Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, Многочлены Чебышёва от многих переменных в терминах сингулярных элементов, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 419–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:27:24

© 2013 г.

В. Д. Ляховский*

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕРМИНАХ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Прямое соответствие между антиинвариантными функциями Вейля и многочленами Чебышёва второго рода от многих переменных использовано для упрощения значительного количества операций с многочленами от многих переменных. Результаты иллюстрируются исследованиями многочленов второго рода от двух переменных для корневых систем $A_1 \oplus A_1$, B_2 и G_2 .

Ключевые слова: обобщенные полиномы Чебышёва, полупростые алгебры Ли, теория представлений, группы Вейля.

DOI: 10.4213/tmf8490

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочлены Чебышёва от многих переменных возникают при многомерном моделировании как естественное обобщение классических многочленов. Они образуют полный ортогональный и нормированный базис для $\mathcal{L}^2$ -функций на деформированных треугольниках, тетраэдрах и симплексах высших размерностей. Их применяют в квантовой физике [1], [2] и в численном анализе [3].

В 1974 г. в работах [4] идея сведения характеров A_1 -модулей к ортогональным многочленам Чебышёва была распространена на многочлены от двух переменных путем построения и исследования многочленов, соответствующих наборам A_2 -модулей старшего веса $L_{A_2}^\mu$. Было установлено, что их область определения представляет собой деформированный треугольник, ограниченный так называемой гипоциклоидой Штайнера. Систематическое исследование A_n -многочленов Чебышёва от многих переменных как типа T (“первого рода”), так и типа U (“второго рода”) было проведено в 1991 г. в работе [5], где была построена соответствующая мера для $\mathcal{L}_{A_n}^2$ (см. [5], формулы (5.10) и (5.11)). Полнота и ортогональность набора многочленов Чебышёва (с произвольным числом переменных) были выведены из свойств характеров, соотношений ортогональности Шура и теоремы Петера–Вейля.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakvladimir@yandex.ru

Роль T -многочленов Чебышёва от многих переменных в фурье-анализе, дифференциальных уравнениях в частных производных и теории приближений рассматривалась в работе [6]. Связи между T -многочленами Чебышёва от многих переменных и различными типами функций орбит исследовались в ряде работ (см., например, работу [7] и приведенную там библиографию).

Большинство полезных свойств многочленов Чебышёва возникает из их тесной связи с теорией групп. С учетом этого мы полагаем, что характеры $\text{ch}(L_{\mathfrak{g}}^{\mu})$ неприводимых модулей старшего веса $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ содержат значительную часть информации об исходной симметрии, и многочлены $U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)$, возникающие из специализированных характеров $\text{ch}(L_{\mathfrak{g}}^{\mu;a})$, представляют наибольший интерес.

В работе [8] было найдено простое выражение для меры, реализующей скалярное произведение в $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^2(X)$, что обеспечило ортогональность и нормировку для набора многочленов $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)\}$.

В настоящей работе, используя свойства сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$, мы исследуем многочлены $U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)$ от многих переменных. Показано, что скалярное произведение в $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^2(X)$ имеет эквивалентный аналог в пространстве антиинвариантных функций угловых переменных. Вследствие этого соответствия громоздкие операции в X -пространстве можно заменить эквивалентными и гораздо более простыми вычислениями в x -пространствах угловых переменных.

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Мы будем использовать следующие обозначения: $\Delta_{\mathfrak{g}}$ – система корней для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга $r_{\mathfrak{g}}$; $\Delta_{\mathfrak{g}}^{+}$ – система положительных корней; $W_{\mathfrak{g}}$ – группа Вейля для системы $\Delta_{\mathfrak{g}}$ со знаковой функцией $\epsilon(w) := \det(w) = (-1)^{*}(w)$, где $*(w)$ – длина элемента $w \in W_{\mathfrak{g}}$; $C^{(0)}$ – фундаментальная камера Вейля, а $\overline{C^{(0)}}$ – ее замыкание; α_i – i -й простой корень для $\mathfrak{g}$; $\hat{\alpha}_i$ – i -й простой двойственный корень для $\mathfrak{g}$, $i = 0, \dots, r$; $\theta = \sum_{i=1}^r q_i \hat{\alpha}_i$ – старший корень с комарками q_i ; ω_i – i -й фундаментальный вес для $\mathfrak{g}$; $\rho_{\mathfrak{g}}$ – вектор Вейля; L^{μ} – интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом μ ; $L_{\mathfrak{g}}^{\omega_i}$ – i -й фундаментальный модуль; $P_{\mathfrak{g}}$ – решетка весов, $P_{\mathfrak{g}}^{++}$ – решетка доминантных весов, $\mathcal{LP}_{\mathfrak{g}}$ – пространство весов;

$$\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho}$$

– сингулярный элемент для $\mathfrak{g}$ -модуля L^{μ} ;

$$\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho)}$$

– несдвинутый сингулярный элемент;

$$\text{ch}(L^{\mu}) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^{+}} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}}$$

– формальный характер модуля L^{μ} и формула Вейля для него;

$$R_{\mathfrak{g}} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}^{+}} (1 - e^{-\alpha}) = \Psi^{(0)}$$

– знаменатель в формуле Вейля.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА

Модулю старшего веса $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ сопоставим функцию Чебышёва от многих переменных $U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(x)$, определенную как специализированный характер типа x :

$$U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(x) := \text{ch}(L^{\mu;a(x)}) = \sum_{\nu \in P} c_{\nu}^{(\mu)} e^{(\nu, a(x))}, \quad (1)$$

$$a(x) := 2\pi i \sum_{j=1}^r \alpha^j x_j. \quad (2)$$

Здесь $c_{\nu}^{(\mu)}$ – кратности весов для L^{μ} , а $\nu = \sum^r \nu^j \omega_j$ – вес. Фундаментальные модули L^{ω_j} , $j = 1, \dots, r_{\mathfrak{g}}$, определяют набор независимых переменных

$$\{X^j\} := \{U_{\mathfrak{g}}^{\omega_j}(x)\}_{j=1, \dots, r}. \quad (3)$$

Кольцо $\mathbb{Z}[X^1, \dots, X^r]$, порожденное $\{X^j\}$ над $\mathbb{Z}$, содержит полный набор специализированных характеров $\text{ch}(L^{\mu;a(x)})$. Это дает явные выражения для характеров $\{U^{\mu}\}$, составляющих набор многочленов $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)\}_{\mu \in P^{++}}$. Такая система образует полный базис фундаментальной области в $F_{\mathfrak{g}}(X)$ [8]. Фундаментальная область для угловых переменных $\{x_j\}$ определяется соответствующим альковом (см., например, работу [9], с. 32). Она зависит от выбора вектора специализации $a(x)$. При стандартном выборе (аналогично (2)) $F_{\mathfrak{g}}(x)$ есть выпуклая оболочка множества $\{0, e_1/q_1, e_2/q_2, \dots, e_r/q_r\}$.

В настоящей работе нас будут в основном интересовать свойства множества $\{\Phi^{\mu;a(x)}\}_{\mu \in P^{++}}$ несдвинутых сингулярных функций на $F_{\mathfrak{g}}(x)$. Эти функции являются ортогональными и нормированными [9]:

$$\frac{1}{|F_{\mathfrak{g}}(x)| |W_{\mathfrak{g}}|} \int_{F_{\mathfrak{g}}(x)} \Phi^{\mu;\alpha(x)} \overline{\Phi^{\lambda;\alpha(x)}} dx^1 \dots dx^n = \delta^{\mu\lambda}. \quad (4)$$

Здесь $|F_{\mathfrak{g}}(x)|$ и $|W_{\mathfrak{g}}|$ – объемы соответственно фундаментальной области и группы $W_{\mathfrak{g}}$. Используя формулу Вейля (4) и полиномиальные переменные $\{X^j\}$ (3), получаем весовую функцию $\gamma_{\mathfrak{g}}$:

$$\frac{\Phi^{0;a(x(X))} \overline{\Phi^{0;a(x(X))}}}{|F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}| |\partial X_i / \partial x_j|} dX^1 \dots dX^n = \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 \dots dX^n. \quad (5)$$

В работе [8] было показано, что для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует единственная функция $\gamma_{\mathfrak{g}}$, которую легко выразить в терминах сингулярного элемента $\Phi_{\mathfrak{g}}^{0;a(x(X))}$:

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) = \frac{\overline{\Phi_{\mathfrak{g}}^{0;a(x(X))}}}{(2\pi i)^n |F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}|}. \quad (6)$$

Множитель $\overline{\Phi^{0;a(x(X))}}$ в выражении для $\gamma(X)$ нельзя разложить в линейную комбинацию характеров. Напротив, элемент $(\Phi^{0;a(x(X))})^2$ является W -инвариантом и выражается в терминах $U^{\nu}(X)$. Единственная информация, которая нам нужна, чтобы выполнить это разложение, – достаточный набор многочленов $U^{\nu}(X)$.

4. МНОГОЧЛЕНЫ И СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Обычно многочлены Чебышёва строятся как решения системы рекуррентных соотношений [4]–[7]. Здесь мы опишем подход, существенно упрощающий построение для произвольной алгебры $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим тензорное произведение $(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_2})^{\otimes p_2} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r}$, где $\{p_j\} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$, а $(X^1)^{p_1} \dots (X^r)^{p_r}$ – его специализация. Введем частичное упорядочение в $P_{\mathfrak{g}}^{++}$, проецируя вектор $\sum_i^n p_i \omega_i$ на подходящий пробный вектор. Это индуцирует упорядочение на множестве моментов $\{X^{I(p)}\}$ (описываемых мультииндексами $I(p)$), а также на множестве многочленов типа многочленов Чебышёва. В терминах сингулярных элементов $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\omega_j)}$ получаем произведение $(\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\omega_1)})^{p_1} (\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\omega_2)})^{p_2} \dots (\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\omega_r)})^{p_r}$. Собирая члены с фиксированным доминантным весом $\mu \in P^{++}$, получаем положительный целый коэффициент $m_{\nu}^{I(p)}$. Такие коэффициенты образуют треугольную матрицу $M_{\mathfrak{g}}$ с единицами на главной диагонали. Обратная матрица $M_{\mathfrak{g}}^{-1}$ дает нам явные выражения для многочленов:

$$U_{\mathfrak{g}}^{H(p)} = (M^{-1})_{\mathfrak{g}I(p)}^{H(p)} X_{\mathfrak{g}}^{I(p)}. \quad (7)$$

Теперь можно записать явное выражение для меры. Достаточно разложить W -инвариант $(\Phi^{0;\alpha(X)})^2 = b_{I(p)} X^{I(p)}$ и ввести множители $\Phi^{0;\alpha(X)} = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}}$, $q_{\mathfrak{g}}$ и $(-1)^{\max^*(W)}$. Второй множитель представляет собой число альковов в области $F(x)$. Третий множитель зависит от свойств сингулярных элементов относительно сопряжения. Формула

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 \dots dX^r = \frac{q_{\mathfrak{g}}(-1)^{\max^*(W)}}{(2\pi i)^n |F_{\mathfrak{g}}| |W_{\mathfrak{g}}|} \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}} dX^1 \dots dX^r \quad (8)$$

является универсальной, она верна для любой полупростой алгебры Ли ранга $r_{\mathfrak{g}}$ и стандартного вектора специализации (2).

5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ 2-ФОРМЫ

Согласно теореме из работы [8] весовая функция $\gamma_{\mathfrak{g}}$ определяет в пространстве $\mathcal{L}^2(F_{\mathfrak{g}}(X))$ скалярное произведение

$$\int_{F_{\mathfrak{g}}(X)} f_1(X) f_2(X) \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 dX^2 \dots dX^r \quad (9)$$

двух функций f_1, f_2 на $F_{\mathfrak{g}}(X)$. Здесь $F_{\mathfrak{g}}(X)$ представляет собой результат преобразования фундаментальной области из угловых переменных в полиномиальные: $F_{\mathfrak{g}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow X} F_{\mathfrak{g}}(X)$.

Одно из основных следствий из указанной теоремы состоит в существовании взаимно однозначного соответствия между скалярным произведением (9) функций и сверткой их несдвинутых сингулярных элементов $\Phi(f)$:

$$\begin{aligned} \int_{F_{\mathfrak{g}}(X)} f_1(X) f_2(X) \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 dX^2 \dots dX^r = \\ = \int_{F_{\mathfrak{g}}(x)} \Phi(f_1) \Phi(f_2) \zeta_{\mathfrak{g}} dx^1 dx^2 \dots dx^r, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\zeta_{\mathfrak{g}} = 1/|F_{\mathfrak{g}}||W_{\mathfrak{g}}|$ – константа, которая зависит только от $\mathfrak{g}$. Сингулярные элементы $\Phi(f)$ приписываются функциям $f(X) \in \mathcal{L}^2(F_{\mathfrak{g}}(X))$, если записать X в угловых переменных и умножить результат на несдвинутый (специализированный) знаменатель Вейля:

$$\Phi(f) = f(X(x))\Phi_{\mathfrak{g}}^{0;a(x)}. \quad (11)$$

Это означает, что любое скалярное произведение типа (9) (где область $F_{\mathfrak{g}}(X)$ представляет собой деформированный альков) с дифференциальной мерой (8) можно заменить на гораздо более простую свертку по угловым переменным, где мера является евклидовой (нормированной на константу $\zeta_{\mathfrak{g}}$), а область интегрирования есть $r_{\mathfrak{g}}$ -мерный параллелепипед, построенный из $q_{\mathfrak{g}}$ альковов.

6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим функцию $f \in L^2(F_{\mathfrak{g}}(X))$ и ее разложение

$$f = \sum_{I(p)} k_{I(p)}^f U_{\mathfrak{g}}^{I(p)}, \quad (12)$$

$$k_{I(p)}^f = \int_{F_{\mathfrak{g}}(X)} f(X) \overline{U_{\mathfrak{g}}^{I(p)}} \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 dX^2 \dots dX^r. \quad (13)$$

Из результата, сформулированного в предыдущем разделе, немедленно следует, что

$$k_{I(p)}^f = \zeta_{\mathfrak{g}} \int_{F_{\mathfrak{g}}(x)} f(X(x)) \Phi_{\mathfrak{g}}^{0;a(x)} \overline{\Phi_{\mathfrak{g}}^{[I(p)];a(x)}} dx^1 dx^2 \dots dx^r, \quad (14)$$

где $\Phi_{\mathfrak{g}}^{[I(p)];a(x)} = \Phi_{\mathfrak{g}}^{\mu}|_{\mu=\sum_j \omega^j p_j; a(x)}$ – специализированный несдвинутый сингулярный элемент с весом μ , у которого индексы Дынкина p_j образуют последовательность $I(p)$. Это означает, что для нахождения разложения (12) достаточно знать явные выражения для X^j в терминах угловых переменных и набор сингулярных элементов $\Phi_{\mathfrak{g}}^{\mu;a(x)}$. Последние имеют стандартный вид, всегда содержат одинаковое число экспоненциальных слагаемых, и их легко записать явно, коль скоро группа $W_{\mathfrak{g}}$ известна (см. раздел 2).

7. ЯВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ ДЛЯ АЛГЕБР РАНГА $R_{\mathfrak{G}} = 2$

Поскольку случай алгебры A_2 был детально изучен в работах [4], [5], мы сосредоточимся на алгебрах $A_1 \oplus A_1$, B_2 и G_2 . В первом случае обобщение классических многочленов Чебышёва является тривиальным, поэтому здесь мы приведем только окончательный результат. Для алгебр B_2 и G_2 в работе [8] были построены многочлены от двух переменных и соответствующие меры, и в следующих двух пунктах мы напомним их основные свойства.

7.1. Многочлены от двух переменных для B_2 . Простые корни и фундаментальные веса для алгебры B_2 имеют вид

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2, \quad \omega_1 = e_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2);$$

Рис. 1. Область интегрирования $F_{B_2}(X)$ (а) и график весовой функции (б) для алгебры B_2 .

вектор специализации выбирается так: $a = 2\pi i(x_1 e_1 + x_2 e_2)$. В терминах угловых переменных специализированные фундаментальные характеры имеют вид

$$X_1 = 4 \cos^2(\pi x_1) + 4 \cos^2(\pi x_2) - 3, \quad X_2 = 4 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2). \quad (15)$$

Приведем список многочленов Чебышёва (см. расширенный список B_2 -многочленов в работе [8]):

$$\begin{aligned} U^{[0,0]} &= 1, & U^{[0,3]} &= -2X_1X_2 - X_2 + X_2^3, \\ U^{[1,0]} &= X_2, & U^{[1,1]} &= X_1X_2 - X_2, \\ U^{[0,1]} &= X_1, & U^{[2,1]} &= X_1^2X_2 + X_2 - X_2^3, \\ U^{[2,0]} &= -X_2^2 + X_1 + X_1^2, & U^{[1,2]} &= 1 + X_1X_2^2 - X_2^2 - X_1 - X_1^2, \\ U^{[0,2]} &= -1 + X_2^2 - X_1, & U^{[0,4]} &= -3X_1X_2^2 - X_2^2 + 2X_1 + X_1^2 + X_2^4, \dots \end{aligned}$$

Соответствующая весовая функция

$$\gamma_{B_2}(X) = \frac{4(-1)^3}{2(\pi i)^2 |F_{B_2}| |W_{B_2}|} \sqrt{(\Phi_{B_2}^{[0,0];a})^2(X)}$$

имеет вид

$$\gamma_{B_2}(X) = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{36 - 12X_1 + 22X_1X_2^2 + X_1^2X_2^2 - 20X_1^2 - 7X_2^2 - 4X_1^3 - 4X_2^4}.$$

Для деформированного алькова $F_{B_2}(X)$ контур образован линиями (см. рис. 1)

$$X_1 = 1 + \frac{1}{4}X_2^2, \quad X_1 = -3 + 2X_2, \quad X_1 = -3 - 2X_2. \quad (16)$$

Внутри данного контура набор многочленов $U_{B_2}^{[q_1, q_2]}(X)$ образует полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(F_{B_2}(X), \gamma_{B_2})$.

7.2. Многочлены от двух переменных для G_2 . Простые корни и фундаментальные веса имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2, \quad \alpha_2 = e_2, \quad \omega_1 = \sqrt{3}e_1, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2,$$

а вектор специализации равен $a = 2\pi i(\sqrt{3}x_1\alpha_1 + (\sqrt{3}x_1/2 + x_2/2)\alpha_2)$. Полиномиальные переменные являются специализированными фундаментальными модулями:

$$\begin{aligned} X_1 &:= 2\cos(2\pi\sqrt{3}x_1) + 2\cos(2\pi x_2) + \\ &\quad + 2\cos(\pi(\sqrt{3}x_1 + 3x_2)) + 2\cos(\pi(3\sqrt{3}x_1 - 3x_2)) + \\ &\quad + 2\cos(\pi(\sqrt{3}x_1 + x_2)) + 2\cos(\pi(\sqrt{3}x_1 - x_2)) + 2, \\ X_2 &:= 2\cos(2\pi x_2) + 2\cos(\pi(\sqrt{3}x_1 + x_2)) + 2\cos(\pi(\sqrt{3}x_1 - x_2)) + 1. \end{aligned}$$

Прямоугольник $F_{G_2}(x) = [0, 1/\sqrt{3}] \times [0, 1] \in \mathcal{LP}_{\mathfrak{g}_2}$ содержит шесть G_2 -альковов. Таким образом, нормирующая константа для $F_{G_2}(x)$ равна $\zeta_{G_2} = \sqrt{3}/12$; в частности, имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{12} \int_0^1 \int_0^{1/\sqrt{3}} |\Phi_{G_2}^{[0,0];a}|^2 dx_1 dx_2 = 1.$$

Получаем следующие явные выражения для G_2 -многочленов типа Чебышёва:

$$\begin{aligned} U^{[0,0]} &= 1, & U^{[0,3]} &= -X_2 - X_2^2 - X_1 + X_2^3 - 2X_1X_2, \\ U^{[0,1]} &= X_2, & U^{[2,0]} &= 2X_2 + X_1 + X_1^2 - X_2^3 + 2X_1X_2, \\ U^{[1,0]} &= X_1, & U^{[1,2]} &= X_2 + X_2^2 - X_1 - X_1^2 - X_2^3 + X_1X_2^2, \\ U^{[0,2]} &= -1 - X_2 + X_2^2 - X_1, & U^{[0,4]} &= X_2 - X_2^2 + 2X_1 + X_1^2 - X_2^3 + X_2^4 - \\ & & & - 3X_1X_2^2, \\ U^{[1,1]} &= 1 - X_2^2 + X_1 + X_1X_2, & U^{[2,1]} &= -1 - X_2 + 2X_2^2 + X_1^2 + X_2^3 - X_2^4 + \\ & & & + X_1X_2^2 + X_1^2X_2. \end{aligned}$$

Этого короткого списка достаточно, чтобы найти явные выражения для множителя:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\Phi_{G_2}^{[0,0];a})^2} &= (49 - 42X_1 - 28X_2 - 47X_1^2 - 10X_2^2 - 58X_1X_2 - 4X_1^3 - 38X_1^2X_2 + \\ &\quad + 26X_1X_2^2 + 32X_2^3 + X_1^2X_2^2 - 7X_2^4 + 26X_1X_2^3 - 4X_2^5)^{1/2}, \end{aligned}$$

и для весовой функции γ_{G_2} :

$$\gamma_{G_2} = \frac{6(-1)^6}{2(\pi i)^2 |F_{G_2}| 12} \sqrt{(\Phi_{G_2}^{[0,0];a})^2(X)} = -\frac{1}{4\pi^2} \sqrt{(\Phi_{G_2}^{[0,0];a})^2(X)}.$$

Границы алькова в $\mathcal{LP}_{\mathfrak{g}}$

$$x_1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_2, \quad x_1 = -\sqrt{3}x_2 + \frac{2}{\sqrt{3}},$$

Рис. 2. Сравнение областей интегрирования для $A_1 \oplus A_1$, B_2 (светло-серая область) и G_2 (темно-серая область).

записанные в терминах полиномиальных координат X ,

$$\begin{aligned} X_1 &= 6 - 4(1 - \sqrt{2 + X_2})^3 + (1 - \sqrt{2 + X_2})^2 - 4\sqrt{2 + X_2}, \\ X_1 &= -2 + \frac{1}{4}(1 + X_2)^2, \\ X_1 &= 14 + 2(1 - \sqrt{2 + X_2})^3 - 11(1 - \sqrt{2 + X_2})^2 - 16\sqrt{2 + X_2}, \end{aligned}$$

определяют границы области интегрирования $F_{G_2}(X)$. Рассмотрим двумерную плоскость, содержащую три области $F_{A_1 \oplus A_1}(X)$, $F_{B_2}(X)$ и $F_{G_2}(X)$. Можно сравнить область интегрирования для G_2 с областями интегрирования для B_2 и $A_1 \oplus A_1$ (см. рис. 2). На рис. 2 область $F_{A_1 \oplus A_1}(X)$ обозначена квадратом, $F_{B_2}(X)$ заштрихована светло-серым цветом, а $F_{G_2}(X)$ – темно-серым.

7.3. Свойства разложения. Аппроксимационные свойства многочленов типа Чебышёва хорошо изучены (см., например, работу [10] и недавнюю работу [11]). Рассмотрим пробную функцию из работы [6]:

$$H(X_1, X_2) = e^{(\sin X_1 \sin X_2)}.$$

Используя свойство эквивалентности скалярных произведений, можно найти ряды, представляющие разложения $DH_{A_1 \oplus A_1}$, DH_{B_2} и DH_{G_2} для каждого набора многочленов Чебышёва, определенных для соответствующих областей $F_{A_1 \oplus A_1}(X)$, $F_{B_2}(X)$ и $F_{G_2}(X)$. Используя упорядочение, описанное в разделе 4, построим наборы упорядоченных разложений DH^J , где $J = 1, 2, \dots$. Применяя численное интегрирование в каждом пространстве $\mathcal{LP}_q$, получаем три набора разложений, например таких:

$$\begin{aligned} DH_{A_1 \oplus A_1}^5 &= 1.14 + 0.09U_{A_1 \oplus A_1}^{[2,0]} + 0.09U_{A_1 \oplus A_1}^{[0,2]} + 0.55U_{A_1 \oplus A_1}^{[1,1]} - 0.04U_{A_1 \oplus A_1}^{[4,0]}, \\ DH_{B_2}^5 &= 1.09 + 0.28U_{B_2}^{[0,1]} + 0.04U_{B_2}^{[0,2]} - 0.27U_{B_2}^{[0,3]} - 0.04U_{B_2}^{[0,4]}, \\ DH_{G_2}^5 &= 1.01 + 0.09U_{G_2}^{[0,1]} - 0.13U_{G_2}^{[1,0]} + 0.18U_{G_2}^{[0,2]} + 0.05U_{G_2}^{[1,1]}, \end{aligned}$$

где $J = 5$, т. е. выписаны только первые пять членов.

Рис. 3. Стандартные отклонения $\text{Dev}_g(J)$ для функции H и аппроксимирующего ее ряда DH_g^J . Использовались три набора многочленов от двух переменных: случай $A_1 \oplus A_1$ показан кружками, B_2 – звездочками, а G_2 – квадратами.

Для каждого значения J эти разложения характеризуются параметром стандартного отклонения, строящимся как функция от J :

$$\text{Dev}_g(J) = \int_{F_g(X)} (H(X) - DH_g^J(X))^2 \gamma_g(X) dX^1 dX^2. \quad (17)$$

Согласно приведенному выше утверждению об эквивалентности скалярных произведений интегрирование также можно выполнить в терминах угловых переменных.

Можно сравнить аппроксимационные свойства трех наборов многочленов Чебышёва от двух переменных, приведя графики трех функций $\text{Dev}_g(J)$. Ясно видно, что все три набора фундаментальных многочленов обеспечивают быструю сходимость ряда. Поведение функций отклонения аналогично для $A_1 \oplus A_1$, B_2 и G_2 , однако следует помнить, что они описывают приближения, выполненные в совершенно разных областях интегрирования (см. рис. 3).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для существенного упрощения исследований в теории приближений можно использовать взаимно однозначное соответствие между пространством функций $f \in \mathcal{L}^2(F_g(X), \gamma_g(X))$ с ортогональным и нормированным базисом, образованным многочленами типа Чебышёва от многих переменных $U_g(X)$, и пространством $\mathcal{L}^2(F_g(x))$ соответствующих им сингулярных контрагентов $(f(x)\Phi_g^{[0,0];a(x)})$ с евклидовой мерой, прямоугольной областью $F_g(x)$ и базисом, образованным сингулярными элементами $\Phi_g^{a(x)}$. Соответствующие приемы можно разработать для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Благодарности. Автор выражает благодарность всем участникам и организаторам Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2012). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00207_а).

Список литературы

- [1] G. Dupont, *Algebr. Represent. Theory*, **15**:3 (2012), 527–549.
- [2] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 373–380.
- [3] G. von Gehlen, Sh. Roan, *The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials*, [arXiv: hep-th/0104144](#).
- [4] Т. Н. Koornwinder, *Indag. Math.*, **77**:1 (1974), 48–58; 59–66; **77**:4 (1974), 357–369; 370–381.
- [5] R. J. Beerends, *Trans. AMS*, **328**:2 (1991), 779–814.
- [6] B. Ryland, “Multivariate Chebyshev approximation”, *International workshop MaGIC-2008* (Renon, Bolzano, Italy, February 18–21, 2008), [www.math.ntnu.no/num/magic/2008](#).
- [7] M. Nesterenko, R. Moody, J. Patera, A. Tereszkiewicz, *Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups*, [arXiv: 1001.3683](#).
- [8] V. D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, *J. Phys. A*, **46**:12 (2013), 125201, 23 pp.
- [9] A. Klimyk, J. Patera, *SIGMA*, **2** (2006), 006, 60 pp.
- [10] G. Leng, *Adv. Engin. Software*, **28**:2 (1997), 133–141.
- [11] H. Li, J. Sun, Y. Xu, *SIGMA*, **8** (2012), 067, 29 pp.