Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Гнатич, Ю. Хонконен, Т. Лучивянски, Влияние сжимаемости на процесс аннигиляции, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 50–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:21:57

© 2013 г. М. Гнатич^{*†}, Ю. Хонконен[‡], Т. Лучивянский^{*†}

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА ПРОЦЕСС АННИГИЛЯЦИИ

С использованием ренормализационной группы в теории возмущений изучено влияние случайного поля скорости на кинетику реакции однотипной аннигиляции в случае критической размерности $d_c = 2$ и ниже ее. Переносимое поле скорости моделируется самоподобной в пространстве гауссовой переменной с конечным радиусом корреляции по времени (модель Антонова–Крейчнана). Учитывается эффект сжимаемости поля скоростей и анализируется модель вблизи ее критической размерности с помощью трехпараметрического разложения по ϵ , Δ , η . Здесь ϵ – отклонение от колмогоровского масштаба, Δ – отклонение от критической размерности пространства, η – отклонение от параболического закона дисперсии. В зависимости от значений параметров разложения и параметра сжимаемости изучаемая модель может демонстрировать различные асимптотические (на больших временах) режимы, соответствующие инфракрасно-фиксированным точкам ренормализационной группы. Описываются возможные режимы и вычисляются скорости распада для среднего числа частиц в главном порядке теории возмущений.

Ключевые слова: процесс аннигиляции, модель Антонова–Крейчнана, пертурбативное ренормгрупповое приближение

DOI: 10.4213/tmf8481

1. ВВЕДЕНИЕ

В жидкой среде происходит целый ряд химических реакций, имеющих важное значение в различных химических, биологических или физических системах [1]–[3]. В этих процессах на реагирующие частицы воздействует не только диффузионное движение, но и внешнее течение жидкости. Обычный подход к таким реактивным течениям основан на некоторой комбинации уравнений реакции–транспорта.

^{*}Institute of Experimental Physics of the Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia.
E-mail: hnatich@saske.sk

[†]Faculty of Science, P. J. Šafárik University, Košice, Slovakia

[‡]Department of Military Technology, National Defence University, Helsinki, Finland

В настоящей работе мы сконцентрируемся на изучении реакции аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$, которая является характерной моделью процессов реакции–диффузии. Для такого типа реакции в случае малых пространственных размерностей обычное описание с помощью кинетического уравнения скорости реакции является недостаточным, и необходимо учитывать влияние флуктуаций плотности [4]. Можно показать, что верхняя критическая размерность для этого процесса даже при отсутствии адвективного течения равна 2 благодаря флуктуациям плотности. Ренормгрупповой (РГ) подход успешно применялся для различных реактивных течений таких, как случайный дрейф, не зависящий от времени [5], поле скоростей, описываемое стохастическим уравнением Навье–Стокса [6], или ближний коррелированный потенциальный беспорядок [7]. Часто наблюдаются существенные отличия от эксперимента, их происхождение может быть вызвано наличием крупномасштабных анизотропий, эффектом сжимаемости или нарушением четности. Имеются важные различия [8], [9] между переносом скалярных величин типа плотности, с одной стороны, и индикаторов (температура, концентрация), с другой стороны, сжимаемым и несжимаемым течением. Ранее было показано, что сжимаемость может приводить к замедлению процессов переноса для скалярной примеси и к усилению перемежаемости. Эти эффекты можно понять как результат подавления разделения траекторий частиц, следовательно, мы ожидаем, что эффективно реагирующие частицы будут проводить значительно больше времени, находясь во взаимной близости, чем в случае несжимаемого течения. Таким образом, можно полагать, что скорость распада в этом случае будет больше, чем в случае несжимаемого течения. Отсюда следует, что было бы желательно рассмотреть эту качественную картину на количественном уровне. С этой целью мы используем модель Антонова–Крейчмана [10], [11] для описания переноса реагирующих частиц и представляем РГ-исследование вблизи ее критической размерности $d_c = 2$. Все значимые физические величины рассчитаны в однопетлевом порядке, и в отличие от случая несжимаемого поля скоростей обнаружено, что уже в однопетлевом приближении флуктуации поля влияют на ренормировку константы скорости.

После краткого описания модели в разделе 2 результаты РГ-расчетов представлены в разделе 3. В разделе 4 перечислены возможные крупномасштабные режимы; их физическая интерпретация дана в разделе 5 в качестве выводов.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Теоретико-полевое действие аннигиляционной реакции $A + A \xrightarrow{K_0} \emptyset$ можно просто получить [12], применяя подход Доя [13]. Оно может быть записано в стандартном виде:

$$S_1 = - \int_0^\infty dt \int d\mathbf{x} \{ \psi^\dagger \partial_t \psi - D_0 \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \lambda_0 D_0 [2\psi^\dagger + (\psi^\dagger)^2] \psi^2 \} + n_0 \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, 0), \quad (1)$$

где D_0 – константа диффузии реагирующих частиц, и по соображениям размерности, мы написали произведение $\lambda_0 D_0$ вместо константы скорости K_0 . Последний

член в действии соответствует начальным условиям, которые традиционно выбираются в виде распределения Пуассона.

В сжимаемом поле скорости имеются два типа задач диффузии–адвекции: перенос поля плотности и перенос поля индикатора [14]. Здесь мы анализируем случай переноса поля плотности [15]. В действии (1) это соответствует замене $\psi^\dagger \partial_t \psi \rightarrow \psi^\dagger [\partial_t \psi + (\nabla \cdot \mathbf{v} \psi)]$, где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – переносимое поле скорости. Согласно работе [11] предположим, что $\mathbf{v}$ – случайная гауссова переменная с нулевым средним и коррелятором (в частотно-импульсном представлении)

$$\langle v_{0i} v_{0j} \rangle_0 = \frac{g_0 D_0^3 k^{2-2\Delta-2\epsilon-2\eta}}{\omega^2 + (u_0 D_0 k^{2-\eta})^2} [P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})], \quad (2)$$

где g_0 – константа связи, а показатели степени ϵ , Δ и η играют роль малых параметров разложения. Они могут рассматриваться как аналоги параметра разложения $\epsilon = 4 - d$, используемого в теории критических явлений. Однако здесь следует понимать ϵ как отклонение показателя степени от показателя в скейлинге Колмогорова [16], в то время как Δ определяется как отклонение от размерности пространства $d_c = 2$ с помощью соотношения $d = 2 + 2\Delta$, а показатель η связан с обратной величиной времени корреляции для волнового числа k . Параметр u_0 служит для обозначения фиксированных точек, и его можно интерпретировать как отношение времени корреляции скорости к времени скалярного цикла [17]. В формуле (2), кроме стандартного (несжимаемого) поперечного проекционного оператора $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, был введен продольный оператор $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$. Положительный параметр α , необходимый для того, чтобы коррелятор $\langle vv \rangle$ был положительно определен, задает степень сжимаемости. Случай несжимаемого поля получается, если положить $\alpha = 0$.

Модель Антонова–Крейчнана для адвективного поля $\mathbf{v}$ включает два особо интересных случая:

1) в пределе $u_0 \rightarrow \infty$, $g'_0 \equiv g_0/u_0^2 = \text{const}$ мы получаем “модель быстрых изменений” $D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g'_0 D_0 k^{-2-2\Delta-2\epsilon+\eta}$, которая характеризуется временной природой коррелятора скорости типа белго шума;

2) предел $u_0 \rightarrow 0$, $g''_0 \equiv g_0/u_0 = \text{const}$ соответствует случаю замороженного поля скорости $D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g''_0 D_0^2 \pi \delta(\omega) k^{2\Delta-2\epsilon}$, когда поле скорости заморожено (не зависит от времени).

Процедуру усреднения по полю скорости $\mathbf{v}(x)$ можно провести с помощью функционала действия

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int dt d\mathbf{x} \int dt' d\mathbf{x}' \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) D_v^{-1}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{v}(t', \mathbf{x}'), \quad (3)$$

где D_v^{-1} – обратный к коррелятору (2) оператор (в смысле образа Фурье). Математическое ожидание любой физической наблюдаемой величины можно вычислить с помощью полного весового функционала $\mathcal{W}(\psi^\dagger, \psi, \mathbf{v}) = e^{S_1 + S_2}$, где S_1 и S_2 – функционалы действия (1) и (3).

ТАБЛИЦА 1. Канонические размерности для параметров и полей модели.

Q	ψ	$\psi^\dagger$	v	D_0	u_0	λ_0	g_0	α, g, u, λ
d_Q^k	d	0	-1	-2	η	-2Δ	$2\epsilon + \eta$	0
d_Q^ω	0	0	1	1	0	0	0	0
d_Q	d	0	1	0	η	-2Δ	$2\epsilon + \eta$	0

3. УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ РЕНОРМИРОВКА

Включение продольной части Q в коррелятор поля скорости не влияет на РГ-анализ, разработанный для такой модели [18]. Следовательно, мы просто упомянем основные шаги теоретического описания и отклонения от него, вызванные нарушением условия сжимаемости. Все канонические размерности полей и параметров приведены в табл. 1. Единственное отличие от случая несжимаемого поля заключается в том, что теперь поле скорости должно быть ренормировано [11]. Если следовать работам [6], [11], [18], то легко доказать, что рассматриваемая модель является мультипликативно ренормируемой и может быть сделана ультрафиолетово-конечной (УФ-конечной) с помощью следующей ренормировки:

$$D_0 = DZ_D, \quad g_0 = g\mu^{2\epsilon+\eta}Z_g, \quad u_0 = u\mu^\eta Z_u, \quad \lambda_0 = \lambda\mu^{-2\Delta}Z_D^{-1}Z_\lambda, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}Z_v \quad (4)$$

с дополнительными ограничениями

$$Z_g Z_D^3 = 1, \quad Z_u Z_D = 1, \quad Z_g Z_D^3 = Z_v^2, \quad (5)$$

что является следствием отсутствия ренормировки нелокального члена (2). Нелокальный характер коррелятора скорости вызван нетривиальными корреляциями на масштабах импульса и частоты.

Полное ренормированное действие можно записать как

$$\begin{aligned} S_R(\psi^\dagger, \psi, \mathbf{v}) = & - \int_0^\infty dt \int d\mathbf{x} \{ \psi^\dagger \partial_t \psi - \psi^\dagger DZ_D \nabla^2 \psi + \psi^\dagger Z_v (\nabla \cdot \mathbf{v} \psi) \} - \\ & - Z_\lambda D \lambda [2\psi^\dagger + \psi^{\dagger 2}] \psi^2 \} - \\ & - \int dt d\mathbf{x} \int dt' d\mathbf{x}' \frac{v D_v^{-1} v}{2} + n_0 \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, 0). \end{aligned}$$

Расчет констант ренормировки в рамках теории возмущений в размерной регуляризации с применением схемы минимальных вычитаний осуществляется следующим образом [19]. Мы ограничиваемся первым порядком теории возмущений, и это приближение уже содержит первый нетривиальный эффект сжимаемости. Это можно увидеть из разложения (по теории возмущений) одночастично-неприводимой функции $\Gamma_{\psi^\dagger \psi^2}$, известной как вершина взаимодействия:

$$\Gamma_{\psi^\dagger \psi^2} \big|_{\omega=0, p^2=0} = -4D\lambda Z_\lambda \mu^{-2\Delta} + \frac{1}{2} \text{ (diagram 1) } + \frac{1}{2} \text{ (diagram 2) }, \quad (6)$$

где члены высшего порядка по константам связи опущены. Первая диаграмма в правой части уравнения (6) с физической точки зрения представляет процесс флуктуаций плотности, который отвечает за аннигиляцию двух частиц. Нетрудно видеть, что присутствие продольной части (случай сжимаемого поля скорости $\mathbf{v}$) пропагатора $\langle vv \rangle$ приводит к УФ-расходящемуся вкладу второй диаграммы в функцию (6), в то время как для моделей с несжимаемым полем скоростей $\mathbf{v}$ это приводит к УФ-сходящемуся вкладу. Физически этот вклад можно интерпретировать как процесс притяжения, который сближает частицы и направляет их в сток сжатия, что может привести к существенному возрастанию скорости реакции, как будет показано ниже. В схеме минимальных вычитаний константы ренормировки в однопетлевых вычислениях приобретают следующий вид:

$$Z_D = 1 - \frac{g}{16\pi u(1+u)\epsilon} \left[1 + \alpha - \frac{2\alpha}{1+u} \right], \quad (7)$$

$$Z_v = 1 + \frac{\alpha g}{16\pi u(1+u)^2\epsilon}, \quad (8)$$

$$Z_\lambda = 1 - \frac{\lambda}{4\pi\Delta} - \frac{\alpha g}{16\pi u(1+u)\epsilon}, \quad (9)$$

а константы Z_u и Z_g могут быть рассчитаны из соотношений (5). Предельный случай $\alpha = 0$ находится в согласии с результатами (с однопетлевой точностью) для случая несжимаемого поля [18], а случай $g = 0$ приводит к наличию флуктуаций только плотности [4].

Из соотношений (4) и (5) можно получить бета-функции β_g , β_u и β_λ с помощью стандартного определения $\beta_g = \mu \partial_\mu g|_0$ (индекс 0 отвечает производным, взятым при фиксированных значениях затравочных (неренормированных) параметров):

$$\beta_g = g[-2\epsilon - \eta + 3\gamma_D - 2\gamma_v], \quad \beta_u = u[-\eta + \gamma_D], \quad \beta_\lambda = \lambda[2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D], \quad (10)$$

где аномальные размерности γ_F величины F определяются как [19]

$$\gamma_F = \mu \partial_\mu \ln Z_F|_0 = (\beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u + \beta_\lambda \partial_\lambda) \ln Z_F. \quad (11)$$

В работах [11], [17], [20] предполагалось, что вплоть до двухпетлевых расчетов непосредственное влияние параметра η на аномальные размерности отсутствует. Отсюда следует, что можно использовать различные значения η при расчетах фейнмановских диаграмм. В наших расчетах применялся самый простой выбор $\eta = 0$.

Наконец, подставляя выражение (9) в определение (11), получаем аномальные размерности:

$$\gamma_D = \frac{g}{8\pi u(1+u)} \left[1 + \alpha - \frac{2\alpha}{u+1} \right], \quad \gamma_v = -\frac{\alpha g}{8\pi u(1+u)^2}, \quad \gamma_\lambda = \frac{\alpha g}{8\pi u(1+u)} - \frac{\lambda}{2\pi}.$$

4. ИНФРАКРАСНО-УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ

Нас интересуют инфракрасные (ИК) асимптотики небольших импульсов $\mathbf{p}$ и частот ω ренормированных функций или, что эквивалентно, больших относительных расстояний и временных интервалов в $(t, \mathbf{x})$ -представлении. Подобное поведение

определяется ИК-устойчивой фиксированной точкой $g^* = (g_1^*, u^*, \lambda^*)$, значения которой определяются как нули бета-функций (10): $\beta(g^*) = 0$. Считается, что фиксированная точка g^* является ИК-устойчивой, если действительные части всех собственных значений матрицы $\Omega_{ij} \equiv \partial\beta_i/\partial g_j|_{g=g^*}$, $i, j \in \{g, u, \lambda\}$, являются строго положительными.

Самый простой способ найти среднюю плотность числа частиц $n(t) = \langle\psi(t)\rangle$ заключается в том, чтобы вычислить ее из условия стационарности функционально-го преобразования Лежандра [21] производящего функционала, который получается с помощью замены неренормированного действия ренормированным в весовом функционале [6]. Это способ удобен тем, что можно избежать процедур суммирования, использующихся в работе [4] для того, чтобы учесть члены высшего порядка в n_0 . В случае пространственно однородного решения это приводит к уравнению для средней плотности числа частиц вида

$$n(t) = \frac{n_0}{1 + 2\lambda u D t \mu^{-2\Delta} n_0}$$

с начальным условием $n(0) = n_0$, где n_0 – начальная плотность числа частиц. Так как поля ψ и $\psi^\dagger$ неренормированы, уравнение Каллана–Симанзика для среднего числа частиц легко получается с помощью стандартной процедуры [6], [22]:

$$\left[(2 - \gamma_D) t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_g \beta_g \frac{\partial}{\partial g} - d n_0 \frac{\partial}{\partial n_0} + d \right] n(t, \mu, D, n_0, g) = 0.$$

Если решать его с помощью метода характеристик, то можно показать (подробности будут опубликованы позднее [23]), что значение показателя распада β , который определяется с помощью асимптотического соотношения $n(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{-\beta}$, дается выражением $\beta = 1 + \gamma_\lambda^*/(2 - \gamma_D^*)$. Заметим, что в отличие от предыдущих исследований [6], [18] мы здесь имеем дело лишь с трехзарядовой ($\{g, u, \lambda\}$) теорией. Пассивный характер (нет обратного влияния на переносимое поле) реагирующей частицы проявляется в соотношениях $\partial_\lambda \beta_g = \partial_\lambda \beta_u = 0$, вытекающих из формул (9) и (10). Эти соотношения очень сильно упрощают расчет собственных значений матрицы ω_{ij} .

Анализ структуры с фиксированными точками показывает, что изучаемая система может демонстрировать один из десяти возможных ИК-режимов, перечисленных ниже. Во-первых, рассмотрим “модель быстрых изменений” ($u \rightarrow \infty$). Если ввести удобные переменные $w = 1/u$, $g' = g/u^2$, то можно записать соответствующие бета-функции в виде

$$\beta_{g'} = g'[-2\epsilon + \eta + \gamma_D - 2\gamma_v], \quad \beta_w = w[\eta - \gamma_D], \quad \beta_\lambda = \lambda[2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D],$$

где аномальные размерности суть

$$\gamma_D = \frac{g'}{8\pi(1+w)} \left[1 + \alpha - \frac{2\alpha w}{1+w} \right], \quad \gamma_v = -\frac{\alpha g'}{8\pi(1+w)^2}, \quad \gamma_\lambda = \frac{\alpha g'}{8\pi(1+w)} - \frac{\lambda}{2\pi}.$$

“Модель быстрых изменений” соответствует фиксированной точке со значением $w^* = 0$. В этом случае существуют четыре ИК-устойчивые фиксированные точки:

$$\begin{aligned}
 \text{ФТ-1 : } \quad & g'^* = 0, \quad \lambda^* = 0, \\
 & \Omega_1 = \eta - 2\epsilon, \quad \Omega_2 = \eta, \quad \Omega_3 = 2\Delta, \\
 & \beta = 1; \\
 \text{ФТ-2 : } \quad & g'^* = 0, \quad \lambda^* = -4\pi\Delta, \\
 & \Omega_1 = \eta - 2\epsilon, \quad \Omega_2 = \eta, \quad \Omega_3 = -2\Delta, \\
 & \beta = 1 + \Delta; \\
 \text{ФТ-3 : } \quad & g'^* = \frac{8\pi(2\epsilon - \eta)}{1 + \alpha}, \quad \lambda^* = 0, \\
 & \Omega_1 = 2\epsilon - \eta, \quad \Omega_2 = 2\eta - 2\epsilon, \quad \Omega_3 = 2\Delta + \frac{2\epsilon - \eta}{1 + \alpha}, \\
 & \beta = \frac{2\alpha + 2 - 2\epsilon + \eta}{(1 + \alpha)(2 - 2\epsilon + \eta)}; \\
 \text{ФТ-4 : } \quad & g'^* = \frac{8\pi(2\epsilon - \eta)}{1 + \alpha}, \quad \lambda^* = 2\pi \left(2\Delta + \frac{-2\epsilon + \eta}{1 + \alpha} \right), \\
 & \Omega_1 = 2\epsilon - \eta, \quad \Omega_2 = 2\eta - 2\epsilon, \quad \Omega_3 = -2\Delta - \frac{2\epsilon - \eta}{1 + \alpha}, \\
 & \beta = \frac{2 + 2\Delta}{2 - 2\epsilon + \eta}.
 \end{aligned}$$

Чтобы проанализировать режим $u \rightarrow 0$ (вмороженное поле скорости), мы вводим новую переменную $g'' \equiv g/u$. Тогда соответствующие бета-функции имеют вид

$$\beta_{g''} = g''[-2\epsilon + 2\gamma_D - 2\gamma_v], \quad \beta_u = u[-\eta + \gamma_D], \quad \beta_\lambda = \lambda[2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D],$$

и аномальные размерности записываются как

$$\gamma_D = \frac{g''}{8\pi(1+u)} \left[1 + \alpha - \frac{2\alpha}{1+u} \right], \quad \gamma_v = -\frac{\alpha g''}{8\pi(1+u)^2}, \quad \gamma_\lambda = \frac{\alpha g''}{8\pi(1+u)} - \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Такой вмороженный режим соответствует $u^* = 0$, в этом случае также существуют четыре возможные ИК-устойчивые фиксированные точки:

$$\begin{aligned}
 \text{ФТ-5 : } \quad & g''^* = 0, \quad \lambda^* = 0, \\
 & \Omega_1 = -2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta, \quad \Omega_3 = 2\Delta, \\
 & \beta = 1; \\
 \text{ФТ-6 : } \quad & g''^* = 0, \quad \lambda^* = -4\pi\Delta, \\
 & \Omega_1 = -2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta, \quad \Omega_3 = -2\Delta, \\
 & \beta = 1 + \Delta; \\
 \text{ФТ-7 : } \quad & g''^* = 8\pi\epsilon, \quad \lambda^* = 0, \\
 & \Omega_1 = 2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta + \epsilon(1 - \alpha), \quad \Omega_3 = 2\Delta + \epsilon(1 - 2\alpha), \\
 & \beta = \frac{2 - (1 - 2\alpha)\epsilon}{2 - (1 - \alpha)\epsilon};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ФТ-8: } \quad g''^* &= 8\pi\epsilon, \quad \lambda^* = 2\pi[-2\Delta + \epsilon(2\alpha - 1)], \\
\Omega_1 &= 2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta + (1 - \alpha)\epsilon, \quad \Omega_3 = -2\Delta + (2\alpha - 1)\epsilon, \\
\beta &= \frac{2 + 2\Delta}{2 - (1 - \alpha)\epsilon}.
\end{aligned}$$

Если не рассматривать особый выбор параметра u , имеет место нетривиальный случай. Будем считать, что u конечен и отличен от нуля. Решая уравнение (10) для $u \neq 0$, $g \neq 0$, можно получить следующие значения для координат фиксированной точки:

$$\frac{g^*}{8\pi u^*(1 + u^*)} = \frac{2\epsilon - \eta}{1 + \alpha}, \quad u^* = -1 + \frac{\alpha(\eta - 2\epsilon)}{(1 + \alpha)(\eta - \epsilon)}. \quad (12)$$

Значение координаты λ^* определяет два возможных режима. Фиксированная точка с нулевым значением λ^* определяется как

$$\text{ФТ-9: } \quad \lambda^* = 0, \quad \beta = \frac{2 - \eta + \alpha(1 + \epsilon - \eta)}{(1 + \alpha)(2 - \eta)}$$

и является устойчивой в области

$$(1 - \alpha)\epsilon < \eta < \epsilon, \quad \Delta + \frac{(1 + 2\alpha)\eta}{2(1 + \alpha)} > \frac{\alpha\epsilon}{1 + \alpha}. \quad (13)$$

Фиксированная точка с ненулевым значением λ^* есть

$$\text{ФТ-10: } \quad \lambda^* = -4\pi\Delta + \frac{2\pi\alpha\epsilon}{1 + \alpha} - 2\pi\eta\frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha}, \quad \beta = \frac{2 + 2\Delta}{2 - \eta},$$

она является устойчивой в области

$$(1 - \alpha)\epsilon < \eta < \epsilon, \quad \Delta + \frac{(1 + 2\alpha)\eta}{2(1 + \alpha)} < \frac{\alpha\epsilon}{1 + \alpha}. \quad (14)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фиксированные точки ФТ-1 и ФТ-5 отвечают теории без взаимодействия (теории среднего поля и гауссовой теории), и, таким образом, предсказания этой теории должны согласовываться с предсказаниями, основанными на уравнении, рассмотренном в работе [4]. Из структуры фиксированных точек можно получить некоторые физические следствия. Во-первых, мы видим, что сжимаемость имеет непосредственное влияние на значение показателя распада (точки ФТ-3, ФТ-7–ФТ-9). Для некоторых режимов (ФТ-3, ФТ-7) это может привести к усилению процесса реакции (для обеих $\beta > 1$) по сравнению с соответствующими режимами в случае несжимаемого поля [6], [18]. Как уже указывалось, этот факт можно объяснить наличием сжимаемых стоков, в которые затягиваются частицы (см. также работу [24]). Однако мы также наблюдаем, что, когда и флуктуации плотности, и сжимаемость являются существенными (для фиксированных точек ФТ-4, ФТ-10), плотность стремится подавить влияние сжимаемости.

“Реальная задача” соответствует выбору $\epsilon = \eta = 4/3$, который приводит к знаменитому “закону пяти третьих” Колмогорова [16] для пространственной статистики

скоростей. Нетрудно видеть, что этот режим может быть реализован с помощью фиксированных точек ФТ-9 или ФТ-10 в зависимости от значения параметра Δ , либо, что эквивалентно, от размерности d пространства. Из формул (13) и (14) видно, что имеется “критическое” значение $\Delta_c = -2/(3 + 3\alpha)$ для параметра Δ , выше которого точка ФТ-9 является устойчивой, в то время как точка ФТ-10 является устойчивой при $\Delta < \Delta_c$, поскольку $\alpha > 0$, а параметр Δ_c отрицателен. Следовательно, вблизи пространственной размерности $d_c = 2$ ($\Delta = 0$), режим, представленный фиксированной точкой ФТ-9, должен быть реализован с показателем распада $\beta = (1 + 3\alpha)/(1 + \alpha)$. Таким образом, мы заключаем, что сжимаемость имеет сильное влияние на крупномасштабное асимптотическое поведение процесса аннигиляции и приводит к усилению его вблизи критической размерности $d_c = 2$. С другой стороны, флуктуации плотности опять ведут к подавлению сжимаемости (что можно видеть с помощью непосредственного изучения показателя β для ФТ-10).

Благодарности. Работа поддержана Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант VEGA 1/0222/13), Centre of Excellency for Nanofluid, Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences. Настоящая статья также создавалась в рамках программы “Cooperative phenomena and phase transition in nanosystems with perspective utilization in nano- and biotechnology” (проекты № 26220120033, 26110230061). Финансирование исследования и программы развития предоставил European Regional Development Fund.

Список литературы

- [1] B. Derrida, V. Hakim, V. Pasquier, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:4 (1995), 751–754, arXiv: hep-th/9505066.
- [2] R. Kroon, H. Fleurent, R. Sprik, *Phys. Rev. E*, **47**:4 (1993), 2462–2472.
- [3] T. Tél, A. de Moura, C. Grebogi, G. Károlyi, *Phys. Rep.*, **413**:2–3 (2005), 91–196.
- [4] B. P. Lee, *J. Phys. A*, **27**:8 (1994), 2633–2652.
- [5] M. W. Deem, J.-M. Park, *Phys. Rev. E*, **57**:3 (1998), 2681–2685, arXiv: cond-mat/9707254; **58**:3 (1998), 3223–3228, arXiv: cond-mat/9806195.
- [6] M. Hnatich, J. Honkonen, *Phys. Rev. E*, **61** (2000), 3904–3911.
- [7] M. J. E. Richardson, J. Cardy, *J. Phys. A*, **32**:22 (1999), 4035–4045.
- [8] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, *Phys. Rev. E*, **60**:2 (1999), R1138–R1141.
- [9] R. Benzi, M. H. Jensen, D. R. Nelson, P. Perlekar, S. Pigolotti, F. Toschi, *Population dynamics in compressible flows*, arXiv: 1203.6319.
- [10] R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids*, **11**:5 (1968), 945–953.
- [11] N. V. Antonov, *Physica D*, **144**:3–4 (2000), 370–386.
- [12] U. C. Täuber, M. Howard, B. P. Vollmayr-Lee, *J. Phys. A*, **38**:17 (2005), R79–R131.
- [13] M. Doi, *J. Phys. A*, **9**:9 (1976), 1465–1478; *J. Phys. A*, 1976, 1479–1495.
- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 6: *Гидродинамика*, Наука, М., 2006.
- [15] N. V. Antonov, J. Honkonen, *Phys. Rev. E*, **63**:3 (2001), 036302, 7 pp., arXiv: nlin/0010029.
- [16] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, ФАЗИС, М., 1998.
- [17] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, *Phys. Rev. E*, **66**:3 (2002), 036313, arXiv: nlin/0204044.
- [18] М. Гнатич, Ю. Хонконен, Т. Лучивянски, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 137–145.

- [19] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.
- [20] N. V. Antonov, *Phys. Rev. E*, **60**:6 (1999), 6691–6707.
- [21] A. N. Vasil'ev, *Functional Methods in Quum Field Theory and Statistical Physics*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1998.
- [22] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*, Gordon and Breach, London, 1999.
- [23] M. Hnatič, J. Honkonen, T. Lučivjanský, submitted to Eur. Phys. J. B.
- [24] J.-P. Bouchaud, A. Georges, *Phys. Rep.*, **195**:4–5 (1990), 127–293.