	0	0	0

сированная точка ФТ-4а отвечает турбулентному режиму, когда взаимодействие $\psi^{+\prime}\psi^{+}\psi^2$ является существенным. Последняя фиксированная точка ФТ-5а представляет собой случай без тепловых флуктуаций ($f_3 = 0$).

Рассмотрим еще один предельный случай $u_1 \rightarrow \infty$, результаты для этого случая приведены в табл. 4. Здесь определены новые переменные $w_1 = 1/u_1$ и $f_4 = g_4 u_1$. Соответствующие бета-функции имеют вид $\beta_{w_1} = w_1 \gamma_{u_1}$ и $\beta_{f_4} = f_4 [-\delta + 3\gamma_{\nu} - \gamma_{u_1}]$. Из табл. 4 снова видно, что единственным различием между фиксированными точками ФТ-2б и ФТ-3б является значение заряда g_4^* , а фиксированная точка ФТ-4б управляет турбулентным режимом. Фиксированная точка ФТ-5б соответствует нетривиальному режиму ИК-скейлинга без тепловых флуктуаций.

Наконец, проанализируем случай, когда заряды u и u_1 одновременно стремятся к бесконечности (см. табл. 5). В режиме фиксированной точки ФТ-2в члены взаимодействия $\psi^{+\prime}\psi^{+}\psi^2$ являются несущественными, в отличие от фиксированной точки ФТ-3в. Режим фиксированной точки ФТ-4в соответствует турбулентности

со взаимодействием $\psi^{+'}\psi^+\psi^2$, а в режиме фиксированной точки ФТ-5в взаимодействие $\psi^{+'}\psi^+\psi^2$ является несущественным.

Последний, наиболее нетривиальный, случай соответствует ситуации, при которой все заряды оказываются ненулевыми. Однако вследствие громоздкой структуры функций γ мы пока не смогли найти координаты такой фиксированной точки и ее область устойчивости. Разумеется, из результатов для других фиксированных точек нам известно, где следует искать эту область устойчивости. В будущих исследованиях мы сможем подтвердить наши предположения с помощью прямых численных расчетов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали E -модель в окрестности критической точки фазового перехода из нормальной в сверхтекучую фазу с учетом как критических флуктуаций, так и флуктуаций скоростей. Показано, что модель можно сделать мультипликативно ренормируемой путем добавления нового заряда в часть действия, отвечающую взаимодействию. Константы ренормировки и функции РГ вычислены с точностью до первого порядка теории возмущений (в одной петле), также нам удалось частично проанализировать структуру фиксированных точек, причем основное наблюдение заключается в том, что включение в модель флуктуаций скорости приводит к дестабилизации критического поведения.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-02-00874_a), Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант VEGA 1/0222/13), а также при поддержке Centre of Excellency for Nanofluid, Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences и National Scholarship Programme of the Slovak Republic. Работа выполнена в рамках программы “Cooperative phenomena and phase transition in nanosystems with perspective utilization in nano- and biotechnology” (проекты № 26220120033, 26110230061, 26220129921). Финансирование исследования и программы развития было предоставлено European Regional Development Fund.

Список литературы

- [1] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, М., 2006.
- [2] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 435–479.
- [3] C. De Dominicis, L. Peliti, *Phys. Rev. B*, **18**:1 (1978), 353–376.
- [4] М. В. Комарова, Д. М. Краснов, М. Ю. Налимов, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 89–99.
- [5] J. Honkonen, M. Yu. Nalimov, *J. Phys. A*, **22**:6 (1989), 751–763.
- [6] J. Honkonen, M. Yu. Nalimov, *Z. Phys. B*, **99**:2 (1996), 297–303.
- [7] N. V. Antonov, M. Hnatic, J. Honkonen, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7867–7887.
- [8] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437.
- [9] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **85**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [10] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
- [11] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.