Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гриб, Ю. В. Павлов, Энергия столкновений частиц в эргосфере вращающихся черных дыр, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 60–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:46:35

© 2013 г.

А. А. Гриб^{*†}, Ю. В. Павлов^{†‡}

ЭНЕРГИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ В ЭРГОСФЕРЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

Приведены новые оценки возможности появления резонанса в системе центра масс при столкновении частиц в эргосферах вращающихся черных дыр – активных ядер галактик. Исследован новый эффект – рост энергии в системе центра масс в зависимости от углового момента частицы, возможный в любой точке эргосферы.

Ключевые слова: черные дыры, метрика Керра, столкновения частиц, геодезические.

DOI: 10.4213/tmf8480

1. ВВЕДЕНИЕ

Активные ядра галактик согласно общему мнению являются вращающимися черными дырами, описываемыми метрикой Керра. Метрика Керра, в отличие от метрики Шварцшильда, предсказывает существование особой области вне горизонта черной дыры – эргосферы. В эргосфере элементарные частицы не могут не вращаться вместе с черной дырой. Последнее приводит к тому, что эта область является естественным суперколлайдером элементарных частиц. В работе [1] для экстремальных керровских черных дыр было обнаружено существование особого резонанса при столкновении двух частиц вблизи горизонта. При этом энергия в системе центра масс могла неограниченно расти. В наших работах [2]–[4] существование подобного резонанса было показано в случае двукратного рассеяния для неэкстремальных черных дыр – реальных активных ядер галактик.

В настоящей работе мы обобщаем наши результаты для резонанса, получив некоторые новые условия его возникновения, а также учитываем возможность отрицательных энергий частиц, допустимую в эргосфере. Оценивается время достижения планковской энергии в системе центра масс. Кроме того, обнаружен новый эффект

^{*}Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: andrei_grib@mail.ru

[†]Лаборатория теоретической физики им. А. А. Фридмана, Санкт-Петербург, Россия

[‡]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: yuri.pavlov@mail.ru

роста энергии в зависимости от углового момента частицы в эргосфере, возможный, в отличие от резонанса, в любой точке эргосферы.

В статье используется система единиц, в которой гравитационная постоянная и скорость света равны единице: $G = c = 1$.

2. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ ГОРИЗОНТА

Метрика Керра вращающейся черной дыры [5] в координатах Бойера–Линдквиста [6] имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{2Mr(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2)$$

M – масса черной дыры, $J = aM = AM^2$ – ее момент импульса. Полагаем, что направление оси вращения черной дыры соответствует $\theta = 0$, т. е. $A \geq 0$. Горизонт событий керровской дыры соответствует значению координаты

$$r = r_H \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (3)$$

Поверхность предела статичности определяется значением

$$r = r_1 \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4)$$

В случае $A \leq 1$ область пространства-времени между пределом статичности и горизонтом событий называется эргосферой.

Уравнения экваториальных геодезических в метрике Керра имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta_x} \left[\left(x^2 + A^2 + \frac{2A^2}{x} \right) E - \frac{2A}{x} j \right], \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \frac{1}{M\Delta_x} \left[\frac{2A}{x} E + \left(1 - \frac{2}{x} \right) j \right], \\ \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 &= E^2 + \frac{2}{x^3} (AE - j)^2 + \frac{A^2 E^2 - j^2}{x^2} - \frac{\Delta_x}{x^2} m^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $x = r/M$, $\Delta_x = x^2 - 2x + A^2$, $E = \text{const}$ – энергия движущейся частицы, $jM = \text{const}$ – проекция ее момента импульса на ось вращения черной дыры, m – масса покоя движущейся частицы. Для частицы с $m \neq 0$ параметр $\lambda = \tau/m$, где τ – ее собственное время.

Энергию в системе центра масс $E_{\text{с.м.}}$ двух сталкивающихся частиц с массами покоя m_1 и m_2 найдем, возведя в квадрат формулу

$$(E_{\text{с.м.}}, 0, 0, 0) = p_{(1)}^i + p_{(2)}^i, \quad (6)$$

где $p_{(n)}^i$ – 4-импульсы частиц ($n = 1, 2$). Поскольку $p_{(n)}^i p_{(n)i} = m_n^2$, то

$$E_{\text{с.м.}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{(1)}^i p_{(2)i}. \quad (7)$$

Для частиц, свободно падающих в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры, с энергиями E_1 и E_2 (относительно бесконечности) и моментами импульса j_1, j_2 из уравнений (5) получим

$$p_{(1)p(2)i}^i = \frac{1}{x\Delta_x} \left\{ E_1 E_2 [x^3 + A^2(x+2)] - 2A(j_1 E_2 + j_2 E_1) + \right. \\ \left. + j_1 j_2 (2-x) - \sqrt{2E_1^2 x^2 + 2(j_1 - E_1 A)^2 - j_1^2 x + (E_1^2 - m_1^2)x\Delta_x} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{2E_2^2 x^2 + 2(j_2 - E_2 A)^2 - j_2^2 x + (E_2^2 - m_2^2)x\Delta_x} \right\}. \quad (8)$$

Знаменатель формулы обращается в нуль на горизонте событий. Найдя предел данного выражения при $r \rightarrow r_H$, из (7) получим [8]

$$E_{c.m.}^2(r \rightarrow r_H) = \frac{(j_{1H}j_2 - j_{2H}j_1)^2}{4(j_{1H} - j_1)(j_{2H} - j_2)} + m_1^2 \left[1 + \frac{j_{2H} - j_2}{j_{1H} - j_1} \right] + m_2^2 \left[1 + \frac{j_{1H} - j_1}{j_{2H} - j_2} \right], \quad (9)$$

где

$$j_{nH} = \frac{2E_n x_H}{A} = \frac{E_n}{M\Omega_H}, \quad (10)$$

$x_H = r_H/M$, $\Omega_H = A/2r_H$ – “угловая скорость” вращения горизонта событий [9]. Формула (9) применима и для случаев, когда одна или обе частицы безмассовые.

Как следует из (9), энергия столкновения в системе центра масс двух падающих частиц неограниченно возрастает вблизи горизонта, если одна из частиц имеет момент импульса j_H (критическая частица), а у другой $j < j_H$. На это явление (для случая $A = 1$ и $E = m$) было впервые указано в работе [1]. Позднее, в работах [10], [11] отмечалось, что в случае $A < 1$ такой резонанс недостижим для падающей на черную дыру из бесконечности частицы. В частности, если черная дыра имеет угловой момент, равный торновскому пределу для астрофизической черной дыры ($A \approx 0.998$) (см. [12]), то $E_{c.m.}^{\max}/\sqrt{m_1 m_2} \approx 18.97$. Однако в работе [2] нами было показано, что в случае промежуточных столкновений вблизи горизонта событий с третьей частицей падающая частица может приобрести момент импульса (также это возможно и при распаде исходной частицы, для одного из осколков), близкий к критическому, и впоследствии энергия ее столкновения с другой свободно падающей частицей может стать сколь угодно большой. Далее будем называть такую ситуацию механизмом промежуточных столкновений. В работе [13] нами была найдена причина появления очень больших энергий столкновения вблизи горизонта. Для массивных частиц картина столкновения с неограниченно большой энергией в системе центра масс оказывается следующей. Критическая частица имеет в окрестности горизонта нулевую радиальную составляющую скорости $dr/d\tau = 0$. Сталкивающаяся с ней некритическая частица при движении к горизонту, наоборот, ускоряется так, что их относительная скорость приближается к скорости света, что и приводит к неограниченному возрастанию энергии столкновения. Для черных дыр других типов это явление рассмотрено в работах Заславского [14]–[16].

Докажем далее, что для достижения неограниченно больших энергий столкновения частиц, падающих на черную дыру, механизм промежуточных столкновений необходим не только для неэкстремальных $A < 1$ черных дыр, но и в экстремальном

случае, при определенных энергиях массивных частиц. Также покажем, что энергия столкновения в эргосфере может быть неограниченно велика и для некритических частиц в случае больших по абсолютной величине, но отрицательных значений проекции момента импульса одной из частиц.

3. УСЛОВИЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим подробнее движение частиц в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры с $A \leq 1$. Допустимые значения момента импульса могут быть найдены из уравнений (5) в соответствии с условием $(dr/d\lambda)^2 \geq 0$ и требованием движения “вперед по времени” [17]: $dt/d\lambda > 0$.

При $x > 2$, т. е. вне эргосферы, эти требования приводят к следующим ограничениям:

$$E \geq \sqrt{\frac{x-2}{x}}m, \quad j \in [j_-, j_+], \quad j_{\pm} = \frac{-2AE \pm x\sqrt{\Delta_x(E^2 - (x-2)m^2/x)}}{x-2}. \quad (11)$$

Граничные значения $j_{\pm}$ соответствуют условию $dr/d\lambda = 0$. На границе эргосферы

$$x = 2 \Rightarrow E \geq 0, \quad j \leq E\left(A + \frac{2}{A}\right) - \frac{Am^2}{2E}. \quad (12)$$

Внутри эргосферы

$$x_H < x < 2 \Rightarrow j \leq j_-(x) = \frac{2AE - x\sqrt{\Delta_x(E^2 + (2-x)m^2/x)}}{2-x}. \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что при отрицательной энергии E частицы в эргосфере проекция ее момента импульса на ось вращения черной дыры также должна быть отрицательной. Заметим, однако, что при этом вращение в координатах Бойера–Линдквиста для любых частиц в эргосфере будет происходить в сторону вращения черной дыры (явление “увлечения тел вращающейся черной дырой” [9]). Действительно, для времениподобных геодезических условие $ds^2 > 0$ требует выполнения неравенства $d\varphi/dt > 0$, так как остальные слагаемые в выражении для квадрата интервала в эргосфере, как видно из (1), отрицательны. Поэтому утверждение “только частицы, направление вращения которых вокруг черной дыры противоположно вращению самой черной дыры, могут иметь отрицательную энергию”, приведенное в фундаментальной монографии [7], неверно.

Отметим также, что энергия столкновения в системе центра масс всегда положительна (даже в случае отрицательных значений E_1, E_2) и удовлетворяет условию

$$E_{\text{c.m.}} \geq m_1 + m_2. \quad (14)$$

Это следует из того, что в системе центра масс сталкивающиеся частицы движутся друг к другу с некоторыми скоростями. Неравенство (14) также может быть получено и в координатах Бойера–Линдквиста из формул (7), (8) путем достаточно громоздких алгебраических преобразований, при учете ограничений (11)–(13).

При стремлении точки r к горизонту r_H получаем из (13) ограничение

$$x \rightarrow x_H \Rightarrow j \leq j_H \equiv \frac{2Ex_H}{A}. \quad (15)$$

Таким образом, при заданной энергии “критическая” частица имеет максимально возможный у горизонта событий момент импульса.

Исследуем поведение функции $j_-(x)$ в окрестности горизонта. Для значения производной в пределе $x \rightarrow x_H + 0$ получим

$$A < 1 \Rightarrow j'_-(x) \sim -\frac{(x_H - 1)\sqrt{E^2 x_H^2 + m^2 A^2}}{x_C \sqrt{(x_H - x_C)(x - x_H)}} \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow x_H, \quad (16)$$

$$A = 1 \Rightarrow j'_-(x_H) = 2E - \sqrt{E^2 + m^2}, \quad (17)$$

где $x_C = 1 - \sqrt{1 - A^2}$. Для частицы в поле экстремально вращающейся черной дыры из (17) получим

$$A = 1 \Rightarrow \begin{cases} j'_-(x_H) > 0, & E > \frac{m}{\sqrt{3}}, \\ j'_-(x_H) < 0, & E < \frac{m}{\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (18)$$

Разрешенная зона для частиц с критическим моментом импульса $2E > 0$ в экстремально вращающейся черной дыре определяется условием

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{x^3} [2E^2 + x(E^2 - m^2)] \geq 0, \quad (19)$$

т. е. допустимы любое x при $E \geq m$ и некоторая область вне горизонта

$$x \leq x_E = \frac{2E^2}{m^2 - E^2} \quad (20)$$

для массивных частиц с $1/\sqrt{3} < E/m < 1$.

Таким образом, окрестность вне горизонта для частицы с критическим значением момента импульса является запрещенной зоной в случае черной дыры с $A < 1$ при любой энергии, а для экстремально вращающейся черной дыры $A = 1$ при энергии частицы $E \leq m/\sqrt{3}$. В этих случаях неограниченно большая энергия столкновения может быть реализована только за счет механизма промежуточных столкновений (см. также [18]).

Если частица с энергией E_1 и критическим значением момента импульса $j_{1H} = 2E_1$ падает на экстремально вращающуюся черную дыру из бесконечности или (при $1/\sqrt{3} < E/m < 1$) из указанной в (20) области и сталкивается с другой свободно падающей некритической частицей (с энергией E_2 и моментом импульса j_2) в некоторой точке с радиальной координатой r вблизи горизонта, то энергия столкновения в системе центра масс, в соответствии с (7), (8) равная

$$E_{\text{с.м.}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{x(x-1)} \left[E_1 E_2 (x^2 + x + 2) - 2E_1 j_2 - \sqrt{E_1^2 (2+x) - m_1^2 x} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(E_2^2 (2+x) - m_2^2 x)(x-1)^2 + (2E_2 - j_2)(2E_2 x - j_2(2-x))} \right], \quad (21)$$

неограниченно возрастает при $r \rightarrow r_H$.

4. ЭНЕРГИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ С ЧАСТИЦЕЙ С БОЛЬШИМ МОМЕНТОМ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим другую возможность для столкновений в эргосфере вращающейся черной дыры со сколь угодно большой энергией в системе центра масс при фиксированных энергиях частиц относительно бесконечности. Для этого заметим, что при фиксированной энергии частицы ее проекция момента импульса может быть в эргосфере отрицательной и сколь угодно большой по абсолютной величине в соответствии с ограничениями (12), (13). Найдя асимптотику выражения (8) при $j_2 \rightarrow -\infty$ и фиксированном r в эргосфере, получим

$$E_{\text{с.м.}} \approx \frac{-2j_2}{x\Delta_x} \left[2AE_1 - j_1(2-x) - \sqrt{2-x} \sqrt{2E_1^2 x^2 + 2(j_1 - E_1 A)^2 - j_1^2 x + (E_1^2 - m_1^2)x\Delta_x} \right]. \quad (22)$$

Эта асимптотическая формула верна для любых допустимых E_1, j_1 (см. (13)) при $r_{\text{H}} < r < 2$ и для $E_1 > 0$ и j_1 , удовлетворяющем (12), при $r = 2$. Заметим, что выражение в квадратных скобках в (22) положительно в эргосфере. Это очевидно для $x = 2$ и следует из ограничений (13) при $x_{\text{H}} < x < 2$, поскольку $2AE = (j_+ + j_-)(2-x)$ и

$$\sqrt{2E^2 x^2 + 2(j - EA)^2 - j^2 x + (E^2 - m^2)x\Delta_x} = \sqrt{(2-x)(j_+ - j_1)(j_- - j_1)}. \quad (23)$$

Таким образом, как следует из (22), *при падении частиц на вращающуюся черную дыру в экваториальной плоскости в любой точке эргосферы возможны столкновения частиц со сколь угодно большой энергией в системе центра масс при $j_2 \rightarrow -\infty$ и фиксированных энергиях частиц E_1, E_2* . Энергия столкновения в системе центра масс возрастает пропорционально $\sqrt{|j_2|}$.

Отметим, что большие отрицательные значения проекции момента импульса запрещены при фиксированной энергии частицы вне эргосферы. Поэтому такие столкновения не осуществляются для частиц, падающих из бесконечности. Если же частица уже попала в эргосферу и там в результате взаимодействия с другими частицами приобрела большое отрицательное значение проекции момента импульса (не требуется приобретения больших энергий!), то ее последующее столкновение с падающей в черную дыру частицей может иметь очень большую энергию в системе центра масс.

При больших значениях $-j_2$ энергия столкновения вблизи горизонта в системе центра масс в соответствии с (9) равна

$$E_{\text{с.м.}} \approx \sqrt{-j_2 \frac{j_{1\text{H}}^2 + 4m_1^2}{4(j_{1\text{H}} - j_1)}}. \quad (24)$$

В зависимости от значения момента импульса j_1 она может быть как больше, так и меньше, чем при столкновении в других точках эргосферы.

Приведем оценки значений моментов импульса, необходимых для высокоэнергетических столкновений. В системе СИ выражение для критического значения момента импульса (10) имеет вид

$$J_{\text{H}} = j_{\text{H}} Mc = \frac{GM}{c^3} \frac{2Ex_{\text{H}}}{A}. \quad (25)$$

При $E = mc^2$, $A \approx 1$ и массе черной дыры, равной массе Солнца, таким моментом импульса обладала бы, например, частица, вращающаяся вокруг черной дыры на расстоянии, равном расстоянию Земли от Солнца, со скоростью порядка 6 м/с. Если бы частица в эргосфере при $x \approx 2$ имела бы тот же момент импульса, как у частицы, вращающейся на орбите Земли $r \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ м с орбитальной скоростью Земли $v \approx 3 \cdot 10^4$ м/с, то при столкновении с частицей с $E_1 = m_1 c^2$ энергия столкновения составила бы, в соответствии с формулой (22), порядка $10^2 \sqrt{m_1 m_2} c^2$. При энергии столкновения $10^9 \sqrt{m_1 m_2} c^2$ и скорости частицы $v \approx 10^3$ м/с требуемый момент импульса соответствовал бы вращению на расстоянии от звезды порядка размера горизонта расширяющейся Вселенной ($\approx 10^{26}$ м). Такой момент импульса относительно Солнца имеют частицы сверхвысоких энергий 10^{19} – 10^{20} эВ, наблюдаемые в космических лучах на Земле.

Эти оценки показывают, что достижение сверхвысоких энергий при столкновении частиц обычных масс (например, протонов) в таком механизме представляется нереалистическим. Для этого потребовались бы многократные столкновения с приобретением каждый раз дополнительного отрицательного момента импульса. Однако частицы с массой порядка масштаба теории Великого Объединения (возможно, такие частицы присутствуют в темной материи [19]) могут приобрести энергию порядка планковской.

5. ВРЕМЯ ДОСТИЖЕНИЯ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Значения момента импульса, близкие к J_L , могут иметь место для свободно падающих на черную дыру частиц. Так, нерелятивистская на бесконечности частица ($E = m$) достигает горизонта событий при падении на черную дыру, если ее момент импульса j лежит в интервале $j_L \leq j \leq j_R$, где

$$j_L = -2m[1 + \sqrt{1 + A}], \quad j_R = 2m[1 + \sqrt{1 - A}]. \quad (26)$$

При $A \rightarrow 1$ имеет место $j_R \rightarrow j_H$. В случае $A = 1$ имеем $j_R = j_H = 2m$. Однако в этом случае время, необходимое для осуществления столкновения с большой энергией, очень велико. Количественные оценки даны, например, в работах [3], [4]. Чтобы два протона столкнулись с энергией порядка характерного масштаба теории Великого Объединения, понадобилось бы время 10^{24} с, которое превышает возраст Вселенной. Для получения неограниченно большой энергии столкновения в случае экстремально вращающихся черных дыр ($A = 1$) нужен бесконечно большой интервал как координатного $\Delta t \sim E_{c.m.}^2$, так и собственного времени $\Delta \tau \sim \ln E_{c.m.}$ падения частицы.

Для столкновений при падении на вращающуюся черную дыру с $A < 1$ в рамках механизма промежуточных столкновений с приобретением вблизи горизонта событий момента импульса, очень близкого к j_H , оценки времени падения частиц с расстояния до черной дыры, равного несколько r_H (порядка расстояния от аккреционного диска), представлены в работах [8], [13]:

$$\Delta t \sim \frac{4Mx_H}{\sqrt{1 - A^2}} \ln \frac{E_{c.m.}}{\sqrt{m_1 m_2}}. \quad (27)$$

Так, для $A = 0.998$ имеем

$$\Delta t \sim 3.2 \cdot 10^{-4} \frac{M}{M_{\odot}} \ln \frac{E_{\text{c.m.}}}{\sqrt{m_1 m_2}} \text{ с.} \quad (28)$$

Взяв значение энергии Великого Объединения $E_{\text{c.m.}}/\sqrt{m_1 m_2} = 10^{14}$ и значение массы черной дыры $10^8 M_{\odot}$, типичное для активных ядер галактик, получим $\Delta t \sim 10^6$ с, что значительно меньше, чем в экстремальном случае. Поскольку зависимость времени от энергии логарифмическая, для планковского значения энергии столкновения $\sim 10^{19}$ ГэВ понадобилось бы большее время, но того же порядка величины.

Что касается времени обратного движения частиц (продуктов столкновения) с очень высокой энергией из окрестностей горизонта, например, к Земле, то с учетом обратимости уравнений движения во времени легко видеть, что время движения частиц до аккреционного диска составит порядка 10–15 дней, а далее необходимо длительное время для движения от астрофизических черных дыр до Земли.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим возможный физический смысл полученных результатов. Активные ядра галактик, возможно, являются источниками частиц космических лучей сверхвысоких энергий, наблюдаемых в последние годы [20], [21]. Кроме того, они характеризуются джетами, природа которых до конца не ясна. Поэтому существование в эргосфере естественного и, по-видимому, самого мощного во Вселенной суперколлайдера должно приводить к наблюдаемым астрофизическим следствиям. Наконец, возможность достижения планковских значений энергии позволяет проверить различные гипотезы квантовой гравитации.

Благодарности. Исследование проведено в рамках сотрудничества с Copernicus Center of Interdisciplinary Studies (Краков, Польша) и поддержано The John Templeton Foundation.

Список литературы

- [1] M. Bañados, J. Silk, S. M. West, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:11 (2009), 111102, 4 pp.
- [2] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, *Письма в ЖЭТФ*, **92**:3 (2010), 147–151.
- [3] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, *Astropart. Phys.*, **34**:7 (2011), 581–586.
- [4] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, *Grav. Cosmol.*, **17**:1 (2011), 42–46.
- [5] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **11**:5 (1963), 237–238.
- [6] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 265–281.
- [7] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, М., 1986.
- [8] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, O. F. Piattella, *Grav. Cosmol.*, **18**:1 (2012), 70–75, arXiv: 1203.4952.
- [9] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, М., 1986.
- [10] E. Berti, V. Cardoso, L. Gualtieri, F. Pretorius, U. Sperhake, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:23 (2009), 239001, 1 pp., arXiv: 0911.2243.
- [11] T. Jacobson, T. P. Sotiriou, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:2 (2010), 021101, 3 pp., arXiv: 0911.3363.
- [12] K. S. Thorne, *Astrophys. J.*, **191** (1974), 507–520.
- [13] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, O. F. Piattella, *Int. J. Modern Phys. A*, **26**:22 (2011), 3856–3867.
- [14] O. B. Zaslavskii, *Class. Quantum Grav.*, **28**:10 (2011), 105010, 7 pp., arXiv: 1011.0167.

- [15] O. B. Zaslavskii, *Phys. Rev. D*, **84**:2 (2011), 024007, 6 pp., arXiv: 1104.4802.
- [16] O. B. Zaslavskii, *Phys. Lett. B*, **712**:3 (2012), 161–164, arXiv: 1202.0565.
- [17] Р. М. Уолд, *Общая теория относительности*, РУДН, М., 2008.
- [18] T. Harada, M. Kimura, *Phys. Rev. D*, **83**:8 (2011), 084041, 9 pp., arXiv: 1102.3316.
- [19] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, *Modern Phys. Lett. A*, **23**:16 (2008), 1151–1159, arXiv: 0712.2667.
- [20] J. Abraham, P. Abreu, M. Aglietta et al. [The Pierre Auger Collaboration], *Science*, **318**:5852 (2007), 938–943, arXiv: 0711.2256.
- [21] P. Abreu, M. Aglietta, E. J. Ahn et al. [The Pierre Auger Collaboration], *Astropart. Phys.*, **34**:5 (2010), 314–326.