Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Лавров, П. Ю. Мошин, Ковариантное квантование модели Воровича–Катанаева, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 399–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:58:21

© 1998 г.

П. М. Лавров*, П. Ю. Мошин*

КОВАРИАНТНОЕ КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ ВОЛОВИЧА–КАТАНАЕВА

Рассмотрена модель Воловича–Катанаева (модель двумерной гравитации с динамическим кручением) в формализме квантования Баталина–Вилковического калибровочных теорий, а также в рамках метода фонового поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к теориям двумерной гравитации [1–9] и супергравитации [10–12] обусловлен, главным образом, их тесной связью с теориями струн и суперструн. Наряду с этим изучение простых двумерных моделей способствует лучшему пониманию классических и квантовых аспектов теории гравитации более высоких размерностей. Следует отметить и то, что в ряде случаев такие модели точно решаемы на классическом уровне.

Одной из активно обсуждаемых в последнее время (как на классическом [13–16], так и на квантовом [17–20] уровне) теорий двумерной гравитации является модель [7], предложенная Воловичем и Катанаевым (ВК) в контексте теории бозонной струны с динамической геометрией [21] с целью преодоления ряда трудностей теории струн. Так, в [21] было показано (в рамках формализма функционального интегрирования), что струна с динамической геометрией не имеет критической размерности. С другой стороны, модель ВК [7] является наиболее общей теорией двумерной R^2 -гравитации с независимым динамическим полем кручения, приводящей к уравнениям движения второго порядка для диады и лоренцевой связности. Уравнения движения модели были проанализированы в [7, 13, 14] (соответственно, в конформной калибровке [7, 13] и в калибровке светового конуса [14]), где была показана их полная интегрируемость. При этом модель ВК допускает решения с постоянной кривизной и нулевым кручением, включая в себя, в частности, ряд других двумерных моделей гравитации [1, 2, 9] (действие которых, однако, не имеет в отличие от модели ВК чисто геометрической интерпретации).

Структура калибровочных симметрий модели ВК в гамильтоновом формализме изучалась в работе [16], а ее каноническое квантование – в [17, 18].

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

Наш интерес к модели ВК вызван недавней работой [20], авторами которой была предпринята попытка квантования предложенной ими модели (со вспомогательными скалярными полями), классически эквивалентной модели ВК. Для квантования этой теории (в формулировке с алгеброй калибровочных преобразований, разомкнутой экстремалами действия) авторы [20] пользуются некоторой модификацией правил Фаддеева–Попова, однако дать последовательной процедуры для построения квантового действия им, на наш взгляд, не удалось. Отметим, что классическая эквивалентность теорий не означает в общем случае их эквивалентности на квантовом уровне (см., например, [22]). В этой связи в настоящей работе мы рассматриваем исходную модель ВК с точки зрения двух различных версий лагранжева квантования, а именно, в рамках схемы квантования Баталина–Вилковыского (БВ) [23] калибровочных теорий общего вида, а также в методе фонового поля (изложение которого можно найти, например, в книге [24]).

Для записи общих формул [23] в работе используются обозначения Девитта [25]. Грассмановская четность и гостовское число величины A обозначаются соответственно $\varepsilon(A)$, $\text{gh}(A)$. Для индексов величин, преобразующихся по собственному представлению внутренней группы Лоренца, используются буквы латинского алфавита: $a, b, c, \dots$ ($a = 0, 1$); ε^{ab} – постоянный антисимметричный псевдотензор второго ранга, нормированный условием $\varepsilon^{01} = 1$. Индексы объектов, преобразующихся как (псевдо)тензоры при общекоординатных преобразованиях, греческие: $\lambda, \mu, \nu, \dots$ ($\lambda = 0, 1$), при этом $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ ($\epsilon^{01} = 1$). Производные по полям понимаются как правые, а по источникам и антиполям – как левые.

2. МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ С ДИНАМИЧЕСКИМ КРУЧЕНИЕМ

Теория двумерной гравитации с динамическим кручением, предложенная ВК [7], описывается (в терминах переменных диада, лоренцева связность (e_μ^a, ω_μ)) действием вида

$$\mathcal{S}(e_\mu^a, \omega_\mu) = \int d^2x e \left(\frac{1}{16\alpha} R_{\mu\nu}{}^{ab} R^{\mu\nu}{}_{ab} - \frac{1}{8\beta} T_{\mu\nu}{}^a T^{\mu\nu}{}_a - \gamma \right), \quad (1)$$

где α, β, γ – постоянные параметры. В (1) поднятие и опускание латинских индексов осуществляется с помощью метрики Минковского η_{ab} с сигнатурой $(+, -)$, а греческих – с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$; кроме того, используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e &= \det e_\mu^a, \\ R_{\mu\nu}{}^{ab} &= \varepsilon^{ab} R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu), \\ T_{\mu\nu}{}^a &= \partial_\mu e_\nu^a + \varepsilon^{ab} \omega_\mu e_{\nu b} - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned}$$

Действие (1) инвариантно относительно локальных лоренцевых преобразований $e_\mu^a \rightarrow e_\mu'^a$, $\omega_\mu \rightarrow \omega_\mu'$:

$$\begin{aligned} e_\mu'^a &= (\Lambda e_\mu)^a, \\ (\Omega'_\mu)^a_b &= (\Lambda \Omega_\mu \Lambda^{-1})^a_b + (\Lambda \partial_\mu \Lambda^{-1})^a_b, \quad (\Omega_\mu)^a_b = \varepsilon^{ac} \eta_{cb} \omega_\mu, \end{aligned} \quad (2)$$

или в инфинитезимальном виде (с параметром ζ):

$$\delta e_\mu^a = \varepsilon^{ab} e_{\mu b} \zeta, \quad \delta \omega_\mu = -\partial_\mu \zeta, \quad (3)$$

а также относительно общесоординатных преобразований:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x'(x), \\ e_\mu^a &\rightarrow e_\mu'^a(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} e_\lambda^a(x), \\ \omega_\mu &\rightarrow \omega_\mu'(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \omega_\lambda(x), \end{aligned} \quad (4)$$

и, следовательно, относительно соответствующих бесконечно малых преобразований формы (с параметрами ξ^μ):

$$\begin{aligned} \delta e_\mu^a &= e_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu e_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta \omega_\mu &= \omega_\nu \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \omega_\mu) \xi^\nu. \end{aligned} \quad (5)$$

Совокупность калибровочных преобразований (3), (5) образует замкнутую алгебру

$$\begin{aligned} [\delta_\zeta(1), \delta_\zeta(2)] &= 0, \\ [\delta_\xi(1), \delta_\xi(2)] &= \delta_{\xi(1,2)}, \\ [\delta_\zeta, \delta_\xi] &= \delta_{\zeta'}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\xi^\mu_{(1,2)} = \xi^\nu_{(1)} \partial_\nu \xi^\mu_{(2)} - (\partial_\nu \xi^\mu_{(1)}) \xi^\nu_{(2)}, \quad \zeta' = (\partial_\mu \zeta) \xi^\mu.$$

Действие (1) представимо (при $e \neq 0$) в виде

$$\mathcal{S}(e_\mu^a, \omega_\mu) = \int d^2x \left(\frac{1}{4e\alpha} F^2 + \frac{1}{4e\beta} T_a T^a - e\gamma \right),$$

где

$$F = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad T^a = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} T_{\mu\nu}{}^a,$$

и эквивалентно [20] действию $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}(e_\mu^a, \omega_\mu, \varphi, \varphi_a)$:

$$\tilde{\mathcal{S}}(e_\mu^a, \omega_\mu, \varphi, \varphi_a) = \int d^2x \{ (\varphi F + \varphi_a T^a) - e(\alpha \varphi^2 + \beta \varphi_a \varphi^a + \gamma) \}, \quad (7)$$

при исключении вспомогательных полей φ , φ_a на уравнениях движения $\tilde{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta e_\mu^a} &= \epsilon^{\mu\nu} \{ \partial_\nu \varphi_a + \varepsilon_{ab} \omega_\nu \varphi^b + \varepsilon_{ab} e_\nu^b (\alpha \varphi^2 + \beta \varphi_c \varphi^c + \gamma) \}, \\ \frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta \omega_\mu} &= \epsilon^{\mu\nu} (\partial_\nu \varphi + \varepsilon^{ab} \varphi_a e_{\nu b}), \\ \frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta \varphi} &= F - 2\alpha e \varphi, \\ \frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta \varphi_a} &= T^a - 2\beta e \varphi^a.\end{aligned}$$

Действие (7) инвариантно относительно совокупности локальных лоренцевых преобразований (2) исходных полей e_μ^a , ω_μ и преобразований вспомогательных полей φ , φ_a :

$$\varphi' = \varphi, \quad \varphi'_a = (\Lambda^{-1})_a^b \varphi_b, \quad (8)$$

а также относительно совокупности общекоординатных преобразований (4) и преобразований вида

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad \varphi'_a(x') = \varphi_a(x). \quad (9)$$

В инфинитезимальной форме (2), (8) и (4), (9) приводят к калибровочным преобразованиям (с параметрами ζ , ξ^μ)

$$\begin{aligned}\delta e_\mu^a &= \varepsilon^{ab} e_{\mu b} \zeta + e_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu e_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta \omega_\mu &= -\partial_\mu \zeta + \omega_\nu \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \omega_\mu) \xi^\nu, \\ \delta \varphi &= (\partial_\mu \varphi) \xi^\mu, \\ \delta \varphi_a &= \varepsilon_{ab} \varphi^b \zeta + (\partial_\nu \varphi_a) \xi^\nu,\end{aligned} \quad (10)$$

образующим замкнутую алгебру вида (6).

Отметим, что действие (7) также инвариантно относительно бесконечно малых преобразований (с параметрами $\bar{\zeta}$, $\bar{\xi}^a$)

$$\begin{aligned}\bar{\delta} e_\mu^a &= \varepsilon^{ab} e_{\mu b} \bar{\zeta} + \partial_\mu \bar{\xi}^a + \varepsilon^{ab} \omega_\mu \bar{\xi}_b + 2\beta \varepsilon_{cd} \varphi^a e_\mu^c \bar{\xi}^d, \\ \bar{\delta} \omega_\mu &= -\partial_\mu \bar{\zeta} + 2\alpha \varepsilon_{cd} \varphi e_\mu^c \bar{\xi}^d, \\ \bar{\delta} \varphi &= -\varepsilon^{ab} \varphi_a \bar{\xi}_b, \\ \bar{\delta} \varphi_a &= \varepsilon_{ab} \varphi^b \bar{\zeta} - \varepsilon_{ab} (\alpha \varphi^2 + \beta \varphi_c \varphi^c + \gamma) \bar{\xi}^b,\end{aligned} \quad (11)$$

алгебра которых разомкнута экстремальными действия $\tilde{\mathcal{S}}$ (7)

$$\begin{aligned}[\bar{\delta}_{\bar{\zeta}(1)}, \bar{\delta}_{\bar{\zeta}(2)}] &= 0, \\ [\bar{\delta}_{\bar{\zeta}}, \bar{\delta}_{\bar{\xi}}] &= \bar{\delta}_{\bar{\xi}'}, \\ [\bar{\delta}_{\bar{\xi}(1)}, \bar{\delta}_{\bar{\xi}(2)}] &= \bar{\delta}_{\bar{\zeta}(1,2)} + \bar{\delta}_{\bar{\xi}(1,2)} + 2\epsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{cd} \bar{\xi}^c(1) \bar{\xi}^d(2) \left(\alpha \frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta \omega_\mu} \frac{\delta}{\delta \omega_\nu} + \beta \eta^{ab} \frac{\delta \tilde{\mathcal{S}}}{\delta e_\mu^a} \frac{\delta}{\delta e_\nu^b} \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\xi}'^a &= -\varepsilon^{ab}\bar{\xi}_b, \\ \bar{\xi}_{(1,2)} &= -2\alpha\varepsilon_{ab}\bar{\xi}_{(1)}^a\bar{\xi}_{(2)}^b\varphi, \\ \bar{\xi}_{(1,2)}^a &= 2\beta\varepsilon_{bc}\bar{\xi}_{(1)}^b\bar{\xi}_{(2)}^c\varphi^a.\end{aligned}$$

Преобразования (11) отвечают набору генераторов, эквивалентному набору в (10), совпадая при выборе параметров $\bar{\zeta} = \zeta - \omega_\mu \xi^\mu$, $\bar{\xi}^a = e_\mu^a \xi^\mu$ с преобразованиями (10) на экстремалих:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}e_\mu^a &= \delta e_\mu^a - \epsilon_{\mu\nu} \frac{\delta\tilde{\mathcal{S}}}{\delta\varphi_a} \xi^\nu, \\ \bar{\delta}\omega_\mu &= \delta\omega_\mu - \epsilon_{\mu\nu} \frac{\delta\tilde{\mathcal{S}}}{\delta\varphi} \xi^\nu, \\ \bar{\delta}\varphi &= \delta\varphi + \epsilon_{\mu\nu} \frac{\delta\tilde{\mathcal{S}}}{\delta\omega_\mu} \xi^\nu, \\ \bar{\delta}\varphi_a &= \delta\varphi_a + \epsilon_{\mu\nu} \frac{\delta\tilde{\mathcal{S}}}{\delta e_\mu^a} \xi^\nu.\end{aligned}$$

Отметим, что процедура лагранжева квантования в общем случае чувствительна к выбору исходной калибровочной теории из класса эквивалентных и, в частности, к различному выбору генераторов калибровочных преобразований. Так, в [22] показано, что теория с унитарной S -матрицей при одном выборе генераторов может оказаться при другом их выборе неунитарной. В этой связи в дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на рассмотрении исходной модели (1), (3), (5), (6).

3. КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ

3.1. Рассмотрим исходную модель (1), (3), (5), (6) в рамках формализма БВ-квантования [23] неприводимых калибровочных теорий. Для этого прежде всего введем полное конфигурационное пространство ϕ^A . Оно строится посредством расширения исходного пространства полей (e_μ^a, ω_μ) путем введения гостов Фаддеева–Попова $(\bar{C}, C, \bar{C}^\mu, C^\mu)$ и лагранжевых множителей (b, b^μ) по числу калибровочных параметров в (3), (5) (соответственно, для ζ, ξ^μ). Статистика и гостовские числа полей ϕ^A :

$$\phi^A = (e_\mu^a, \omega_\mu; b, b^\mu; \bar{C}, C, \bar{C}^\mu, C^\mu),$$

имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon(e_\mu^a) &= \varepsilon(\omega_\mu) = \varepsilon(b) = \varepsilon(b^\mu) = 0, \\ \varepsilon(\bar{C}) &= \varepsilon(C) = \varepsilon(\bar{C}^\mu) = \varepsilon(C^\mu) = 1, \\ \text{gh}(e_\mu^a) &= \text{gh}(\omega_\mu) = \text{gh}(b) = \text{gh}(b^\mu) = 0, \\ \text{gh}(\bar{C}) &= \text{gh}(\bar{C}^\mu) = -1, \quad \text{gh}(C) = \text{gh}(C^\mu) = 1.\end{aligned}$$

Кроме того, для полей ϕ^A введем набор антиполей ϕ_A^*

$$\phi_A^* = (e_a^{*\mu}, \omega^{*\mu}; b^*, b_\mu^*, \bar{C}^*, C^*, \bar{C}_\mu^*, C_\mu^*)$$

со следующим заданием статистики и гостовских чисел:

$$\varepsilon(\phi_A^*) = \varepsilon(\phi^A) + 1, \quad \text{gh}(\phi_A^*) = -1 - \text{gh}(\phi^A).$$

Производящий функционал $Z(J)$ функций Грина полей ϕ^A в методе БВ-квантования представим, как известно, в виде следующего функционального интеграла:

$$Z(J) = \int d\phi d\phi^* d\lambda \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S(\phi, \phi^*) + \left(\phi_A^* - \frac{\delta \Psi}{\delta \phi^A} \right) \lambda^A + J_A \phi^A \right] \right\}. \quad (12)$$

В (12) J_A — источники к полям ϕ^A , для которых

$$\varepsilon(J_A) = \varepsilon(\phi^A), \quad \text{gh}(J_A) = -\text{gh}(\phi^A),$$

λ^A — вспомогательные поля,

$$\varepsilon(\lambda^A) = \varepsilon(\phi_A^*), \quad \text{gh}(\lambda^A) = -\text{gh}(\phi_A^*),$$

$\Psi = \Psi(\phi)$ — калибровочный фермион, а бозонный функционал $S = S(\phi, \phi^*)$ удовлетворяет производящему уравнению

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^A} \frac{\delta S}{\delta \phi_A^*} = i\hbar \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^A \delta \phi_A^*} \quad (13)$$

с граничным условием

$$S|_{\phi^*=\hbar=0} = S, \quad (14)$$

где S — исходное классическое действие.

Решение производящего уравнения (13), удовлетворяющее граничному условию (14), для модели (1), (3), (5), (6) представимо в виде функционала $S = S(\phi, \phi^*)$, линейного по антиполям (мы предполагаем регуляризацию типа размерной),

$$\begin{aligned} S &= S_{\min} + \int d^2x (\bar{C}^* b + \bar{C}_\mu^* b^\mu), \\ S_{\min} &= S + \int d^2x \left\{ e_a^{*\mu} (\varepsilon^{ab} e_{\mu b} C + (\partial_\lambda e_\mu^a) C^\lambda + e_\lambda^a \partial_\mu C^\lambda) - \right. \\ &\quad - \omega^{*\mu} (\partial_\mu C - (\partial_\lambda \omega_\mu) C^\lambda - \omega_\lambda \partial_\mu C^\lambda) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C^* (\partial_\mu C) C^\mu + C_\mu^* C^\lambda \partial_\lambda C^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Калибровочный фермион $\Psi = \Psi(\phi)$ выберем в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= \int d^2x (\bar{C}\chi + \bar{C}^\mu\chi_\mu), \\ \chi &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\omega_\nu, \quad \chi_\mu = \eta^{\lambda\nu}e_{\lambda a}\partial_\mu e_\nu^a,\end{aligned}\tag{16}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – метрика двумерного пространства Минковского с сигнатурой $(+, -)$.

С учетом (15), (16) интегрирование по переменным λ^A, ϕ_A^* в (12) приводит к следующему представлению для производящего функционала функций Грина:

$$Z(J) = \int d\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S + S_{\text{GF}}(\phi) + S_{\text{GH}}(\phi) + J_A \phi^A) \right\}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}S_{\text{GF}} &= \int d^2x (\chi b + \chi_\mu b^\mu), \\ S_{\text{GH}} &= \int d^2x \left\{ \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{C} (\partial_\mu C - (\partial_\lambda \omega_\mu) C^\lambda - \omega_\lambda \partial_\mu C^\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - (\eta^{\mu\nu} \bar{C}^\lambda \partial_\lambda e_\nu^a - \eta^{\lambda\mu} \partial_\nu (\bar{C}^\nu e_\lambda^a)) (\varepsilon_{ab} e_\mu^b C - (\partial_\sigma e_{\mu a}) C^\sigma - e_{\sigma a} \partial_\mu C^\sigma) \right\}.\end{aligned}$$

3.2. Обратимся теперь к рассмотрению исходной теории (1), (3), (5), (6) в рамках метода фонового поля (см., например, [24]). Для этого, во-первых, исходному набору полей сопоставим набор (A, Q) фоновых $A = (e_\mu^a, \omega_\mu)$ и квантовых $Q = (q_\mu^a, q_\mu)$ полей. Во-вторых, исходным калибровочным преобразованиям (3), (5) сопоставим два вида преобразований, а именно фоновые δ_B и квантовые δ_Q , по правилу

$$\begin{aligned}\delta_B e_\mu^a &= \varepsilon^{ab} e_{\mu b} \zeta + e_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu e_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta_B \omega_\mu &= -\partial_\mu \zeta + \omega_\nu \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \omega_\mu) \xi^\nu, \\ \delta_B q_\mu^a &= \varepsilon^{ab} q_{\mu b} \zeta + q_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu q_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta_B q_\mu &= q_\nu \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu q_\mu) \xi^\nu,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\delta_Q e_\mu^a &= \delta_Q \omega_\mu = 0, \\ \delta_Q q_\mu^a &= \varepsilon^{ab} (e_{\mu b} + q_{\mu b}) \zeta + (e_\nu^a + q_\nu^a) \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu e_\mu^a + \partial_\nu q_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta_Q q_\mu &= -\partial_\mu \zeta + (\omega_\nu + q_\nu) \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \omega_\mu + \partial_\nu q_\mu) \xi^\nu.\end{aligned}\tag{19}$$

Очевидно, что действие $S(A + Q)$ в (1) инвариантно относительно обоих типов преобразований (18), (19).

Далее, следуя методу фонового поля, введем аналог производящего функционала функций Грина $Z(J, A)$ (его связь со стандартным производящим функционалом установлена в [26])

$$Z(J, A) = \int dQ d\bar{C} dC \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S(A + Q) + S_{\text{GF}}(A, Q) + S_{\text{GH}}(A, Q; \bar{C}, C) + JQ) \right\}, \tag{20}$$

где $J = (J_a^\mu, J^\mu)$ – источники к квантовым полям $Q = (q_\mu^a, q_\mu)$. В (20) $S_{\text{GH}} = S_{\text{GH}}(A, Q)$ – функционал, построенный по функциям фиксации калибровки χ, χ_μ (соответствующим параметрам ζ, ξ^μ) из требования инвариантности относительно фоновых преобразований, т.е. $\delta_B S_{\text{GH}} = 0$. При этом функционал $S_{\text{GH}} = S_{\text{GH}}(A, Q; \overline{C}, C)$ строится по правилу

$$S_{\text{GH}} = \int d^2x (\overline{C} \delta_Q \chi + \overline{C}^\mu \delta_Q \chi_\mu), \quad (21)$$

где в преобразованиях δ_Q сделана замена $(\zeta, \xi^\mu) \rightarrow (C, C^\mu)$.

Введем калибровочные условия $\chi = \chi(A, Q)$, $\chi_\mu = \chi_\mu(A, Q)$, линейные по квантовым полям $Q = (q_\mu^a, q_\mu)$,

$$\begin{aligned} \chi &= e g^{\mu\nu} \nabla_\mu q_\nu, \\ \chi_\mu &= e g^{\lambda\nu} e_{\mu a} \nabla_\lambda q_\nu^a, \end{aligned} \quad (22)$$

где $e, g^{\mu\nu}$ строятся по фоновым полям e_μ^a ($g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$, $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$, $e = \det e_\mu^a$), а действие ковариантной производной ∇_μ на произвольное (псевдо)тензорное поле $T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m$ определяется правилом $((\Omega_\mu)_b^a = \varepsilon^{ac} \eta_{cb} \omega_\mu)$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m &= \partial_\mu T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m - \Gamma_{\mu\mu_1}^\lambda T_{\lambda \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m - \dots \\ &\dots - \Gamma_{\mu\mu_k}^\lambda T_{\mu_1 \dots \lambda}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu_1} T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\lambda \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m + \dots + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu_n} T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \lambda} b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m + \\ &+ (\Omega_\mu)_c^{b_1} T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} c \dots b_n a_1 \dots a_m + \dots + (\Omega_\mu)_c^{b_n} T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots c a_1 \dots a_m - \\ &- (\Omega_\mu)_{a_1}^c T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n c \dots a_m - \dots - (\Omega_\mu)_{a_m}^c T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} b_1 \dots b_n a_1 \dots c. \end{aligned} \quad (23)$$

В (23) $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ – символы Кристоффеля, построенные по метрике $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Для ковариантной производной ∇_μ (23) очевидно, что выполняется свойство

$$\nabla_\mu (FG) = F \nabla_\mu G + (\nabla_\mu F) G,$$

где F, G – произвольные (псевдо)тензорные поля. Нетрудно также проверить соотношения

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0.$$

В качестве S_{GF} возьмем функционал (p, q – числа)

$$S_{\text{GF}} = \frac{1}{2} \int d^2x e (p \chi^2 + q \chi_\mu \chi^\mu), \quad (24)$$

инвариантный по построению относительно локальных лоренцевых преобразований вида

$$\begin{aligned} e_\mu^{'a} &= (\Lambda e_\mu)^a, & q_\mu^{'a} &= (\Lambda q_\mu)^a, \\ (\Omega_\mu^{'a})_b^c &= (\Lambda \Omega_\mu \Lambda^{-1})_b^c + (\Lambda \partial_\mu \Lambda^{-1})_b^c, & q_\mu^{'a} &= q_\mu, \end{aligned} \quad (25)$$

а также относительно общекординатных преобразований

$$\begin{aligned} e'_\mu{}^a(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} e_\lambda^a(x), & \omega'_\mu(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \omega_\lambda(x), \\ q'_\mu{}^a(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} q_\lambda^a(x), & q'_\mu(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} q_\lambda(x). \end{aligned} \quad (26)$$

При этом бесконечно малый вид преобразований (25) и преобразования формы, отвечающие (26), совпадают с фоновыми преобразованиями (18).

Заметим, что (ненулевые) квантовые преобразования (19) представимы с учетом определения (23) в виде ($\zeta \rightarrow C$, $\xi^\mu \rightarrow C^\mu$):

$$\begin{aligned} \delta_Q q_\mu^a &= \varepsilon^{ab}(e_{\mu b} + q_{\mu b})C + (e_\nu^a + q_\nu^a)\nabla_\mu C^\nu + (\nabla_\nu e_\mu^a + \nabla_\nu q_\mu^a)C^\nu - \varepsilon^{ab}\omega_\nu(e_{\mu b} + q_{\mu b})C^\nu, \\ \delta_Q q_\mu &= -\nabla_\mu C + (\omega_\nu + q_\nu)\nabla_\mu C^\nu + (\nabla_\nu \omega_\mu + \nabla_\nu q_\mu)C^\nu, \end{aligned}$$

тогда функционал S_{GH} (21) примет вид

$$\begin{aligned} S_{\text{GH}} &= \int d^2x e \left\{ -\overline{C}\nabla_\mu \nabla^\mu C + \overline{C}\nabla^\mu [(\nabla_\nu \omega_\mu + \nabla_\nu q_\mu)C^\nu + (\omega_\nu + q_\nu)\nabla_\mu C^\nu] + \right. \\ &\quad + \varepsilon^{ab}\overline{C}^\mu e_{\mu a}\nabla^\nu [(e_{\nu b} + q_{\nu b})(C - \omega_\lambda C^\lambda)] + \\ &\quad \left. + \overline{C}^\mu e_{\mu a}\nabla^\nu [(\nabla_\lambda e_\nu^a + \nabla_\lambda q_\nu^a)C^\lambda + (e_\lambda^a + q_\lambda^a)\nabla_\nu C^\lambda] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Нетрудно убедиться, что квантовое действие $S = \mathcal{S} + S_{\text{GF}} + S_{\text{GH}}$ в (1), (24), (27) инвариантно относительно совокупности фоновых преобразований (18) и преобразований гостовских полей

$$\begin{aligned} \delta \overline{C} &= (\partial_\mu \overline{C})\xi^\mu, & \delta C &= -C^\mu \partial_\mu \zeta + (\partial_\mu C)\xi^\mu, \\ \delta \overline{C}^\mu &= -\overline{C}^\nu \partial_\nu \xi^\mu + (\partial_\nu \overline{C}^\mu)\xi^\nu, \\ \delta C^\mu &= -C^\nu \partial_\nu \xi^\mu + (\partial_\nu C^\mu)\xi^\nu. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом (18), (28) легко установить, что функционал $Z(J, A)$ (20) инвариантен относительно совокупности исходных калибровочных преобразований (3), (5) фоновых полей $A = (e_\mu^a, \omega_\mu)$ и преобразований источников $J = (J_a^\mu, J^\mu)$:

$$\begin{aligned} \delta J_a^\mu &= \varepsilon_{ab}J^{\mu b}\zeta - J_a^\nu \partial_\nu \xi^\mu + \partial_\nu (J_a^\mu \xi^\nu), \\ \delta J^\mu &= -J^\nu \partial_\nu \xi^\mu + \partial_\nu (J^\mu \xi^\nu). \end{aligned} \quad (29)$$

Следствием инвариантности

$$Z(J, A) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W(J, A) \right\}$$

относительно преобразований (3), (5), (29) является инвариантность функционала $\Gamma = \Gamma(\bar{Q}, A)$, $\bar{Q} = (\bar{q}_\mu^a, \bar{q}_\mu)$:

$$\Gamma(\bar{Q}, A) = W(J, A) - J\bar{Q}, \quad \bar{Q} = \frac{\delta W}{\delta J}, \quad J = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{Q}},$$

относительно совокупности преобразований (3), (5) и преобразований полей $\bar{Q}$ вида

$$\begin{aligned} \delta \bar{q}_\mu^a &= \varepsilon^{ab} \bar{q}_{\mu b} \zeta + \bar{q}_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \bar{q}_\mu^a) \xi^\nu, \\ \delta \bar{q}_\mu &= \bar{q}_\nu \partial_\mu \xi^\nu + (\partial_\nu \bar{q}_\mu) \xi^\nu. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу (30) эффективное действие $\Gamma(A)$, определяемое в методе фонового поля по правилу

$$\Gamma(A) = \Gamma(\bar{Q}, A)|_{\bar{Q}=0},$$

инвариантно относительно исходных калибровочных преобразований (3), (5) фоновых полей $A = (e_\mu^a, \omega_\mu)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено квантование модели ВК [7] (теории двумерной гравитации с динамическим кручением) в рамках двух различных лагранжевых методов. Так, для данной модели (1), (3), (5) получен производящий функционал функций Грина (17) в формализме БВ-квантования [23] калибровочных теорий общего вида, а также аналог производящего функционала функций Грина (20), (24), (27) для построения калибровочно-инвариантного эффективного действия в рамках метода фонового поля (см., например, [24]). В отношении классически эквивалентной модели (7), (11) со вспомогательными полями, предложенной в [20], отметим, что, во-первых, на квантовом уровне она может оказаться неэквивалентной исходной теории (1), (3), (5), а во-вторых, при ее квантовании должны встретиться трудности, связанные с необходимостью решения производящих уравнений для случая открытой алгебры, как того требует последовательная (в отличие от предложенной в [20]) процедура квантования.

Авторы выражают благодарность И. Л. Бухбиндеру за полезные обсуждения результатов работы.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 96-02-16017) и совместным ДФГ-РФФИ проектом 96-02-00180.

Список литературы

- [1] *R. Jackiw*. Nucl. Phys. B. 1985. V. 252. P. 343.
- [2] *C. Teitelboim*. Phys. Lett. B. 1983. V. 126. P. 41; *T. Banks, L. Susskind*. Int. J. Theor. Phys. 1984. V. 23. P. 475; *I. M. Lichtzier, S. D. Odintsov*. Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 1953.
- [3] *N. Sanchez*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 266. P. 487.
- [4] *J. D. Brown, M. Henneaux, C. Teitelboim*. Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 319.
- [5] *R. Balbinot, R. Floreanini*. Phys. Lett. B. 1985. V. 160. P. 401; *R. Floreanini*. Ann. Phys. (N.Y.). 1986. V. 167. P. 317.
- [6] *T. Fukuyama, K. Kamimura*. Phys. Lett. B. 1985. V. 160. P. 259.
- [7] *M. O. Katanaev, I. V. Volovich*. Ann. Phys. 1990. V. 197. P. 1.
- [8] *M. Martellini*. Ann. Phys. (N.Y.). 1986. V. 167. P. 437.
- [9] *R. Marnelius*. Nucl. Phys. B. 1983. V. 211. P. 14.
- [10] *L. Brink, P. Di Vecchia, P. Howe*. Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 471; *S. Deser, B. Zumino*. Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 369.
- [11] *M. B. Green, J. D. Schwarz, E. Witten*. Superstring Theory. London: Cambridge Univ. Press., 1987.
- [12] *P. Van Nieuwenhuizen*. Nucl. Phys. B. 1983. V. 211. P. 14.
- [13] *M. O. Katanaev*. J. Math. Phys. 1991. V. 31. P. 2483; 1993. V. 34. P. 22.
- [14] *W. Kummer, D. J. Schwarz*. Phys. Rev. 1992. V. 45. P. 3628.
- [15] *С. Н. Солодухин*. Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. С. 317; *S. N. Solodukhin*. Int. J. Mod. Phys. D. 1994. V. 3. P. 269.
- [16] *T. Strobl*. Int. J. Mat. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1383.
- [17] *P. Schaller, T. Strobl*. Class. Quantum. Gravit. 1994. V. 11. P. 331.
- [18] *F. Haider, W. Kummer*. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 207.
- [19] *W. Kummer, D. J. Schwarz*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 382. P. 171.
- [20] *N. Ikeda, K. Izawa*. Progr. Theor. Phys. 1993. V. 89. P. 223.
- [21] *И. В. Волович, М. О. Катанаев*. Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 212; *M. O. Katanaev, I. V. Volovich*. Phys. Lett. B. 1986. V. 175. P. 413.
- [22] *П. М. Лаэров, И. В. Тютин*. ЯФ. 1989. Т. 50. С. 1467.
- [23] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
- [24] *I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro*. Effective Action in Quantum Gravity. Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1992.
- [25] *Б. Девитт*. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [26] *L. F. Abbott*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 185. P. 189.

Поступила в редакцию 15.X.1997 г.