Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, О функциях распределения Вигнера для релятивистского линейного осциллятора, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 410–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:31:05

© 1998 г. Н. М. Атакишиев*, Ш. М. Нагиев†, К. Б. Вольф*

О ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Построено представление Вигнера для релятивистской модели линейного гармонического осциллятора, описываемой конечно-разностным уравнением. Найдены функции Вигнера для стационарных состояний, состояний термодинамического равновесия и когерентных состояний. Рассмотрены их нерелятивистские пределы и высоко- и низкотемпературные пределы для равновесных состояний. Вычислены средние значения координаты и импульса для этих функций Вигнера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Дирака с кулоновским потенциалом естественно сочетает в себе квантовую механику и теорию относительности. Можно было бы ожидать, что гармонический осциллятор, обладающий замечательными свойствами симметрии, даст другой пример потенциала, допускающего релятивистское описание. Однако пока подобная надежда не вполне оправдывается отчасти потому, что соответствующая система реализуется в природе неоднозначно, а также из-за существования нескольких математически корректных формулировок, правильность предсказаний которых должна получить свое экспериментальное подтверждение. К числу последних относятся дираковский осциллятор Мошинского [1], схема группового квантования Алдаи [2] и неканоническая схема Кима [3].

Квазипотенциальный подход Логунова–Тавхелидзе [4] и Кадышевского [5] явился основой для построения релятивистской модели гармонического осциллятора. Эта модель формулируется в релятивистском трехмерном конфигурационном пространстве, волновая функция относительного движения в котором хотя и удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению, но многими своими свойствами напоминает шредингеровскую волновую функцию нерелятивистской квантовой механики [6]. Данная модель изучалась различными авторами [7]. В этой работе мы хотим обсудить возможность применения к ее исследованию квантовой функции распределения Вигнера. Во введении приведены основные понятия, используемые в дальнейшем.

*Институт математики, УНАМ, Мексика

†Институт физики Академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан

1.1. Функция распределения Вигнера. Функция распределения Вигнера $W(\psi|p, q; t)$ волновой функции ψ и функция распределения Вигнера $W(\rho|p, q; t)$ матрицы плотности ρ [8–10] широко используются в нерелятивистской квантовой механике [11–15]. Они зависят от импульса p , координаты q и в общем случае от времени t . Функция Вигнера является квантовым аналогом классической статистической функции распределения $\rho(p, q)$ в фазовом пространстве, как это следует из предельного соотношения $\lim_{\hbar \rightarrow 0} W(p, q, t) = \rho(p, q)$. Поэтому вигнеровское представление квантовой механики можно использовать для вычисления квантовых поправок к результатам, полученным в рамках классического описания [8]. Функция Вигнера является функционалом волновой функции системы в координатном $\psi(q)$ или импульсном $\tilde{\psi}(p)$ представлениях:

$$W(\psi|p, q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(q - \frac{1}{2}q', t\right) e^{-ipq'/\hbar} \psi\left(q + \frac{1}{2}q', t\right) dq', \quad (1)$$

$$W(\psi|p, q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*\left(p - \frac{1}{2}p', t\right) e^{ixp'/\hbar} \tilde{\psi}\left(p + \frac{1}{2}p', t\right) dp'. \quad (2)$$

Функция Вигнера вещественна, но строго положительна лишь для гауссовых волновых функций. Поэтому ее нельзя интерпретировать как классическую функцию распределения в фазовом пространстве. Однако она обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\psi|p, q, t) dp = W(\psi|q, t) = |\psi(q, t)|^2 \geq 0, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\psi|p, q, t) dq = W(\tilde{\psi}|p, t) = |\tilde{\psi}(p, t)|^2 \geq 0. \quad (4)$$

Из (3)–(4) следует, что проекции $W(\psi|q, t)$ и $W(\tilde{\psi}|p, t)$ функции Вигнера могут рассматриваться как функции распределения соответственно для координаты и импульса. В том случае, когда волновые функции нормированы на единицу, имеет место условие $\int_{-\infty}^{\infty} W(\psi|p, q, t) dp dq = 1$.

1.2. Классические функции и символы Вейля. Соответствие между s -числовой функцией $f(p, q)$ и его вейль-упорядоченным оператором $\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$, где операторы импульса $\hat{p}$ и координаты $\hat{q}$ удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, задается соотношением

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{p}, \hat{q}) &= f(-i\partial_\lambda, -i\partial_\mu) e^{i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})} |_{\lambda=\mu=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(p', q') e^{-i(\lambda p' + \mu q')} e^{i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})} d\lambda d\mu dp' dq'. \end{aligned} \quad (5)$$

Оператор $f(-i\partial_\lambda, -i\partial_\mu)$ однозначно определен, поскольку операторы $\partial_\lambda = \partial/\partial\lambda$ и $\partial_\mu = \partial/\partial\mu$ коммутируют.

Обратное к (5) соотношение имеет вид

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipq'/\hbar} \left\langle q - \frac{1}{2}q' \left| \hat{f}(\hat{p}, \hat{q}) \right| q + \frac{1}{2}q' \right\rangle dq', \quad (6)$$

где $|q\rangle$ – собственное состояние оператора $\hat{q}$, $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$, с собственным значением $q \in \mathbb{R}$, причем выполняются соотношения ортогональности $\langle q'|q''\rangle = \delta(q' - q'')$ и полноты $\int |q\rangle dq \langle q| = \hat{I}$, $\hat{I}$ – единичный оператор. В импульсном представлении такими же свойствами обладают собственные состояния оператора импульса $\hat{p}$. Оба эти представления связаны преобразованием Фурье с ядром

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(ipq/\hbar). \quad (7)$$

1.3. Средние значения и амплитуды перехода. Если система находится в состоянии $\psi(q)$, то функция Вигнера позволяет вычислить квантовое среднее физической величины $\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$ по формуле

$$\bar{f}_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(p, q) W(\psi|p, q) dp dq, \quad (8)$$

где $f(p, q)$ – вейлевский символ оператора $\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$. Средние значения в вигнеровском представлении совпадают в таком случае со средними значениями, вычисленными с помощью волновых функций системы, поскольку из определения (1) и соотношения $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ следует, что

$$\begin{aligned} \bar{f}_\psi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p, q) W(\psi|p, q) dp dq = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi|q_-\rangle dq_- \langle q_-|\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})|q_+\rangle dq_+ \langle q_+|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{f}_\psi = \langle \psi|\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})|\psi\rangle, \quad q_\pm = q \pm \frac{1}{2}q'. \quad (10)$$

В частности, по функции распределения Вигнера для стационарных состояний $\{\psi_n\}$ системы можно определить ее спектр энергии

$$\bar{E}_{\psi_n} = \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) W(\psi_n|p, q) dp dq = \langle \psi_n|\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n. \quad (11)$$

Амплитуда перехода из начального состояния $|\psi_i\rangle$ в конечное состояние $|\psi_f\rangle$ выражается через функции Вигнера $W(\psi_i|p, q)$ и $W(\psi_f|p, q)$ следующим образом:

$$|\langle \psi_i|\psi_f\rangle|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} W(\psi_i|p, q) W(\psi_f|p, q) dp dq. \quad (12)$$

Явный вид функции Вигнера для ряда нерелятивистских квантово-механических систем получен в работах [12–14, 16, 17]. В частности, в [12] показано, что функция распределения $W(\psi_n|p, q)$ для стационарных состояний нерелятивистского линейного осциллятора имеет вид

$$W(\psi_n|p, q) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-(r^2+s^2)} L_n(2r^2 + 2s^2), \quad (13)$$

где $r = p/\sqrt{m\hbar\omega}$ и $s = q\sqrt{m\omega/\hbar}$ – безразмерные переменные, а $L_n(x)$ – полиномы Лагерра.

1.4. Термодинамическое равновесие. Равновесная функция распределения Вигнера системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при температуре T [12, 13], есть

$$W_w(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n W(\psi_n | p, q), \quad (14)$$

где $w = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ – коэффициенты термодинамического равновесия. Распределение Гиббса соответствует коэффициентам

$$w_n = e^{-\beta E_n} / Z(\beta), \quad \beta = 1/kT, \quad (15)$$

где $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ – уровни энергии нерелятивистского линейного осциллятора с частотой ω , k – постоянная Больцмана, T – температура, а функция распределения Гиббса $Z(\beta)$ имеет вид

$$Z(\beta) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\beta\hbar\omega/2)}. \quad (16)$$

В этом случае ряд (14) можно просуммировать [12, 13] и получить для функции Вигнера выражение

$$W(p, q) = \frac{\operatorname{th}(\beta\hbar\omega/2)}{\pi\hbar} \exp[-(r^2 + s^2) \operatorname{th}(\beta\hbar\omega/2)]. \quad (17)$$

В пределе высоких температур $\beta\hbar\omega \ll 1$ функция (17) совпадает с классической функцией распределения для линейного гармонического осциллятора

$$\rho(p, q) = \frac{\beta\omega}{2\pi} \exp[-\beta(p^2/2m + m\omega^2 q^2/2)]. \quad (18)$$

В пределе низких температур $\beta\hbar\omega \gg 1$ (17) сводится к соотношению (13), в котором следует положить $n = 0$.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В релятивистском конфигурационном пространстве [6] обсуждаемая модель описывается конечно-разностным гамильтонианом [7]

$$\hat{H}(q) = mc^2 \operatorname{ch} i\partial_x + \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2} x(x + i) e^{i\partial_x}, \quad (19)$$

где $x = q/\lambda$ – безразмерная переменная, $\lambda = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны частицы с массой m , c – скорость света и $\exp(a\partial_x)f(x) = f(x + a)$ – конечно-разностный оператор.

2.1. Волновые функции в координатном представлении. Собственные функции гамильтониана $\hat{H}(q)$ имеют следующий вид [18]:

$$\psi_n(q) = c_n [\nu(\nu - 1)]^{-ix/2} \Gamma(\nu + ix) P_n^\nu\left(x; \frac{1}{2}\pi\right), \quad (20)$$

Рис. 1

где

$$c_n = 2^\nu \sqrt{n! / 2\pi\lambda\Gamma(n+2\nu)}, \quad \nu = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4(mc^2/\hbar\omega)^2} \right], \quad (21)$$

а $P_n^\nu(x; \varphi)$ – полиномы Мейкснера–Поллачека. Константа нормировки в (21) выбрана так, что выполняется условие ортонормированности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(q) \psi_k(q) dq = \delta_{n,k}. \quad (22)$$

Уровни энергии для модели (19) имеют вид

$$E_n^{\text{rel}} = \hbar\omega(n + \nu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

На рис. 1 изображено основное состояние $\psi_0(q)$ для $m = \omega = \hbar = 1$ и следующих значений параметра s : ∞ (нерелятивистский случай), 4, 2, 1, 0.5 и 0.25. Действительные части волновой функции показаны сплошной линией, мнимые – штриховой. Заметим, что за исключением нерелятивистского случая все волновые функции комплексны и имеют бесконечное число нулей.

2.2. Импульсные волновые функции и быстрота. Канонически-сопряженным к координате является импульс, принадлежащий одномерному пространству Лобачевского, реализованному в виде положительной ветви гиперболы $p_0^2 - p^2 = m^2 c^2$, $p_0 > 0$, в плоскости (p_0, p) .

Преобразование, связывающее координатные и импульсные волновые функции, задается соотношением [6, 7]

$$\tilde{\psi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^*(p, q) \psi_n(q) dq, \quad (24)$$

где

$$\xi(p, q) = \left(\frac{p_0 + p}{mc} \right)^{ix} = e^{ix\chi} = e^{iq\chi/\lambda} \quad (25)$$

есть релятивистская плоская волна [19], заменяющая $e^{ipq/\hbar}$ в ядре (7) для нерелятивистского случая, а

$$\chi = \ln \left(\frac{p_0 + p}{mc} \right) \quad (26)$$

является *быстротой*. В последующем в качестве безразмерного аргумента ряда функций часто будет использоваться зависящая от импульса комбинация

$$\zeta = \frac{c}{\hbar\omega} (p_0 + p) = \frac{mc^2}{\hbar\omega} e^\chi. \quad (27)$$

Отметим, что $mc^2/\hbar\omega$ есть отношение энергии покоя частицы к разности между уровнями энергии (23) осциллятора.

Быстрота χ , определенная в (26), канонически-сопряжена в смысле преобразования Фурье безразмерной координате x в (25). Это обстоятельство приводит к ее операторной реализации

$$\hat{\chi} = i \frac{d}{dx} = i\lambda \frac{d}{dq} \quad (28)$$

и соотношениям неопределенности $\Delta q \Delta \chi = \lambda \Delta x \Delta \chi \geq \lambda/2$. В нерелятивистском пределе $mc\chi \rightarrow p$.

Импульсные волновые функции $\tilde{\psi}_n(p)$ выражаются как функции переменной ζ через обобщенные полиномы Лагерра

$$\tilde{\psi}_n(p) = i^n c_n \frac{\sqrt{2\pi\hbar}}{mc} \zeta^\nu e^{-\zeta} L_n^{2\nu-1}(2\zeta) \quad (29)$$

с константами нормировки c_n , определенными в (21). Импульсные волновые функции удовлетворяют соотношению ортонормированности на гиперболе, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_n^*(p) \tilde{\psi}_k(p) d\Omega(p) = \delta_{n,k}, \quad d\Omega(p) = mc \frac{dp}{p_0} = mc d\chi. \quad (30)$$

Напомним, что $d\Omega(p)$ является инвариантным элементом объема в одномерном пространстве Лобачевского.

2.3. Релятивистские когерентные состояния. Как и в нерелятивистском случае, динамической группой симметрии релятивистской модели осциллятора (19) является группа $SU(1, 1)$. Гамильтониан (19), а также повышающий и понижающий его собственные значения операторы действуют в неприводимом представлении с индексом Баргмана ν , определенном соотношением (21). Это представление принадлежит ограниченной снизу дискретной серии.

Обобщенные когерентные состояния [20] для модели (19) были построены в [18] путем действия на основное состояние осциллятора $\psi_0(q)$ или $\tilde{\psi}_0(p)$ оператором $(1 - |\alpha|^2)^\nu \exp(i\alpha K_+)$, где α – некоторое комплексное число, принадлежащее открытому единичному кругу, $|\alpha| < 1$. В импульсном и координатном представлениях эти состояния имеют вид

$$\Upsilon_\alpha(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\Gamma(2\nu)}} \left[\frac{2(1 - |\alpha|^2)}{1 + \alpha^2} \right]^\nu \left[\frac{\hbar\omega(1 - i\alpha)}{mc^2(1 + i\alpha)} \right]^{ix} \Gamma(\nu + ix), \quad (31)$$

$$\tilde{\Upsilon}_\alpha(p) = \frac{1}{\sqrt{mc\Gamma(2\nu)}} \left[\frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - i\alpha)^2} \right]^\nu (2\zeta)^\nu \exp\left(-\zeta \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}\right). \quad (32)$$

Временная эволюция некоторого состояния определяется оператором $\exp(it\hat{H})$, что приводит к вращению комплексного α -круга на угол ωt , т.е.

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp(-i\omega t). \quad (33)$$

2.4. Нерелятивистский предел. Из предельных соотношений [21,22]

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-n/2} P_n^\nu(\sqrt{\nu}x; \arccos y/\sqrt{\nu}) = \frac{1}{n!} H_n(x + y), \quad (34)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-n/2} L_n^{2\nu-1}(2\nu + 2\sqrt{\nu}x) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x) \quad (35)$$

видно, что в нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$ волновые функции (20) и (29) совпадают с хорошо известными волновыми функциями линейного гармонического осциллятора соответственно в координатном и импульсном представлениях.

Помимо этого, генераторы группы $SU(1, 1)$, на которой базируются когерентные состояния (31) и (32), в пределе $c \rightarrow \infty$ сводятся к генераторам динамической группы $SU(1, 1)$ нерелятивистского осциллятора, так что релятивистские когерентные состояния совпадают в этом пределе с нерелятивистскими.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА

Релятивистские координата и импульс теперь естественным образом могут быть включены в формализм функции Вигнера в соответствии со структурой этой функции (1)–(2).

3.1. Релятивистская функция Вигнера. Функция Вигнера (1) для релятивистских волновых функций $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(p)$, $\phi(\chi) = \tilde{\psi}(p)$ имеет соответственно вид

$$W^{\text{rel}}(\psi|p, q) = \frac{\lambda}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(x - \frac{1}{2}x' \right) e^{-i\chi x'} \psi \left(x + \frac{1}{2}x' \right) dx', \quad (36)$$

$$W^{\text{rel}}(\psi|p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^* \left(p - \frac{1}{2}p' \right) \xi(p', q) \tilde{\psi} \left(p + \frac{1}{2}p' \right) d\Omega(p'), \quad (37)$$

$$W^{\text{rel}}(\psi|p, q) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \left(\chi - \frac{1}{2}\chi' \right) e^{i\chi'x} \phi \left(\chi + \frac{1}{2}\chi' \right) d\chi'. \quad (38)$$

Поскольку каждый элемент в (36)–(38) обладает определенным нерелятивистским пределом, то очевидно, что при $c \rightarrow \infty$ функция $W^{\text{rel}}(\psi|p, q)$ совпадает с нерелятивистской функцией Вигнера $W(\psi|p, q)$.

Проекции релятивистской функции Вигнера неотрицательны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{\text{rel}}(\psi|p, q) d\Omega(p) = W^{\text{rel}}(\psi|q) = |\psi(q)|^2 \geq 0, \quad (39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{\text{rel}}(\psi|p, q) dq = W^{\text{rel}}(\tilde{\psi}|p) = |\tilde{\psi}(p)|^2 \geq 0. \quad (40)$$

Нормировка выбрана так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{\text{rel}}(\psi|p, q) d\Omega(p) dq = 1. \quad (41)$$

3.2. Функция Вигнера для стационарных состояний. Учтя соотношение (24) и пользуясь интегральным представлением [23] для функции Макдональда

$$K_{\mu}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z \operatorname{ch} y + \mu y) dy, \quad (42)$$

мы получим из (37) для функции Вигнера основного состояния $\psi_0(q)$ осциллятора (19) выражение

$$W^{\text{rel}}(\psi_0|p, q) = \frac{2(2\zeta)^{2\nu}}{\pi\hbar\Gamma(2\nu)} K_{2ix}(2\zeta). \quad (43)$$

На рис. 2 приведены графики этой функции в фазовом пространстве (p, q) для тех же значений скорости света, что и на рис. 1. Отметим, что график функции Вигнера оказывается более полезным, чем графики для соответствующих волновых функций на рис. 1, поскольку он явно отражает *сжатие* гауссова пика при уменьшении значения c до единицы; затем пик исчезает.

Для возбужденных состояний подобным же образом получается, что

$$\begin{aligned} W^{\text{rel}}(\psi_n|p, q) &= \frac{n!}{(2\nu)_n} L_n^{2\nu-1}(2\zeta e^{\frac{i}{2}\partial_x}) L_n^{2\nu-1}(2\zeta e^{-\frac{i}{2}\partial_x}) W^{\text{rel}}(\psi_0|p, q) = \\ &= \frac{2n!(2\zeta)^{2\nu}}{\pi\hbar\Gamma(2\nu+n)} \sum_{j,k=0}^n \binom{n+2\nu-1}{n-k} \binom{n+2\nu-1}{n-j} \times \\ &\times \frac{(-2\zeta)^{k+j}}{k!j!} K_{2ix+j-k}(2\zeta). \end{aligned} \quad (44)$$

Рис 2.

В (44) $(z)_\nu = \Gamma(z+\nu)/\Gamma(z)$ – символ Похгаммера, $\binom{\alpha}{n} = \Gamma(\alpha+1)/(n!\Gamma(\alpha+1-n))$ – биномиальные коэффициенты, и мы воспользовались явным видом обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^\mu(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\mu}{n-k} z^k. \quad (45)$$

Среднее значение координаты осциллятора в стационарных состояниях может быть вычислено с помощью определения (10), оно равняется нулю. Соответствующее среднее значение импульса (см. приложение) есть

$$\bar{p}_n = \frac{\hbar\omega\nu}{2c} - \frac{m^2 c^3}{(2\nu-1)\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega}{2c} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Таким образом в отличие от нерелятивистского случая среднее значение импульса для стационарных состояний не равно нулю; оно убывает как $1/c$ в нерелятивистском пределе, когда $c \rightarrow \infty$, что очевидно из рис. 2.

3.3. Функция Вигнера для равновесного состояния. Как и в нерелятивистском случае, мы можем определить равновесную релятивистскую функцию распределения Вигнера по формуле (14) с коэффициентами

$$w_n = e^{-\beta E_n^{\text{rel}}} / Z^{\text{rel}}(\beta), \quad \beta = 1/kT, \quad (47)$$

где E_n^{rel} – уровни энергии осциллятора (23), а функция распределения имеет вид [18]

$$Z^{\text{rel}}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n^{\text{rel}}} = \frac{e^{-\beta \nu \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}. \quad (48)$$

Воспользовавшись билинейной производящей функцией для полиномов Лагерра [23]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^n}{\Gamma(n + \mu + 1)} L_n^{\mu}(x) L_n^{\mu}(y) = \frac{(xyz)^{-\mu/2}}{1 - z} I_{\mu} \left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1 - z} \right) \exp \left(-\frac{z(x + y)}{1 - z} \right) \quad (49)$$

и изменив порядок интегрирования и суммирования, мы можем записать равновесную релятивистскую функцию распределения Вигнера (14) как

$$\begin{aligned} W_w^{\text{rel}}(p, q) &= \frac{1}{Z^{\text{rel}}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n^{\text{rel}}} W^{\text{rel}}(\psi_n | p, q) = \\ &= \frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}{\pi \hbar} (2\zeta)^{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\zeta \text{ch } y + 2ixy} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^{-n\beta \hbar \omega}}{\Gamma(n + 2\nu)} L_n^{2\nu-1}(2\zeta e^y) L_n^{2\nu-1}(2\zeta e^{-y}) = \\ &= \frac{4\zeta}{\pi \hbar} \exp \left(\beta \hbar \omega \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \right) I_{2\nu-1} \left(\frac{2\zeta}{\text{sh}(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega)} \right) \times \\ &\quad \times K_{2ix} \left(2\zeta \text{cth} \left(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega \right) \right). \end{aligned} \quad (50)$$

В пределе высоких температур $\beta \hbar \omega \ll 1$ получается классическая функция распределения

$$\rho^{\text{rel}}(p, q) = \frac{\beta \omega}{2\pi} \exp \left(\frac{\beta c}{2} \left[2mc - (p_0 + p) - \frac{m^2(c^2 + \omega^2 q^2)}{p_0 + p} \right] \right), \quad (51)$$

которая, в свою очередь, совпадает с функцией (18) при $c \rightarrow \infty$. Соотношение (51) следует из асимптотического поведения $I_{\nu}(z)$ при больших значениях ν (см. [23, формула 7.13 (8)]). В пределе низких температур $\beta \hbar \omega \gg 1$ релятивистская функция Вигнера (50) сводится к функции Вигнера для основного состояния (43), поскольку модифицированная функция Бесселя ведет себя как $I_{\nu}(z) \sim (z/2)^{\nu} / \Gamma(\nu + 1)$ при $z \rightarrow 0$.

В нерелятивистском пределе $\lim_{c \rightarrow \infty} e^{\beta m c^2} Z^{\text{rel}}(\beta) = Z(\beta)$ и $\lim_{c \rightarrow \infty} W_w^{\text{rel}}(p, q) = W(p, q)$ (см. пункт 1.4).

Рис. 3

Равновесная функция Вигнера (50) приводит к “импульсной проекции”

$$\begin{aligned} W_w^{\text{rel}}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_w^{\text{rel}}(p, q) dq = \\ &= \frac{2\zeta}{mc} e^{\beta \hbar \omega (\nu - 1/2)} I_{2\nu-1} \left(\frac{2\zeta}{\text{sh}(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega)} \right) e^{-2\zeta \text{cth}(\beta \hbar \omega / 2)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Среднее значение энергии имеет вид

$$\overline{E}_w^{\text{rel}} = \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) W_w^{\text{rel}}(\chi, q) d\Omega(p) dq = \hbar \omega \left(\nu + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z^{\text{rel}}(\beta). \quad (53)$$

Соотношение (53) получено из функции распределения (48). В равновесном состоянии среднее значение импульса $\bar{p}$ записывается в следующей компактной форме:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \frac{\hbar \omega}{4c} \left[\text{cth} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) - 1 \right] = \frac{1}{Z^{\text{rel}}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n e^{-\beta E_n^{\text{rel}}}. \quad (54)$$

3.4. Функция Вигнера для когерентных состояний. С помощью интегрального представления для функции Макдональда [24]

$$\int_0^\infty y^{\mu-1} e^{-ay-b/y} dy = 2(b/a)^{\mu/2} K_\mu(2\sqrt{ab}), \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0, \quad (55)$$

и явного вида когерентных состояний (31)–(32) нетрудно показать, что соответствующая им функция Вигнера записывается как

$$W^{\text{rel}}(\Upsilon_\alpha|p, q) = \frac{2(2\zeta)^{2\nu}}{\pi\hbar\Gamma(2\nu)} e^{2\delta x} \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-i\alpha|^2} \right)^{2\nu} K_{2ix}(2|\gamma|\zeta), \quad (56)$$

где переменные p, q и ζ, x связаны между собой, как и прежде, а

$$\gamma = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} = |\gamma| e^{i\delta}. \quad (57)$$

Осцилляторный цикл соответствует простому вращению в комплексной плоскости α , описываемому уравнением (33). Однако в фазовом пространстве этот цикл не сводится к повороту вокруг начала координат.

На рис. 3 показан релятивистский осцилляторный цикл для $\alpha_{(0)} = 1/2$ и $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$. Мы берем, как и ранее, $m = \omega = \hbar = 1$, а $c = 1$. Глобальный максимум при $t = \pi/2$ равен 0.30791. Ясно, что релятивистская функция Вигнера (56) имеет правильный нерелятивистский предел.

Средние значения координаты и импульса осциллятора, подсчитанные с помощью функции $W^{\text{rel}}(\Upsilon_\alpha|p, q)$, выглядят следующим образом:

$$\bar{q}_\alpha = \int_{-\infty}^\infty q W^{\text{rel}}(\Upsilon_\alpha|p, q) d\Omega(p) dq = \lambda\nu \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-i\alpha|^2 \operatorname{Re} \gamma} \right)^{2\nu} \operatorname{tg} \delta, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha &= \int_{-\infty}^\infty p W^{\text{rel}}(\Upsilon_\alpha|p, q) d\Omega(p) dq = \\ &= \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-i\alpha|^2 \operatorname{Re} \gamma} \right)^{2\nu} \left(\frac{\hbar\omega\nu}{2c \operatorname{Re} \gamma} - \frac{m^2 c^3 \operatorname{Re} \gamma}{\hbar\omega(2\nu-1)} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

В нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$ имеем

$$\bar{x}_\alpha \rightarrow \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha_{\text{non}}, \quad \bar{p}_\alpha \rightarrow \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im} \alpha_{\text{non}}, \quad (60)$$

где $\alpha_{\text{non}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{2\nu} \alpha$.

4. ВЫВОДЫ

В данной статье построено представление Вигнера для основанной на квазипотенциальном подходе релятивистской модели линейного гармонического осциллятора. Несмотря на то что система описывается конечно-разностным уравнением, волновые функции и соответствующая им функция Вигнера непрерывны. Приведенные выше графики наглядно демонстрируют предполагаемое *сжатие* основного состояния и релятивистское движение когерентных состояний. Поскольку модель формулируется в терминах относительной координаты в двухчастичной системе, то предсказание подобного поведения представляется нам удовлетворительным.

Теоретико-групповой основой данной одномерной релятивистской модели осциллятора является группа Ли $SU(1, 1) \sim SO(2, 1)$. Гамильтониан есть один из генераторов группы, спектр которого дискретен и ограничен снизу, а сам он реализуется в виде конечно-разностного оператора в конфигурационном представлении. Изучение подобных разностных операторов актуально также и в связи с рассмотрением проблемы дискретности пространства.

Мы благодарны Гийермо Кротчу за его незаменимую помощь в численных расчетах и компьютерной графике и Месуме Атакишиевой за подготовку рукописи. Работа была поддержана в рамках гранта “Optica Matematica, DGAPA-UNAM IN106595”.

Приложение

П.1. Средние значения релятивистской энергии. В качестве проверки согласованности наших результатов с определением (11) мы вычислим средние значения энергии

$$\overline{E}_n^{\text{rel}} = \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) W^{\text{rel}}(\psi_n | p, q) d\Omega(p) dq \quad (61)$$

для стационарных состояний в релятивистской модели (19) с помощью функции Вигнера (44).

Символ Вейля $H(p, q)$ для гамильтониана (19) вычисляется по формуле (6) и имеет вид

$$H(p, q) = mc^2 \operatorname{ch} \chi + \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) e^{-\chi} = \frac{\hbar\omega}{2\zeta} \left[\zeta^2 + x^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]. \quad (62)$$

Мы учли при этом условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{\text{rel}}(\psi_n | p, q) d\Omega(p) dq = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(q)|^2 dq = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi}_n(p)|^2 d\Omega(p) = 1. \quad (63)$$

Подстановка (44) в (63) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{2n!}{\pi\Gamma(n+2\nu)} \sum_{k,j=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} \binom{n+2\nu-1}{n-k} \binom{n+2\nu-1}{n-j} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} u^{2\nu+k+j-1} K_{2ix+j-k}(u) du = 1. \end{aligned} \quad (64)$$

Интеграл по переменной u в (64) вычисляется по формуле (см. [25])

$$\int_0^\infty u^\mu K_\nu(au) du = 2^{\mu-1} a^{-\mu-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}[\mu + \nu + 1]\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}[\mu - \nu + 1]\right), \quad (65)$$

а для оставшегося интеграла по x можно воспользоваться тем [26], что

$$\int_{-\infty}^\infty \Gamma(\delta - ix) \Gamma(\gamma + ix) dx = 2^{1-\delta-\gamma} \pi \Gamma(\delta + \gamma), \quad \delta > 0, \quad \gamma > 1. \quad (66)$$

В результате приходим к двойной сумме

$$\sum_{j,k=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k! j!} \binom{n+\lambda}{n-k} \binom{n+\lambda}{n-j} \Gamma(\lambda + k + j + 1) = \frac{\Gamma(n + \lambda + 1)}{n!}. \quad (67)$$

Мы можем теперь вычислить $\bar{E}_n^{\text{rel}}$ в (61), подставляя (62) и (44) в (61) и используя опять (65) и (66). Получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{E}_n^{\text{rel}} &= \frac{\hbar\omega n!}{\Gamma(n+2\nu)} \sum_{j,k=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k! j!} \binom{n+2\nu-1}{n-k} \binom{n+2\nu-1}{n-j} \times \\ &\times [\nu \Gamma(2\nu + k + j) + k j \Gamma(2\nu + k + j - 1)]. \end{aligned} \quad (68)$$

Оба слагаемых в правой части (68), содержащих гамма-функции, суммируются по формуле (67). В результате видим, что действительно $\bar{E}_n^{\text{rel}} = \hbar\omega(n + \nu) = E_n^{\text{rel}}$.

П.2. Средние значения координаты и импульса. Можно также вычислить средние значения координаты и импульса для релятивистской модели (19) с помощью как стационарной функции Вигнера (44), так и равновесной функции Вигнера (50). Нетрудно проверить, что, как и в нерелятивистском случае, средние значения координаты равняются нулю для обеих функций Вигнера, т.е.

$$\bar{q}_n = \int_{-\infty}^\infty q W^{\text{rel}}(\psi_n|p, q) d\Omega(p) dq = 0, \quad \bar{q} = \int_{-\infty}^\infty q W_w^{\text{rel}}(p, q) d\Omega(p) dq = 0. \quad (69)$$

Средние значения импульса $p = mc \operatorname{sh} \chi$ для стационарных состояний имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= \int_{-\infty}^\infty p W^{\text{rel}}(\psi_n|p, q) d\Omega(p) dq = \\ &= \frac{n!}{\Gamma(n+2\nu)} \sum_{j,k=0}^n \frac{(-1)^{j+k}}{j! k!} \binom{n+2\nu-1}{n-k} \binom{n+2\nu-1}{n-j} \times \\ &\times \left[\frac{\hbar\omega}{4c} \Gamma(2\nu + k + j + 1) - \frac{m^2 c^3}{\hbar\omega} \Gamma(2\nu + k + j - 1) \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

Чтобы упростить (70), мы можем воспользоваться двойными суммами

$$\sum_{k,j=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} \binom{n+\lambda}{n-k} \binom{n+\lambda}{n-j} \Gamma(\lambda+k+j) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\lambda n!}, \quad (71)$$

$$\sum_{k,j=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} \binom{n+\lambda}{n-k} \binom{n+\lambda}{n-j} \Gamma(\lambda+k+j+2) = \frac{2n+\lambda+1}{n!} \Gamma(n+\lambda+1). \quad (72)$$

Действительно, рассмотрим интеграл [26]

$$R_n(\mu; \lambda) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} L_n^\lambda(x) L_n^\lambda(x) dx, \quad \operatorname{Re} \mu > 0. \quad (73)$$

Используя явный вид (45) полиномов Лагерра $L_n^\lambda(x)$, мы можем переписать (73) как

$$R_n(\mu; \lambda) = \sum_{k,j=0}^n \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} \binom{n+\lambda}{n-k} \binom{n+\lambda}{n-j} \Gamma(\mu+k+j). \quad (74)$$

В частности, левая часть (71) совпадает с интегралом $R_n(\lambda; \lambda)$, который, в свою очередь, есть [26]

$$R_n(\lambda; \lambda) = \Gamma(\lambda+n+1)/(\lambda n!). \quad (75)$$

Подставив теперь (45) для одного из полиномов Лагерра в (73) и почленно проинтегрировав, получаем

$$R_n(\lambda+2; \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\lambda}{n-k} S_n(\lambda+2; \lambda) = \frac{2n+\lambda+1}{n!} \Gamma(n+\lambda+1), \quad (76)$$

где мы пользуемся равенством [26]

$$S_n(\mu; \lambda) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} L_n^\lambda(x) dx = \frac{(\lambda+1-\mu)_n}{n!} \Gamma(\mu), \quad \operatorname{Re} \mu > 0. \quad (77)$$

Таким образом, мы приходим к формуле (72) и, следовательно, к искомому выражению (46) для средних значений $\bar{p}_n$.

Список литературы

- [1] *M. Moshinsky, A. Szczepaniak.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L817; *C. Quesne, M. Moshinsky.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 2263; *M. Moshinsky, G. Loyola, C. Villegas.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 373–381; *M. Moshinsky, G. Loyola.* Found. Phys. 1993. V. 23. P. 197; *A. González, G. Loyola, M. Moshinsky.* Rev. Mex. Fís. 1994. V. 40. P. 12–30; *M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov.* The Harmonic Oscillator in Modern Physics. In: Contemporary Concepts in Physics. V. 9. New York: Harwood Academic, 1996.

- [2] V. Aldaya, J. A. de Azcárraga, J. Bisquert, J. M. Cerveró. J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 707; V. Aldaya, J. Bisquert, J. Navarro-Salas. Phys. Lett. A. 1991. V. 156. P. 381; V. Aldaya, J. Bisquert, R. Loll, J. Navarro-Salas. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3087–3097; V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero, J. Navarro-Salas. J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 5375–5390; V. Aldaya, J. Guerrero. J. Phys. A. 1993. V. 26. P. L1175–L1181.
- [3] D. Han, Y. S. Kim, M. E. Noz. Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 6233–6244; D. Han, Y. S. Kim, M. E. Noz, L. Yeh. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 5493–5508.
- [4] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 380–399.
- [5] V. G. Kadyshevsky. Nucl. Phys. B. 1968. V. 6. P. 125–148.
- [6] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov. Nuovo Cimento. A. 1968. V. 55. P. 233–257.
- [7] А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мур-Касимов. ТМФ. 1971. Т. 8. С. 61–72; Н. М. Атакишиев, Р. М. Мур-Касимов, Ш. М. Нагиев. ТМФ. 1980. Т. 44. С. 47–62; Н. М. Атакишиев. ТМФ. 1984. Т. 58. С. 254–260; Р. М. Мур-Касимов, Ш. М. Нагиев, Е. Д. Каграманов. Препринт ИФ АН АзССР № 214. Баку, 1987.
- [8] E. Wigner. Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759; M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner. Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 121–167; H.-W. Lee. Phys. Rep. 1995. V. 259. P. 147–211.
- [9] J. E. Moyal. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99–124; R. Kubo. J. Phys. Soc. Japan. 1964. V. 19. P. 2127–2139.
- [10] В. И. Татарский. УФН. 1983. Т. 139. № 4. С. 587–619.
- [11] Р. Фейнман. Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
- [12] Ю. Л. Климонтович. ДАН СССР. 1956. Т. 108. С. 1033; Е. П. Богданов, В. Н. Горшенков, В. Л. Коньков. Изв. вузов. Сер. физическая. 1970. Т. 7. С. 94.
- [13] R. W. Davies, K. T. R. Davies. Ann. Phys. 1975. V. 89. P. 261–273.
- [14] E. A. Akhundova, V. V. Dodonov, V. I. Man'ko. Physica. A. 1982. V. 115. P. 215–231.
- [15] H. J. Korsch, M. V. Berry. Physica. D. 1981. V. 56. P. 627–636; Ю. М. Широков. ТМФ. 1977. Т. 31. С. 327–332; J. R. Nix. Nucl. Phys. A. 1969. V. 130. P. 241–292.
- [16] J. G. Krüger, A. Poffyn. Physica. A. 1976. V. 85. P. 84–100; Ф. А. Березин. УФН. 1980. Т. 132. № 3. С. 497.
- [17] И. Б. Левинсон. ЖЭТФ. 1969. V. 57. P. 660–672; Н. А. Денисова, В. Л. Коньков. ТМФ. 1975. V. 22. P. 64–71.
- [18] Н. М. Атакишиев, Р. М. Мур-Касимов. ТМФ. 1986. Т. 67. С. 68–75; N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf. Rep. Math. Phys. (Warsaw). 1990. V. 28. P. 21–27.
- [19] И. С. Шапиро. ДАН СССР. 1956. V. 1. P. 91–93.
- [20] A. M. Perelomov. Generalized Coherent States and Their Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [21] N. M. Atakishiyev, Sh. M. Nagiyev, K. B. Wolf. J. Group Theory Phys. 1995. V. 3. P. 61–70.
- [22] G. Szegő. Orthogonal polynomials. Ed. R. I. Fourth. Providence: American Math. Soc., 1975.
- [23] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions. V. 2. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [24] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
- [25] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИМФЛ, 1963.
- [26] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 21.VII.1997 г.