Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Котиков, Свойство максимальной трансцендентности: вычисление мастер-интегралов, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 98–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:35:34

© 2013 г.

А. В. Котиков*

СВОЙСТВО МАКСИМАЛЬНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ: ВЫЧИСЛЕНИЕ МАСТЕР-ИНТЕГРАЛОВ

Предлагается обзор ряда результатов, обладающих свойством максимальной трансцендентности.

Ключевые слова: аномальные размерности, диаграммы Фейнмана, операторы Вильсона.

DOI: 10.4213/tmf8487

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно было показано, что свойство максимальной трансцендентности, которое введено в работе [1] для ядра уравнения Балицкого–Фади́на–Кураева–Липатова (БФКЛ) [2], [3] в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной модели Янга–Миллса (ЯМ) [4], применимо также к амплитудам, формфакторам и корреляционным функциям (см. работы [5]–[7], а также приведенные там обсуждения и библиографию). В нашем кратком обзоре мы покажем, как это свойство влияет на матрицы аномальных размерностей операторов Вильсона с твистом 2 и продемонстрируем существование таких же свойств в результатах, полученных для так называемых мастер-интегралов [8].

2. АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ЯМ

Аномальные размерности управляют нарушением бёркеновского скейлинга для партонных распределений (или матричных элементов операторов Вильсона с твистом 2) в рамках квантовой хромодинамики (КХД). Уравнения БФКЛ и Докшице́ра–Грибо́ва–Липатова–Альтаре́лли–Паризи (ДГЛАП) [9] пересуммируют наиболее важные вклады $\sim \alpha_s \ln(1/x)$ и $\sim \alpha_s \ln(Q^2/\Lambda^2)$ соответственно в различных кинематических областях бёркеновской переменной x и “массы” Q^2 виртуального фотона в глубоко неупругом лептон-адронном рассеянии (мюон-нуклонный случай приведен на рис. 1). Таким образом, они представляют собой краеугольный камень

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

Рис. 1. Глубоко неупругое мюон-нуклонное рассеяние (k , q и p – импульсы мюона, фотона и нуклона соответственно). В глубоко неупругой кинематике $p^2 = M^2 \rightarrow 0$, где M – масса нуклона. Стандартными переменными являются $Q^2 = -q^2 > 0$ и бьёркеновская переменная $x = Q^2/2pq$, где Q^2 – “масса” виртуального фотона, а x – часть импульса нуклона, которую несет сталкивающийся партон (кварк или глюон).

в анализе экспериментальных данных, получаемых в процессах лептон-нуклонного и нуклон-нуклонного рассеяния. Для суперсимметричного обобщения уравнения КХД существенно упрощаются (см. [10]).

2.1. Главный порядок. В $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной модели ЯМ элементы матрицы аномальных размерностей в главном порядке имеют вид (см. [11])

$$\begin{aligned}
 \gamma_{gg}^{(0)}(j) &= 4 \left(\Psi(1) - \Psi(j-1) - \frac{2}{j} + \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \right), \\
 \gamma_{\lambda g}^{(0)}(j) &= 8 \left(\frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} + \frac{2}{j+2} \right), \quad \gamma_{\varphi g}^{(0)}(j) = 12 \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \right), \\
 \gamma_{g\lambda}^{(0)}(j) &= 2 \left(\frac{2}{j-1} - \frac{2}{j} + \frac{1}{j+1} \right), \quad \gamma_{q\varphi}^{(0)}(j) = \frac{8}{j}, \\
 \gamma_{\lambda\lambda}^{(0)}(j) &= 4 \left(\Psi(1) - \Psi(j) + \frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} \right), \quad \gamma_{\varphi\lambda}^{(0)}(j) = \frac{6}{j+1}, \\
 \gamma_{\varphi\varphi}^{(0)}(j) &= 4 \left(\Psi(1) - \Psi(j+1) \right), \quad \gamma_{g\varphi}^{(0)}(j) = 4 \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где j – число, связанное с моментом Меллина (или спином).

Матрицу, составленную из аномальных размерностей (1), можно диагонализировать [11], [1]:

$$[D\Gamma D^{-1}]_{\text{unpol}}^{N=4} = \begin{vmatrix} -4S_1(j-2) & 0 & 0 \\ 0 & -4S_1(j) & 0 \\ 0 & 0 & -4S_1(j+2) \end{vmatrix},$$

где $S_1(j)$ определено ниже в выражении (2).

Таким образом, аномальные размерности всех мультипликативно перенормированных операторов Вильсона в главном порядке можно получить из одной универсальной функции

$$\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j) = -4S(j-2) \equiv -4(\Psi(j-1) - \Psi(1)) \equiv -4 \sum_{r=1}^{j-2} \frac{1}{r}.$$

Те же результаты могут быть получены в случае аномальных размерностей, зависящих от спина (см. [11], [1]).

2.2. Метод получения универсальных аномальных размерностей. Введем уровень трансцендентности i для гармонических сумм

$$S_{\pm a}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{(\pm 1)^m}{m^a}, \quad S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{(\pm 1)^m}{m^a} S_{\pm b, \pm c, \dots}(m) \quad (2)$$

и констант Эйлера–Цагира

$$\zeta(\pm a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m}{m^a}, \quad \zeta(\pm a, \pm b, \pm c, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m}{m^a} S_{\pm b, \pm c, \dots}(m-1) \quad (3)$$

следующим образом:

$$S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j) \sim \zeta(\pm a, \pm b, \pm c, \dots) \sim \frac{1}{j^i}, \quad i = a + b + c + \dots \quad (4)$$

При этом предполагается, что универсальные аномальные размерности $\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j)$, $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ и $\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j)$ имеют зависимость типа $\sim 1/j^i$ с уровнями $i = 1$, $i = 3$ и $i = 5$ соответственно. К нарушению этого свойства может приводить вклад, обусловленный членами, которые возникают в заданном порядке из предыдущих порядков теории возмущений. Эти вклады могут порождаться и/или устраняться с помощью подходящей конечной перенормировки и/или переопределения константы взаимодействия. Однако в $\overline{\text{DR}}$ -схеме эти члены не возникают [12].

Известно, что в главном порядке, следующем за главным порядком (СПП) и следующим за следующим за главным порядком (ССПП) (с SUSY-соотношением для цветовых множителей КХД $C_F = C_A = N_c$) наиболее сложные вклады (соответственно с $i = 1, 3, 5$) одинаковы для аномальных размерностей в соответствующих порядках в КХД [13] и для скаляр-скалярных аномальных размерностей в главном порядке и в СПП [14]. Это свойство позволяет найти универсальные аномальные размерности $\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j)$, $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ и $\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j)$, не зная всех элементов матрицы аномальных размерностей [1], что для $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ было проверено путем точных вычислений в работе [14].

2.3. Универсальная аномальная размерность для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной модели ЯМ. Окончательный трехпетлевой результат¹⁾ для универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{uni}}(j)$ в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной модели ЯМ имеет

¹⁾Заметим, что в соответствии с работой [3] наша нормировка $\gamma(j)$ содержит дополнительный множитель $-1/2$ по сравнению со стандартной нормировкой (см. [1]) и отличается знаком от нормировки из работы [13].

вид [15]

$$\gamma(j) \equiv \gamma_{\text{uni}}(j) = \hat{a}\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j) + \hat{a}^2\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j) + \hat{a}^3\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j) + \dots, \quad \hat{a} = \frac{\alpha N_c}{4\pi}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j+2) &= -S_1, \\ \frac{1}{8}\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j+2) &= (S_3 + \bar{S}_{-3}) - 2\bar{S}_{-2,1} + 2S_1(S_2 + \bar{S}_{-2}), \\ \frac{1}{32}\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j+2) &= 2\bar{S}_{-3}S_2 - S_5 - 2\bar{S}_{-2}S_3 - 3\bar{S}_{-5} + 24\bar{S}_{-2,1,1,1} + \\ &\quad + 6(\bar{S}_{-4,1} + \bar{S}_{-3,2} + \bar{S}_{-2,3}) - 12(\bar{S}_{-3,1,1} + \bar{S}_{-2,1,2} + \bar{S}_{-2,2,1}) - \\ &\quad - (S_2 + 2S_1^2)(3\bar{S}_{-3} + S_3 - 2\bar{S}_{-2,1}) - S_1(8\bar{S}_{-4} + \bar{S}_{-2}^2 + \\ &\quad + 4S_2\bar{S}_{-2} + 2S_2^2 + 3S_4 - 12\bar{S}_{-3,1} - 10\bar{S}_{-2,2} + 16\bar{S}_{-2,1,1}), \end{aligned} \quad (6)$$

причем $S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots} \equiv S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j)$ и

$$\bar{S}_{-a, b, c, \dots}(j) = (-1)^j S_{-a, b, c, \dots}(j) + S_{-a, b, c, \dots}(\infty)(1 - (-1)^j). \quad (7)$$

Выражение (7) является аналитическим продолжением (на вещественные и комплексные j) гармонических сумм $S_{-a, b, c, \dots}(j)$ [16].

Результаты для $\gamma_{\text{uni}}^{(3)}(j)$ [17], [18] и $\gamma_{\text{uni}}^{(4)}(j)$ [19] были получены из асимптотических уравнений Бете для больших расстояний [20] для операторов с твистом 2 и дополнительного вклада обертывающих поправок.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Аргументы, аналогичные рассмотренным в работе [1], позволяют вычислить широкий класс фейнмановских диаграмм, так называемые мастер-интегралы [8]. Рассмотрим его более подробно.

Применение интегрирования по частям (ИПЧ) [21] к внутренним петлевым импульсам дает соотношения между различными фейнмановскими интегралами, таким образом, необходимым оказывается вычисление только некоторых из них – тех, которые являются в некотором смысле независимыми (см. [22]). Эти независимые диаграммы (выбранные, разумеется, достаточно произвольно) называются мастер-интегралами [8].

Применение процедуры ИПЧ [21] к самим мастер-интегралам приводит к дифференциальным уравнениям для них [22], [23] с неоднородными членами, содержащими менее сложные диаграммы²⁾, а при применении процедуры ИПЧ к диаграммам для неоднородных членов получаются новые дифференциальные уравнения с новыми неоднородными членами, содержащими еще менее сложные диаграммы. Повторяя эту процедуру несколько раз, на последнем этапе можно получить неоднородные

²⁾Менее сложные диаграммы обычно содержат меньшее число пропагаторов и иногда их можно представить как диаграммы с меньшим числом петель и с некоторыми “эффективными массами” (см., например, работу [24] и приведенную там библиографию).

Рис. 2. Двухпетлевые двухточечные диаграммы.

члены, содержащие в основном “головастики”, которые, в свою очередь, очень легко вычисляются.

Решая дифференциальные уравнения на этом последнем шаге, можно воспроизвести диаграммы для фейнмановских интегралов из дифференциальных уравнений предыдущего шага. Повторяя эту процедуру несколько раз, можно получить результаты для исходных фейнмановских интегралов.

Такая схема успешно применялась для вычисления двухпетлевых двухточечных [22], [23], [25] и трехточечных [26], [27] диаграмм с одной ненулевой массой. Эта процедура очень мощная, но весьма сложная. Однако имеются некоторые упрощения, основанные на представлении фейнмановских интегралов в виде рядов.

Действительно, разложение двухпетлевых двухточечных (см. рис. 2) и трехточечных диаграмм (см. рис. 3) по обратной массе³⁾ с одной ненулевой массой (безмассовые и массивные пропагаторы показаны соответственно штриховыми и сплошными линиями) можно рассматривать как

$$\text{FI} = \frac{\hat{N}}{q^{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} C_n \frac{(\eta x)^n}{n^c} \left\{ F_0(n) + \left[\ln(-x) F_{1,1}(n) + \frac{1}{\varepsilon} F_{1,2}(n) \right] + \right. \\ \left. + \left[\ln^2(-x) F_{2,1}(n) + \frac{1}{\varepsilon} \ln(-x) F_{2,2}(n) + \frac{1}{\varepsilon^2} F_{2,3}(n) + \zeta(2) F_{2,4}(n) \right] + \dots \right\}, \quad (8)$$

где $x = q^2/m^2$, $\eta = 1$ или $\eta = -1$, $c = 0, 1, 2$ и $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ для двухточечных и трехточечных случаев соответственно. Здесь нормировка $\hat{N} = (\bar{\mu}^2/m^2)^{2\varepsilon}$,

³⁾Показанные на рис. 2, 3 диаграммы представляют собой сложные двухпетлевые фейнмановские интегралы, которые не содержат разрезов, отвечающих трем массивным частицам. Поэтому их результаты должны выражаться как комбинации полилогарифмов. Заметим, что мы рассматриваем только трехточечные диаграммы с независимыми выходящими импульсами q_1 и q_2 , подчиняющимися условиям $q_1^2 = q_2^2 = 0$ и $(q_1 + q_2)^2 \equiv q^2 \neq 0$, где q – входящий импульс.

Рис. 3. Двухпетлевые трехточечные диаграммы.

где $\bar{\mu} = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu$ в стандартной $\overline{\text{MS}}$ -схеме, а γ_E – постоянная Эйлера. Более того, размерность пространства-времени равна $D = 4 - 2\varepsilon$ и

$$C_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \equiv \hat{C}_n \quad (9)$$

для диаграмм с разрезами, отвечающими двум массивным частицам ($2m$ -разрезам). Для диаграмм с разрезами, отвечающими одной массивной частице (m -разрезы), мы имеем $C_n = 1$.

В случае m -разрезов коэффициенты $F_{N,k}(n)$ должны иметь вид

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{S_{\pm a, \dots}}{n^b}, \quad (10)$$

где $S_{\pm a, \dots} \equiv S_{\pm a, \dots}(j-1)$ – гармонические суммы из (2).

В случае $2m$ -разрезов коэффициенты $F_{N,k}(n)$ могут иметь более сложный вид:

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{S_{\pm a, \dots}}{n^b}, \quad \frac{V_{a, \dots}}{n^b}, \quad \frac{W_{a, \dots}}{n^b}, \quad (11)$$

здесь $V_{\pm a, \dots} \equiv V_{\pm a, \dots}(j-1)$ и $W_{\pm a, \dots} \equiv W_{\pm a, \dots}(j-1)$, где

$$\begin{aligned} V_a(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m}{m^a}, & V_{a,b,c,\dots}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m}{m^a} S_{b,c,\dots}(m), \\ W_a(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m^{-1}}{m^a}, & W_{a,b,c,\dots}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m^{-1}}{m^a} S_{b,c,\dots}(m). \end{aligned} \quad (12)$$

Члены, пропорциональные $V_{a,\dots}$ и $W_{a,\dots}$, могут возникать только в случае $2m$ -разрезов. Появление этих членов обусловлено произведением рядов (8) с различными коэффициентами $C_n = 1$ и $C_n = \hat{C}_n$.

В качестве примера рассмотрим двухпетлевые двухточечные диаграммы I_1 и I_{12} , показанные на рис. 2 и изученные в работе [27]:

$$I_1 = \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(-x) - \frac{2}{n} \ln(-x) + \zeta(2) + 2S_2 - 2\frac{S_1}{n} + \frac{3}{n^2} \right\}, \quad (13)$$

$$I_{12} = \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n^2} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(-2 \ln(-x) - 3W_1 + \frac{2}{n} \right) \right\}. \quad (14)$$

Из уравнения (13) видно, что соответствующие функции $F_{N,k}(n)$ имеют вид

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{2-N}}, \quad N \geq 2, \quad (15)$$

если ввести сложность сумм $(\Phi = (S, V, W))$ как

$$\Phi_{\pm a} \sim \Phi_{\pm a_1, \pm a_2} \sim \Phi_{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_m} \sim \zeta_a \sim \frac{1}{n^a}, \quad \sum_{i=1}^m a_i = a. \quad (16)$$

В формуле (14)

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{1-N}}, \quad N \geq 1, \quad (17)$$

поскольку множитель $1/n^2$ теперь выделен. Тогда, как видно из (13), (14), функции $F_{N,k}(n)$ должны иметь вид

$$\frac{1}{n^c} F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{3-N}}, \quad N \geq 2, \quad (18)$$

а число $3 - N$ определяет уровень трансцендентности (или сложности) коэффициентов $F_{N,k}(n)$. Это свойство сильно уменьшает число возможных элементов в $F_{N,k}(n)$. Уровень трансцендентности уменьшается, если рассмотреть сингулярные части диаграмм и/или коэффициентов перед ζ -функциями и степенями логарифмов. Таким образом, найдя эти части, мы можем предсказывать остальное, используя анзац, основанный на уже полученных результатах, но содержащий элементы с более высоким уровнем трансцендентности.

Другие интегралы типа I , полученные в работе [27], имеют аналогичный вид. Они были точно вычислены с помощью метода дифференциальных уравнений [22], [23].

Теперь рассмотрим двухпетлевые трехточечные диаграммы P_5 и P_{12} , показанные на рис. 3 и вычисленные в работе [27]:

$$\begin{aligned}
 P_5 &= \frac{\hat{N}}{(q^2)^2} \sum_{n=1} \frac{(-x)^n}{n} \left\{ -6\zeta_3 + 2S_1\zeta_2 + 6S_3 - 2S_1S_2 + 4\frac{S_2}{n} - \frac{S_1^2}{n} + 2\frac{S_1}{n^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-4S_2 + S_1^2 - 2\frac{S_1}{n} \right) \ln(-x) + S_1 \ln^2(-x) \right\}, \\
 P_{12} &= \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left\{ \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \left(S_1 - 3W_1 + \frac{1}{n} - \ln(-x) \right) + 12W_2 - 18W_{1,1} - \right. \\
 &\quad \left. - 13S_2 + S_1^2 - 6S_1W_1 + 2\frac{S_1}{n} + \frac{2}{n^2} - 2 \left(S_1 + \frac{1}{n} \right) \ln(-x) + \ln^2(-x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь коэффициенты $F_{N,k}(n)$ имеют вид

$$\frac{1}{n^c} F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{4-N}}, \quad N \geq 3. \tag{20}$$

Диаграмма P_5 (а также диаграммы P_1 , P_3 и P_6 из работы [27]) была точно вычислена с помощью метода дифференциальных уравнений [22], [23]. Чтобы получить результаты для диаграмм P_{12} (а также для всех остальных диаграмм из работы [27]), мы воспользовались тем, что нам известны n членов из разложения (8) по обратной массе (обычно меньше, чем $n = 100$), а также следующими аргументами.

1. Коэффициенты должны иметь структуру типа (20) с учетом правила (16). Условие (20) сильно уменьшает число возможных гармонических сумм. Оно должно быть связано с конкретным видом дифференциальных уравнений для рассматриваемых мастер-интегралов типа

$$\left(\bar{k}\varepsilon + m^2 \frac{d}{dm^2} \right) \text{FI} = \text{менее сложные диаграммы}$$

с некоторыми значениями $\bar{k}$. Заметим, что для многих других мастер-интегралов (например, для диаграмм типа “заходящее солнце” с двумя массивными линиями из работы [22], [25], [24]) свойство (20) нарушается: коэффициенты $F_{N,k}(n)$ содержат суммы разного уровня сложности⁴⁾.

2. Если двухпетлевая двухточечная диаграмма с “аналогичной топологией” (например, I_{12} для P_{12}) уже вычислена, то нам нужно рассмотреть аналогичный набор базисных элементов для соответствующих $F_{N,k}(n)$ двухпетлевых трехточечных диаграмм, но с более высоким уровнем сложности.

3. Пусть рассматриваемая диаграмма содержит особенности и/или степени логарифмов. Поскольку перед главной особенностью или старшей степенью логарифма, или ζ -функцией с самым большим значением аргумента стоят очень простые коэффициенты, их часто можно предсказать непосредственно из первых нескольких членов разложения. Более того, часто можно вычислить сингулярную часть, используя

⁴⁾ Действительно, в работах [22], [25] используются полилогарифмы Нильсона, сумма индексов которых непосредственно связана с уровнем трансцендентности $(4 - N)$. Представление рядов (13), (14) и (19), содержащих $S_{\pm a, \dots}$, через полилогарифмы можно найти в работе [27] для m -разрезов и в работе [28] для $2m$ -разрезов.

другой метод (в работе [27] вычислена часть $\sim W_1(n)$). В этом случае нужно разложить сингулярные части, найти базисные элементы и попытаться использовать их (с соответствующим увеличением уровня сложности) для предсказания регулярной части диаграммы. Если нужно найти ε -подавленные члены, следует повысить уровень сложности для соответствующих базисных элементов.

Далее, используя анзац для $F_{N,k}(n)$ и несколько членов (обычно менее 100) в выражении (8), которые можно вычислить точно, получаем систему алгебраических уравнений для параметров анзаца. Решая систему, мы получаем аналитические результаты для фейнмановских интегралов без точных вычислений. Чтобы проверить результаты, требуется только вычислить еще несколько членов в приведенном выше разложении по обратной массе (8) и сравнить их с предсказаниями нашего анзаца с данными фиксированными коэффициентами.

Таким образом, приведенные аргументы позволяют получать результаты для многих сложных двухпетлевых трехточечных диаграмм без прямых вычислений. Варианты этой процедуры успешно использовались для вычисления фейнмановских диаграмм для многих процессов (см. [26], [27], [24], [29]).

Заметим, что свойства, аналогичные (18) и (20), недавно были получены в работе [7] в так называемом пределе двойного операторного разложения для некоторых четырехточечных диаграмм. Эти диаграммы, содержащие квантовые поправки к четырехточечному коррелятору, были рассмотрены в работе [7] с точностью до трехпетлевого уровня.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлена универсальная аномальная размерность $\gamma_{\text{uni}}(j)$ для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории в приближении ССП. Все результаты были получены с использованием принципа трансцендентности. Для трех первых порядков универсальная аномальная размерность была получена с помощью соответствующих КХД-вычислений. Результаты для четырех и пяти петель были получены из асимптотических уравнений Бете на больших расстояниях с учетом некоторых дополнительных членов – так называемых *обертывающих поправок*, следующие из подхода Люшера.

Мы рассмотрели также называемые мастер-интегралы, подчиняющиеся аналогичному принципу трансцендентности (16). Его применение позволяет получать результаты для большинства мастер-интегралов без прямых вычислений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-01259_a). Автор выражает свою благодарность Организационному комитету IV Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT – 2012) за приглашение.

Список литературы

- [1] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61, arXiv: hep-ph/0208220; “DGLAP and BFKL equations in the $N = 4$ supersymmetric gauge theory”, *Proceedings of the XXXV Winter School* (Repino, St. Petersburg, February 2001), 203–209, arXiv: hep-ph/0112346.

- [2] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **23**:3 (1976), 642–656; Э. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **71**:3 (1976), 840–855; **72**:2 (1977), 377–389; V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **60**:1 (1975), 50–52; Я. Я. Балицкий, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **28** (1978), 1597–1611; *Письма в ЖЭТФ*, **30**:6 (1979), 383–386.
- [3] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **429**:1–2 (1998), 127–134, arXiv: hep-ph/9802290; G. Camici, M. Ciafaloni, *Phys. Lett. B*, **430**:3–4 (1998), 349–354, arXiv: hep-ph/9803389.
- [4] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, *Nucl. Phys. B*, **121**:1 (1977), 77–92; F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, *Nucl. Phys. B*, **122**:2 (1977), 253–290.
- [5] B. Eden, P. Heslop, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **862**:1 (2012), 193–231, arXiv: 1108.3557; L. J. Dixon, *J. Phys. A*, **44**:45 (2011), 454001, 24 pp.; L. J. Dixon, J. M. Drummond, J. M. Henn, *JHEP*, **01** (2012), 024, 49 pp.; T. Gehrmann, J. M. Henn, T. Huber, *JHEP*, **03** (2012), 101, 35 pp., arXiv: 1112.4524; A. Brandhuber, G. Travaglini, G. Yang, *JHEP*, **05** (2012), 082, 33 pp., arXiv: 1201.4170; J. M. Henn, S. Moch, S. G. Naculich, *JHEP*, **12** (2011), 024, 29 pp.
- [6] O. Schlotterer, S. Stieberger, *Motivic multiple zeta values and superstring amplitudes*, arXiv: 1205.1516; S. Stieberger, T. R. Taylor, *Phys. Lett. B*, **716**:1 (2012), 236–239, arXiv: 1204.3848.
- [7] B. Eden, *Three-loop universal structure constants in $N = 4$ susy Yang–Mills theory*, arXiv: 1207.3112.
- [8] D. J. Broadhurst, *Z. Phys. C*, **47**:1 (1990), 115–124.
- [9] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15**:4 (1972), 781–807; **15**:6, 1218–1236; Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **20** (1975), 181; G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126**:2 (1977), 298–318; Ю. Л. Докшицер, *ЖЭТФ*, **73** (1977), 1216–1240.
- [10] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **582**:1–3 (2000), 19–43, arXiv: hep-ph/0004008.
- [11] L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **99**:1–3 (2001), 175–179.
- [12] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **84**:2 (1979), 193–196.
- [13] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, *Nucl. Phys. B*, **688**:1–2 (2004), 101–134.
- [14] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **557**:1–2 (2003), 114–120, arXiv: hep-ph/0301021.
- [15] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529.
- [16] D. I. Kazakov, A. V. Kotikov, *Nucl. Phys. B*, **307**:4 (1988), 721–762; Erratum, **345**:1 (1990), 299–300; *Phys. Lett. B*, **291** (1992), 171; A. V. Kotikov, *Phys. At. Nucl.*, **57** (1994), 133; A. V. Kotikov, V. N. Velizhanin, *Analytic continuation of the Mellin moments of deep inelastic structure functions*, arXiv: hep-ph/0501274.
- [17] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, V. N. Velizhanin, *J. Stat. Mech.*, **10** (2007), P10003, 19 pp.; Z. Bajnok, R. A. Janik, T. Lukowski, *Nucl. Phys. B*, **816**:3 (2009), 376–398, arXiv: 0811.4448.
- [18] A. V. Kotikov, A. Rej, S. Zieme, *Nucl. Phys. B*, **813**:3 (2009), 460–483, arXiv: 0810.0691; M. Beccaria, A. V. Belitsky, A. V. Kotikov, S. Zieme, *Nucl. Phys. B*, **827**:3 (2010), 565–606, arXiv: 0908.0520.
- [19] T. Lukowski, A. Rej, V. N. Velizhanin, *Nucl. Phys. B*, **831**:1–2 (2010), 105–132.
- [20] M. Staudacher, *JHEP*, **05** (2005), 054, 35 pp., arXiv: hep-th/0412188; N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **727**:1–2 (2005), 1–62.
- [21] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204; F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B*, **100**:1 (1981), 65–68; А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [22] A. V. Kotikov, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:8 (1991), 677–692.
- [23] A. V. Kotikov, *Phys. Lett. B*, **254**:1–2 (1991), 158–164; **259**:3 (1991), 314–322; **267**:1 (1991), 123–127; E. Remiddi, *Nuovo Cim. A*, **110**:12 (1997), 1435–1452, arXiv: hep-th/9711188.

- [24] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. Onishchenko, O. Veretin, *Nucl. Phys. B*, **738**:1–2 (2006), 306–316, arXiv: hep-ph/0510235; B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, *Phys. Lett. B*, **638**:5–6 (2006), 531–537, arXiv: hep-ph/0508238; **712**:3 (2012), 233–234, arXiv: 1202.2242.
- [25] J. Fleischer, M. Yu. Kalmykov, A. V. Kotikov, *Phys. Lett. B*, **462**:1–2 (1999), 169–177.
- [26] J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, *Phys. Lett. B*, **417**:1–2 (1998), 163–172.
- [27] J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, *Nucl. Phys. B*, **547**:1–2 (1999), 343–374, arXiv: hep-ph/9808242; *Acta Phys. Polon. B*, **29**:10 (1998), 2611–2625, arXiv: hep-ph/9808243.
- [28] A. I. Davydychev, M. Y. Kalmykov, *Nucl. Phys. B*, **699**:1–2 (2004), 3–64.
- [29] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko, O. L. Veretin, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:4 (2006), 042001, 4 pp., arXiv: hep-ph/0607202; B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, Z. V. Merebashvili, O. L. Veretin, *Phys. Rev. D*, **79**:11 (2009), 114032, 9 pp., arXiv: 0905.1649; B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:19 (2008), 193401, 4 pp., arXiv: 0806.4927; *Phys. Rev. A*, **80**:5 (2009), 052501, 11 pp., arXiv: 0909.1431; A. Kotikov, J. H. Kühn, O. Veretin, *Nucl. Phys. B*, **788**:1–2 (2008), 47–62.