Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Хонконен, Контурно упорядоченные функции Грина в стохастической теории поля, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 455–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:11:54

© 2013 г.

Ю. Хонконен*

КОНТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Приведен краткий обзор вопроса о функциональной формулировке теории возмущений для разнообразных функций Грина в квантовой теории поля. В частности, обсуждается контурно упорядоченное представление функций Грина при конечной температуре. Показано, что разложение зависящих от времени функций Грина по теории возмущений при конечной температуре можно построить с помощью стандартного правила Вика в функциональном виде без введения комплексного времени и эволюции вспять по времени. Обсуждается проблема факторизации соответствующего функционального интеграла. Функции Грина решения стохастических дифференциальных уравнений построены в форме Швингера–Келдыша с представлением в виде функционального интеграла с явно сплетающимися физическими и вспомогательными полями.

Ключевые слова: функции Грина, температурные функции Грина, временные функции Грина при конечной температуре, функциональное представление, функциональный интеграл, стохастическое дифференциальное уравнение.

DOI: 10.4213/tmf8483

1. ВВЕДЕНИЕ

Функции Грина относятся к наиболее важным средствам среди методов квантовой теории поля, применяемых в различных областях физики и в других системах, описываемых в терминах подходящих математических моделей. Общее определение функции Грина в квантовой теории – это среднее значение упорядоченного по времени произведения операторов Гейзенберга:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr}\{\hat{\rho} T[\hat{\varphi}_H(x_1)\hat{\varphi}_H(x_2)\dots\hat{\varphi}_H(x_n)]\}. \quad (1)$$

Зависящие от времени операторы в картине Гейзенберга в большом каноническом ансамбле системы, описываемой оператором Гамильтона $\hat{H}$, определяются как

$$\hat{\varphi}_H(t, \mathbf{x}) = e^{it(\hat{H}-\mu\hat{N})/\hbar}\hat{\varphi}(\mathbf{x})e^{-it(\hat{H}-\mu\hat{N})/\hbar}.$$

*National Defence University, Helsinki, Finland. E-mail: juha.honkonen@helsinki.fi

При нулевой температуре оператор плотности $\hat{\rho}$ в (1) строится с помощью основного состояния гамильтониана $\hat{H}$:

$$\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|, \quad \hat{H}|0\rangle = 0. \quad (2)$$

При конечной температуре $T > 0$ обычно выбирается оператор плотности в виде

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}. \quad (3)$$

Для разложения по теории возмущений представление взаимодействия вводится с помощью оператора эволюции, порожденной свободным оператором Гамильтона $\hat{H}_0$:

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}) = e^{it(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) e^{-it(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar}. \quad (4)$$

Функции Грина (1) в терминах операторов Дирака (4) имеют вид

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{U}(0, t_f) T [\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_n) \hat{U}(t_f, t_i)] \hat{U}(t_i, 0) \}, \quad (5)$$

где $t_f > t_n > \dots > t_2 > t_1 > t_i$, а оператор эволюции $\hat{U}$ равен

$$\hat{U}(t, t') = e^{it(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar} e^{-i(t-t')(\hat{H}-\mu\hat{N})/\hbar} e^{-it'(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar}.$$

Именно с операторами эволюции из выражения (5), вынесенными из T -произведения, связаны сложности в разложении по теории возмущений.

При $T = 0$ все упрощается в силу теоремы Гелл-Мана–Лоу. Адиабатические включение и выключение взаимодействия в прошлом и будущем заменяют основное состояние взаимодействующей системы аналогичным состоянием свободной системы, поскольку

$$\hat{U}(t_f, 0)|0\rangle_{t_f \rightarrow \infty} \sim \beta(t_f)|0\rangle, \quad \hat{U}(t_i, 0)|0\rangle_{t_i \rightarrow -\infty} \sim \alpha(t_i)|0\rangle.$$

Фазовые множители $\alpha(t_i)$ и $\beta(t_f)$ определяют нормировку, а функции Грина (1) становятся равными средним значениям по основному состоянию свободной системы:

$$\langle 0|T[\hat{\varphi}_H(x_1)\hat{\varphi}_H(x_2)\dots\hat{\varphi}_H(x_n)]|0\rangle = \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} \frac{\langle 0|T[\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\dots\hat{\varphi}(x_n)\hat{U}(t_f, t_i)]|0\rangle}{\langle 0|\hat{U}(t_f, t_i)|0\rangle}.$$

Для такого матричного элемента разложение по теории возмущений можно построить с помощью теорем Вика, которые особенно удобны в функциональном виде, как это подробно изложено в классической монографии [1].

При конечной температуре $T > 0$ для зависящих от времени операторов вида

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_M(t, \mathbf{x}) &= e^{t(\hat{H}-\mu\hat{N})/\hbar} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) e^{-t(\hat{H}-\mu\hat{N})/\hbar}, \\ \hat{\varphi}_e(t, \mathbf{x}) &= e^{t(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) e^{-t(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\hat{\varphi}_M$, $\hat{\varphi}_e$ – соответственно евклидовы операторы Гейзенберга и Дирака, часто используется трюк Мацубары с эволюцией по “мнимому времени”.

Если временные аргументы полевых операторов в функции Грина удовлетворяют условию $0 < t < \beta\hbar$, то в евклидовом эволюционном операторе начальный момент времени в (5) можно выбрать как $t_i = 0$, а конечный – как $t_f = \hbar\beta$. В этом случае евклидов оператор эволюции

$$\hat{U}_e(t, t') = e^{t(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-(t-t')(\hat{H} - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-t'(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar}$$

дает эволюционную экспоненту $\hat{U}_e(0, \beta\hbar) = e^{\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar}$, которая преобразует оператор плотности большого канонического ансамбля взаимодействующей системы в аналогичный оператор для свободной системы. Поэтому для функций Грина в представлении Мацубары мы получаем следующие средние значения в свободной системе:

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})/\hbar} T[\hat{\varphi}_M(x_1) \hat{\varphi}_M(x_2) \dots \hat{\varphi}_M(x_n)] \} = \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} T[\hat{\varphi}_e(x_1) \hat{\varphi}_e(x_2) \dots \hat{\varphi}_e(x_n) \hat{U}(\beta\hbar, 0)] \}. \end{aligned}$$

Правила Фейнмана в основном те же самые, что и в случае функций Грина при нулевой температуре. Важные различия, однако, заключаются в евклидовой эволюции полевых операторов и добавлении теплового среднего нормального произведения двух полевых операторов к пропагаторам модели (см., например, [1]).

Наиболее сложным является случай зависящих от времени функций Грина при конечной температуре, где временная эволюция порождается обычным уравнением Шредингера, а в определении (1) выбирается оператор плотности большого канонического ансамбля. Представление теории возмущений для таких функций Грина в литературе обычно основано на идее Швингера [2] о контурно упорядоченном произведении операторов в комплексной временной плоскости [3], [4] вместо обычного упорядоченного по времени произведения в (1).

Кроме обычных квантово-механических задач, важные стохастические задачи можно сформулировать в терминах полевых операторов, аналогичных операторам квантовой теории поля [5], [6], которые порождают функции Грина, определенные по аналогии с (1). Основное отличие от функций Грина квантовой теории поля состоит в виде оператора плотности, который в случае стохастических задач построен существенно отличающимся от (2) или (3) путем.

В настоящей работе автор ставил две цели. Во-первых, показать, что остроумная идея использования контурно упорядоченного произведения для вычисления зависящих от времени функций Грина в теории возмущений на самом деле больше не нужна. Разложение по теории возмущений этих функций Грина несложно получить с помощью стандартных теорем Вика, если их применять в компактном и ясном функциональном виде, который использовался в работе [1]. В частности, нам не нужны ни комплексные временные переменные, ни какая бы то ни было обратная временная эволюция полевых операторов. Во-вторых, обсудить применение зависящих от времени функций Грина к анализу стохастических задач на примере стохастического дифференциального уравнения (СДУ) второго порядка.

Рис. 1. Контур для контурно упорядоченной функции Грина. Часть контура, начинающаяся при t_i и продолжающаяся до t_f , обозначена как c_1 (эта часть соответствует физическим моментам времени). Через c_2 обозначена часть контура от t_f до t_i , а c_β – часть контура от t_i вдоль мнимой оси. Полный контур обозначен как $c = c_1 \cup c_2 \cup c_\beta$.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приведен краткий обзор контурно упорядоченных функций Грина. Построение разложения по теории возмущений для зависящих от времени функций Грина при конечной температуре с использованием только стандартных теорем Вика проведено в разделе 3. Решение СДУ второго порядка в терминах функций Грина представлено в разделе 4. Раздел 5 содержит заключение и обсуждение результатов.

2. КОНТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Среднее значение контурно упорядоченного произведения T_c операторов Гейзенберга

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} T_c [\hat{\varphi}_H(x_1) \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_n)] \} \quad (7)$$

представляет собой контурно упорядоченную функцию Грина. Контурно упорядоченное произведение является обобщением обычного хронологического произведения, в котором зависящие от времени операторы расставлены в порядке их временных аргументов на снабженном направлением (замкнутом) контуре на комплексной временной плоскости. Предполагается, что оператор плотности $\hat{\rho}$ в (7) описывает начальное распределение вероятности на контуре.

Операторная экспонента в операторе плотности для большого канонического ансамбля обычно включается в контур на комплексной временной плоскости с использованием представления Мазубары, что дает контур, приведенный на рис. 1. Предполагается, что контурно упорядоченная функция Грина, соответствующая этому контуру $c = c_1 \cup c_2 \cup c_\beta$, в представлении взаимодействия имеет вид ($\hat{V} = \hat{H} - \hat{H}_0$)

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} T_c \left[\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_n) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left(-i \int_c dt \hat{V}(t) \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Отметим отсутствие отдельных эволюционных операторов вне T_c -произведения.

В большинстве случаев пределы $t_f \rightarrow \infty$ и $t_i \rightarrow -\infty$ берутся при допущении, что система “забыла” обо всех начальных корреляциях. В этом случае за начальное распределение вероятности в (7) проще всего взять большое каноническое распределение для свободной системы и получить представление Келдыша для функций

Рис. 2. Контур Келдыша для функций Грина. Физические временные переменные берутся на контуре c_- , а временные переменные на контуре c_+ появляются во внутренней структуре графов теории возмущений.

Грина [7] на контуре Келдыша, приведенном на рис. 2. В подходе Келдыша двухточечные функции Грина ставятся в соответствие с одночастичными функциями плотности вероятности в “фазовом пространстве” с помощью представления функции Вигнера. Тогда уравнение Дайсона для полных пропагаторов можно рассматривать как квантовое кинетическое уравнение [7].

3. ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ ФУНКЦИИ ГРИНА ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Построить зависящие от времени функции Грина можно, однако, и вполне традиционным (хотя и менее эффективным) способом с помощью теорем Вика для симметричных произведений, как это было сделано в работе [1] при построении функций Грина при нулевой температуре и функций Мазубары.

Начнем с обычного выражения для зависящих от времени функций Грина при $T > 0$ в представлении Дирака:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{U}(-i\beta\hbar + t_i, t_i) \hat{U}(t_i, t_f) \times \right. \\ \left. \times T \left[\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_n) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{V}(u) du \right] \right] \right\}. \quad (9)$$

В выражении (9) оператор эволюции $\hat{U}(-i\beta\hbar + t_i, t_i)$, аргументом которого является комплексное время, формально является сокращенным представлением произведения обыкновенных (свободных) и евклидовых операторов эволюции:

$$\hat{U}(-i\beta\hbar + t_i, t_i) = e^{i\hat{H}_0 t_i / \hbar} \hat{U}_e(\beta\hbar, 0) e^{-i\hat{H}_0 t_i / \hbar}. \quad (10)$$

Обычная упорядоченная по времени экспонента для оператора эволюции

$$\hat{U}(t_f, t_i) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{V}(t) dt \right]$$

уже была введена в T -произведении (9). Введем аналогичное представление для евклидова оператора эволюции, а также для оператора

$$\hat{U}_e(\beta\hbar, 0) = T \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} \hat{V}_e(t) dt \right],$$

где $\widehat{V}_e(t)$ берется в картине евклидова взаимодействия (6). Для оператора эволюции $\widehat{U}(t_i, t_f)$ из-за наличия упорядоченных по времени аргументов ($t_f > t_i$) представление, полученное с использованием антихронологически упорядоченной экспоненты, имеет вид

$$\widehat{U}(t_i, t_f) = \widetilde{T} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{V}(u) du \right],$$

где *антихронологическое произведение* $\widetilde{T}$ располагает операторы в порядке возрастания времени *слева направо*. $\widetilde{T}$ -произведение порождает антихронологическую свертку, определяемую как $\widetilde{T}[\widehat{\varphi}(t)\widehat{\varphi}(t')] = N[\widehat{\varphi}(t)\widehat{\varphi}(t')] + \widetilde{\Delta}(t, t')$. Таким образом, функция Грина выражается (с использованием сокращенного обозначения (10)) как

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta \widehat{H}}} \text{Tr} \left(e^{-\beta \widehat{H}_0} T_{c_\beta} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{c_\beta} \widehat{V}(u) du \right] \times \right. \\ \left. \times \widetilde{T} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{V}(u) du \right] T \left\{ \widehat{\varphi}(t_1) \widehat{\varphi}(t_2) \dots \widehat{\varphi}(t_n) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{V}(u) du \right] \right\} \right).$$

Здесь теоремы Вика позволяют слить произведение упорядоченных по времени произведений в одно нормально упорядоченное произведение [1], в результате чего получаем выражение

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta \widehat{H}_0} N \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \sum_{k>l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \right) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_n) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{c_\beta} V(\varphi_3) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(\varphi_2) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(\varphi_1) dt \right] \right\} \right) \Big|_{\varphi_i = \widehat{\varphi}}. \quad (11)$$

Среднее значение нормального произведения любого операторного функционала $F(\widehat{\varphi})$ вычисляется с помощью соотношения

$$\frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta \widehat{H}_0}} \text{Tr} \{ e^{-\beta \widehat{H}_0} N[F(\widehat{\varphi})] \} = \exp \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} d \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) F(\varphi) \Big|_{\varphi=0},$$

где ядро (которое нужно прибавить к пропагаторной матрице в (11)) равно

$$d(x, x') = \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta \widehat{H}_0}} \text{Tr} \{ e^{-\beta \widehat{H}_0} N[\widehat{\varphi}(x)\widehat{\varphi}(x')] \}. \quad (12)$$

Однако следует иметь в виду, что в (11) имеются поля, подчиняющиеся и евклидовой, и псевдоевклидовой эволюции, которые возникают из-за различных полевых операторов. Поэтому тепловые средние значения (12) образуют матрицу, элементы которой прибавляются к соответствующим пропагаторам и нормальным сверткам в (11).

Таким образом, функциональное представление, дающее разложение по теории возмущений для зависящих от времени функций Грина при $T > 0$, имеет вид

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{Z_0}{Z} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta_l \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \right. \\ \left. + \sum_{k>l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \right) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_n) \times \\ \times \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{c_\beta} V(\varphi_3) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(\varphi_2) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(\varphi_1) dt \right] \Big|_{\varphi_i=0}. \quad (13)$$

Легко понять, что этот функционал порождает точно такую же теорию возмущений, что и контурно упорядоченная функция Грина (8). Основной момент здесь заключается в том, что для получения представления (13) не надо вводить переменные комплексного времени или обратную эволюции по времени. Функционал (13) получается исключительно с помощью стандартных теорем Вика.

Обычно при переходе от функционального представления типа (13) к представлению в виде функционального интеграла имеется техническая проблема, которая существенно уменьшает пользу от применения функционального интеграла. Чтобы в этом разобраться, рассмотрим в качестве примера слабо взаимодействующий бозонный газ. Пусть взаимодействие локально, а рассматриваемое функциональное представление имеет вид (13) для двухточечной функции Грина

$$G_{12}(x_1, x_2) = \frac{Z_0}{Z} \exp \left(\frac{\delta}{\delta \psi_1} \Delta_\beta \frac{\delta}{\delta \psi_1^+} + \frac{\delta}{\delta \psi_2} \tilde{\Delta}_\beta \frac{\delta}{\delta \psi_2^+} + \right. \\ \left. + \frac{\delta}{\delta \psi_2} n_\beta \frac{\delta}{\delta \psi_1^+} + \frac{\delta}{\delta \psi_1} d \frac{\delta}{\delta \psi_2^+} \right) \psi_1(x_1) \psi_1^+(x_2) \times \\ \times \exp \left[\frac{i\lambda}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{x} (\psi_2^+)^2 \psi_2^2 - \frac{i\lambda}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{x} (\psi_1^+)^2 \psi_1^2 \right] \Big|_{\psi_i^\pm=0} \quad (14)$$

с пропагаторами $\Delta_\beta = \Delta + d$, $\tilde{\Delta}_\beta = \tilde{\Delta} + d$ и $n_\beta = n + d$. Функциональный интеграл введен в (14) путем выражения экспоненты функционального дифференциального оператора второго порядка в правой части в виде гауссова функционального интеграла с экспонентой от линейных дифференциальных операторов [1]. Функционал взаимодействия сохраняет вид, приведенный в (14), при этом для действия свободных полей получаем

$$S_0 = \int dt \int d\mathbf{x} \left[\psi_1^+ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_1 - \psi_2^+ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_2 \right].$$

Здесь и во взаимодействии (14) нет явной связи между физическими полями $\psi_1^\pm$ и вспомогательными полями $\psi_2^\pm$, и интеграл для вспомогательных полей (формально) факторизуется! То, что пренебрежение вспомогательным полем приводит к неопределенностям в теории возмущений, было замечено уже довольно давно [8], и проблема функционального интеграла заключается в том, что он не отражает однозначно структуру пропагаторов, которая явно выражена в функционале (14).

4. ТЕОРИЯ ПОЛЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Наличие случайности, внутренне присущей различным моделям, описывающим эволюцию физических, химических, биологических, социальных и финансовых процессов, учитывается наиболее непосредственно при помощи дифференциальных уравнений со случайными коэффициентными функциями (источниками), т. е. СДУ. Такой метод позволяет описывать флуктуации с помощью уравнения Ланжевена

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\varphi + U(\varphi) + fb(\varphi), \quad \langle f(t)f(t') \rangle = \delta(t-t')D. \quad (15)$$

СДУ с белым шумом (15) является математически некорректно определенным. Способ непосредственного получения математически непротиворечивого уравнения состоит в использовании δ -последовательности с последующим переходом к δ -функциональному пределу:

$$\langle f(t, \mathbf{x})f(t', \mathbf{x}') \rangle = \overline{D}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \rightarrow \delta(t-t')D(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad t' \rightarrow t,$$

что приводит к интерпретации СДУ в форме Стратоновича (15) (см., например, [9]). Однако как в теоретическом анализе, так и в теории возмущений более удобной является форма Ито, хотя ее не так легко получить из-за проблемы с конечным временем корреляции.

СДУ первого порядка представляют собой стандартный инструмент при анализе флуктуаций. Здесь мы обсудим СДУ второго порядка

$$m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\varphi + U(\varphi) + fb(\varphi). \quad (16)$$

Удобно представить задачу (16) в виде системы двух уравнений первого порядка для двойного набора переменных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v, \quad m \frac{\partial v}{\partial t} + \beta v = -K\varphi + U(\varphi) + fb(\varphi). \quad (17)$$

Для функции плотности условной вероятности данной задачи $p(t, \varphi, v|t_0, \varphi_0, v_0)$ стандартные правила дают уравнение Фоккера–Планка (УФП)

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial \varphi}(vp) + \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\beta}{m}v + \frac{K}{m}\varphi - \frac{U}{m} \right) p \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [bDbp], \quad (18)$$

где принята интерпретация Ито для СДУ (17).

Используя аналогию между УФП и уравнением Шредингера, решение УФП можно представить аналогично тому, как это делается в квантовой теории поля [6]. Если использовать операторы

$$\hat{\varphi}, \hat{\pi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad [\hat{\varphi}, \hat{\pi}] = 1; \quad \hat{v}, \hat{\eta} = -\frac{\partial}{\partial v}, \quad [\hat{v}, \hat{\eta}] = 1, \quad (19)$$

то УФП (18) для вектора состояния $\langle \varphi, v|p_t \rangle := p(\varphi, v, t)$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} |p_t \rangle = \hat{L} |p_t \rangle, \quad \hat{L} = \hat{\pi} \hat{v} - \hat{\eta} \left[\frac{\beta}{m} \hat{v} + \frac{K}{m} \hat{\varphi} - \frac{U(\hat{\varphi})}{m} \right] + \frac{1}{2} \hat{\eta}^2 b(\hat{\varphi}) D b(\hat{\varphi}).$$

Зависящие от времени операторы в представлении Гейзенберга и в представлении Дирака вводятся по аналогии с евклидовой теорией поля:

$$\hat{\varphi}_H(t) = e^{-\hat{L}t} \hat{\varphi} e^{\hat{L}t}, \quad \hat{\varphi}(t) = e^{-\hat{L}_0 t} \hat{\varphi} e^{\hat{L}_0 t}, \quad \hat{L}_0 = \hat{\pi} \hat{v} - \frac{\beta}{m} \hat{\eta} \hat{v}.$$

Производящая функция

$$G(J) = \text{Tr} \hat{\rho}_0 T \left[\exp \left(\int_{t_i}^{t_f} dt \hat{\varphi}_H(t) J(t) \right) \right], \quad \hat{\rho}_0 = \iint d\varphi dv |p_0\rangle \langle \varphi, v|, \quad (20)$$

вычисляется по аналогии с евклидовой теорией поля. В представлении Дирака ($\hat{L} = \hat{L}_0 + \hat{L}_I$, $t_f > t_i > t_0$) получаем

$$\begin{aligned} T \exp \left(\int \hat{\varphi}_H J dt \right) &= e^{\hat{L}_0 t_0} \hat{U}(t_0, t_f) T \left[\exp \left(\int \hat{\varphi} J dt + \hat{S}_I \right) \right] \hat{U}(t_i, t_0) e^{-\hat{L}_0 t_0} = \\ &= e^{\hat{L}_0 t_0} \tilde{T} \exp \left(- \int_{t_0}^{t_f} \hat{L}(t) dt \right) T \left[\exp \left(\int \hat{\varphi} J dt + \hat{S}_I \right) \right] T \exp \left(\int_{t_0}^{t_i} \hat{L}(t) dt \right) e^{-\hat{L}_0 t_0}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\hat{U}(t, t') = e^{-t \hat{L}_0} e^{(t-t') \hat{L}} e^{t' \hat{L}_0}$ и $\hat{S}_I = \int_{t_i}^{t_f} \hat{L}_I(t) dt$. Хронологические произведения в (21) сливаются в силу теорем Вика в нормальное произведение. Для любого операторного функционала $F[\hat{\pi}, \hat{\varphi}, \hat{\eta}, \hat{v}]$ вычисление дает [1]

$$\text{Tr} e^{-\hat{L}_0 t_0} \hat{\rho}_0 e^{\hat{L}_0 t_0} N \{ F[\hat{\pi}, \hat{\varphi}, \hat{\eta}, \hat{v}] \} = \iint \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}v p_0(\varphi, v) F[0, n_1 \varphi + n_2 v, 0, n_3 v],$$

где $n_1 = [\hat{\varphi}, \hat{\pi}]$, $n_2 = [\hat{\varphi}, \hat{\eta}]$ и $n_3 = [\hat{v}, \hat{\eta}]$. Отсюда получаем функциональный вид производящей функции (20):

$$\begin{aligned} G(J) &= \iint \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}v p_0(\varphi, v) \exp \left[\frac{\delta}{\delta \varphi_2} \tilde{\Delta} \frac{\delta}{\delta \eta_2} + \frac{\delta}{\delta \varphi_1} \Delta \frac{\delta}{\delta \eta_1} + \frac{\delta}{\delta \varphi_2} n_2 \frac{\delta}{\delta \eta_1} \right] \times \\ &\times \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} \varphi_1 J dt - \int_{t_0}^{t_f} L_I(\eta_2, \varphi_2) dt + \int_{t_0}^{t_f} L_I(\eta_1, \varphi_1) dt \right] \Big|_{\substack{\eta_i=0 \\ \varphi_i=n_1 \varphi + n_2 v}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Стандартное введение функционального интеграла путем представления его как гауссова интеграла для дифференциального оператора в правой части (22) также приводит к факторизации вспомогательных переменных.

Однако в (22) функционал взаимодействия L_I является квадратичным по η . Поэтому экспоненту от L_I можно записать как гауссов интеграл с экспонентой, линейной по η , что позволяет вычислить функциональные производные в замкнутом виде и получить (для простоты полагаем, что функция b не зависит от полей)

$$\begin{aligned} G(J) &= \iiint \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 p_0(\varphi, v) \exp \left\{ J(\Delta \xi_1 + n_1 \varphi + n_2 v) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \xi_1 (bDb)^{-1} \xi_1 - \frac{1}{2} \xi_2 (bDb)^{-1} \xi_2 + \xi_2 (bDb)^{-1} U_2 + \xi_1 (bDb)^{-1} U_1 + \\ &\left. + \frac{1}{2} U_2 (bDb)^{-1} U_2 - \frac{1}{2} U_1 (bDb)^{-1} U_1 \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $U_1 = U(\Delta\xi_1 + n_1\varphi + n_2v)$ и $U_2 = U(\tilde{\Delta}\xi_2 + n_2\xi_1 + n_1\varphi + n_2v)$. В представлении (23) перемешивание переменных теперь присутствует явно, хотя и выглядит довольно непривлекательно. Такое представление приводит к сокращению графов с замкнутыми петлями пропагаторов без явного использования свойства запаздывания пропагаторов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведено описание вывода функционального представления для функций Грина как для обычных случаев квантовой теории поля, так и для решения СДУ второго порядка. Показано, что контурно упорядоченные функции Грина можно построить как стандартные зависящие от времени функции Грина при конечной температуре с использованием теорем Вика для симметричных произведений. В частности, отмечено, что для получения обычного разложения по теории возмущений не требуется введения комплексного временного контура и соответствующего контурно упорядоченного произведения. Также отмечена неопределенность представления в виде функционального интеграла для зависящих от времени функций Грина при конечной температуре.

Построено функциональное представление производящей функции для моментов решения СДУ второго порядка. Чтобы избежать неопределенности, в качестве отправной точки использовалось УФП, соответствующее интерпретации Ито. Показано, что в этом случае структура функционала взаимодействия позволяет построить непротиворечивый функциональный интеграл для производящей функции.

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, ЛГУ, Л., 1976.
- [2] J. Schwinger, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 407–432.
- [3] J. Rammer, H. Smith, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 323–359.
- [4] N. P. Landsman, Ch. G. van Weert, *Phys. Rep.*, **145**:3–4 (1987), 141–249.
- [5] M. Doi, *J. Phys. A*, **9**:9 (1976), 1465–1477; 1479–1495.
- [6] H. Leschke, M. Schmutz, *Z. Phys. B*, **27**:1 (1977), 85–94.
- [7] Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ*, **47** (1965), 1515–1527.
- [8] L. Dolan, R. Jackiw, *Phys. Rev. D*, **9**:12 (1974), 3320–3341.
- [9] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods. For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer Series in Synergetics, **13**, Springer, Berlin, 1985.