Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Данчо, М. Гнатич, Т. Лучивянски, Л. Мижишин,
Критическое поведение процесса перколяции под влия-
нием случайного поля скоростей: однопетлевое прибли-
жение, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 1, 79–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:14:03

© 2013 г.

М. Данчо*, М. Гнатич*[†],
Т. Лучивянский*[†], Л. Мижишин[†]

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРКОЛЯЦИИ ПОД ВЛИЯНИЕМ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ: ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

С помощью пертурбативной ренормгруппы исследуется влияние случайного поля скоростей на критическое поведение направленного процесса перколяции вблизи фазового перехода второго порядка между абсорбирующей и активной фазами. Для описания поля скоростей переноса используется модель Антонова–Крейчмана с конечным временем корреляции. С целью получения информации об асимптотическом поведении рассматриваемой модели на больших масштабах применен подход теоретико-полевой ренормгруппы. Модель анализируется вблизи критической размерности с помощью трехпараметрического разложения по ϵ , δ , η , где ϵ – отклонение от колмогоровского масштаба, δ – отклонение от критической размерности пространства, а η – отклонение от параболического закона дисперсии для коррелятора скоростей. Фиксированные точки с соответствующими областями устойчивости определяются в ведущем порядке теории возмущений.

Ключевые слова: пертурбативная ренормгруппа, направленная перколяция, турбулентная диффузия.

DOI: 10.4213/tmf8492

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы перколяции представляют собой известные модели описания случайных структур [1], [2]. Некоторые из этих процессов известны как направленная перколяция со связями (НПС). Общим свойством НПС оказывается то, что агент (частица) может распространяться от одного положения к другому по разрешенному направлению прохода. Направление распространения агентов определяет выделенное направление в пространстве. НПС может также служить для объясне-

*Institute of Experimental Physics of the Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia.
E-mail: danco@saske.sk

[†]Faculty of Science, P. J. Šafárik University, Košice, Slovakia

ния адронного взаимодействия при очень высоких энергиях (теория поля реджеона) [3], различных моделей распространения болезней [1], [2], стохастических процессов реакции–диффузии на решетке [4] или, как в первоначальной формулировке [5], смачивания пористого материала или поиска пути в лабиринте. Верхняя критическая размерность в этой задаче оценивается как $d = 4$ в отличие от значения $d = 6$ для случая изотропной динамики [1], [6], [7].

Одно из наиболее важных свойств НПС – появление неравновесного фазового перехода второго порядка между абсорбирующей и активной фазами. Абсорбирующая (неактивная) фаза соответствует случаю, когда в среде не содержится агентов (зараженных индивидумов), а активная фаза представляет поведение системы, когда число агентов флуктуирует вокруг постоянного значения.

Большие усилия прилагались к исследованию различных эффектов. Например, дальнедействующие взаимодействия посредством полетов Леви изучались и в пространственных, и во временных переменных в работах [8], введение иммунизации рассматривалось в работах [9], поверхностный эффект исследовался в работе [10] и т. д. Легко представить, что распространение болезни может ускориться вследствие наличия некоторого внешнего атмосферного течения или из-за летающих насекомых. В обоих случаях добавочный дрейф можно моделировать с помощью случайного поля скоростей [11] с заданными статистическими свойствами. В статье [11] изучается влияние адвективного поля, которое описывается моделью Крейчнана с коррелятором поля скоростей в форме белого шума. Обобщая данный подход, можно изучать, например, эффект сжимаемости [12] или, используя стохастические уравнения Навье–Стокса, эффекты “реального” турбулентного поля [13]. В настоящей работе мы исследуем влияние поля скоростей с конечной корреляцией (вводимые понятия см. в работах [14]) и определяем, каким образом оно может изменить критическое поведение процесса перколяции. Используя ренормгрупповой подход, мы определяем возможные фиксированные точки и соответствующие области устойчивости. Мы показываем, что модель имеет двенадцать возможных крупномасштабных режимов, а воздействие флуктуаций скоростей иллюстрируется на таких величинах, как число частиц, вероятность выживания активного кластера и радиус гирации активных частиц.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 дано краткое описание модели. В разделе 3 доказана мультипликативная ренормируемость модели и в однопетлевом приближении вычислены ренормгрупповые функции (бета-функции и аномальные размерности), в разделе 4 перечислены возможные крупномасштабные режимы, а их физический смысл обсуждается в разделе 5.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Существуют два подхода к теоретико-полевой формулировке НПС. Первый подход является более строгим и основывается на использовании управляющего уравнения, которое можно переписать, задействовав формализм Доя [15], в виде зависящего от времени уравнения Шредингера с неэрмитовым гамильтонианом. При переходе к непрерывному пределу получается эффективное действие, которое можно анализировать обычными теоретико-полевыми методами. Действие для чистой задачи НПС [1] можно записать в следующем виде:

$$S_1 = \psi^\dagger (-\partial_t + D_0 \nabla^2 - D_0 \tau_0) \psi + \frac{D_0 \lambda_0}{2} [(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2], \quad (1)$$

где подразумеваются все требуемые интегрирования по пространственно-временным переменным. Здесь $\psi \equiv \psi(t, \mathbf{x})$ – крупнозернистая плотность зараженных индивидуумов (агентов), $\psi^\dagger$ – функция отклика, D_0 – константа диффузии, λ_0 – положительная константа связи, а τ_0 – отклонение от порогового значения введенной вероятности. Можно предположить, что $\tau_0 \sim p_c - p$, где p_c – критическая вероятность перколяции (аналогично отклонению от критической температуры для равновесных моделей).

Легко показать [1], что второй подход, основанный на использовании уравнения Ланжевена, после подходящего масштабирования приводит к такому же крупнозернистому функционалу действия (1). Оба этих подхода дают одинаковые предсказания универсальных величин.

Агенты могут рассматриваться как пассивная скалярная величина [14], которую переносит поле скоростей без обратного воздействия на само поле, с нетривиальными взаимодействиями, заданными кубическими членами в (1). Включение поля скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ соответствует замене в соотношении (1) частной производной по времени конвективной производной $\nabla_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$. В отличие от работы [11] мы предполагаем, что поле скоростей – случайная гауссова величина с нулевым средним и следующим коррелятором [14]:

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(k) D_v(\omega, k) e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (2)$$

где $P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, а D_v имеет вид [14]

$$D_v(\omega, k) = \frac{g_{10} D_0^3 k^{4-d-2\epsilon-\eta}}{\omega^2 + u_{10}^2 D_0^2 (k^{2-\eta})^2}, \quad (3)$$

где g_{10} – константа связи, а ϵ, η, δ играют роль малых параметров разложения. В настоящей статье мы понимаем ϵ как отклонение от колмогоровского скейлинга [16], а δ – как отклонение от размерности пространства четыре: $d = 4 - 2\delta$. Показатель η связан с частотой $\omega \propto k^{2-\eta}$, и $\eta = 4/3$ соответствует колмогоровской частоте. Усреднение по флуктуациям скоростей можно произвести с помощью функционала действия гауссовского типа $S_2 = -\mathbf{v} D_v^{-1} \mathbf{v} / 2$.

Рассматриваемая модель (2), (3) имеет два важных предела. Первый из них известен как “модель быстрых изменений” [14], которая определяется формулами

$$u_{10} \rightarrow \infty, \quad g'_{10} \equiv \frac{g_{10}}{u_{10}^2} = \text{const}, \quad D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g'_{10} D_0 k^{-d-2\epsilon+\eta}.$$

Видно, что скорости некоррелированны (белый шум) по времени. Второй предел называется пределом замороженного поля скоростей [14] и получается при

$$u_{10} \rightarrow 0, \quad g''_0 = \frac{g_{10}}{u_{10}} = \text{const}, \quad D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g''_0 D_0^2 k^{-d+2-2\epsilon} \pi \delta(\omega).$$

В этом случае коррелятор скоростей не зависит от времени в t -представлении.

Полная модель эквивалентна сумме функционалов, соответствующих НПС и полю скоростей:

$$S_0 = \psi^\dagger [-\partial_t - (\mathbf{v} \cdot \nabla) + D_0 \nabla^2 - D_0 \tau_0] \psi + \frac{D_0 \lambda_0}{2} [(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2] - \frac{1}{2} \mathbf{v} D_v^{-1} \mathbf{v}. \quad (4)$$

Таблица 1. Канонические размерности полей и затравочных параметров действия (4).

F	ψ	$\psi^\dagger$	$\mathbf{v}$	D_0	τ_0	λ_0	g_{10}	g_{20}	u_{10}	u_{20}
d_F^k	$d/2$	$d/2$	-1	-2	2	δ	$2\epsilon + \eta$	2δ	η	0
d_F^ω	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
d_F	$d/2$	$d/2$	1	0	2	δ	$2\epsilon + \eta$	2δ	η	0

Пользуясь теорией возмущений, можно легко показать [11], что параметр разложения есть λ_0^2 , а не λ_0 , что является следствием так называемой симметрии обращения быстроты (на языке теории поля реджеона)

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\psi^\dagger(-t, \mathbf{x}), \quad \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\psi(-t, \mathbf{x}). \quad (5)$$

Таким образом, имеет смысл ввести новый заряд $g_{20} = \lambda_0^2$.

3. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ И УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ

Теоретический анализ ультрафиолетовых расходимостей основан на стандартном подсчете степеней [17], [18]. В динамических моделях присутствуют два независимых масштаба: времени (частоты) и длины (импульса). Поэтому каноническая размерность любой величины F определяется двумя размерностями: частоты d_F^ω и импульса d_F^k . Эти размерности находятся из обычных условий нормировки

$$d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1, \quad d_k^k = -d_k^k = 1, \quad d_k^\omega = -d_\omega^k = 0$$

и требования безразмерности действия (4) (относительно размерностей импульса и частоты по отдельности). Полная каноническая размерность дается соотношением $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ (чтобы в свободной теории получался параболический закон дисперсии $\partial_t \propto \nabla^2$). Она играет в теории ренормировки такую же роль, как размерность длины (импульса) в статической теории [17]. Канонические размерности модели (4) приведены в табл. 1. Модель является логарифмической при размерности пространства $d = 4$ (или $\delta = 0$) и $\epsilon = \eta = 0$. Ультрафиолетовые расходимости в схеме минимальных вычитаний реализуются как полюсы по ϵ , δ , η или их линейной комбинации.

Полная каноническая размерность d_{Γ_N} произвольной одночастично-неприводимой функции Грина $\Gamma_N \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ задается следующим соотношением [17], [18]: $d_{\Gamma_N} = d + 2 - N_\Phi d_\Phi$, где $N_\Phi = \{N_v, N_\psi, N_{\psi^\dagger}\}$ – число полей, входящих в функцию Грина Γ_N , и подразумевается суммирование по всем типам полей Φ . В логарифмической теории поверхностные ультрафиолетовые расходимости могут затрагивать только такие функции Γ_N , для которых d_{Γ_N} – неотрицательное целое число. Функции Грина должны содержать оба поля ψ и $\psi^\dagger$, поскольку функции $\langle \psi \dots \psi \rangle$ или $\langle \psi^\dagger \dots \psi^\dagger \rangle$ включают замкнутые петли запаздывающих пропагаторов [11], [17]. Поэтому поверхностные ультрафиолетовые расходимости могут встречаться только

в функциях

$\langle \psi^\dagger \psi \rangle$	с контрчленами	$\psi^\dagger \partial_t \psi, \psi^\dagger \partial^2 \psi, \psi^\dagger \psi,$
$\langle \psi^\dagger \psi \psi \rangle$	с контрчленом	$\psi^\dagger \psi^2,$
$\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \rangle$	с контрчленом	$(\psi^\dagger)^2 \psi,$
$\langle \psi^\dagger \psi v \rangle$	с контрчленом	$\psi^\dagger (v \partial) \psi,$
$\langle \psi^\dagger \psi v v \rangle$	с контрчленом	$\psi^\dagger \psi v v.$

Члены $(\psi^\dagger)^2 \psi$ и $\psi^\dagger \psi^2$ можно ренормировать с помощью той же константы ренормировки вследствие симметрии (5), а контрчлен, порожденный функцией Грина $\langle \psi^\dagger \psi v \rangle$, сводится к виду $\psi^\dagger (v \partial) \psi = -\psi (v \partial) \psi^\dagger$ из-за поперечности поля скоростей. В модели (быстрых изменений) Крейчнана контрчлен $\psi^\dagger \psi v v$ отсутствует, и константы ренормировки для членов $\psi^\dagger \partial_t \psi$ и $\psi^\dagger (v \partial) \psi$ остаются такими же (конвективное дифференцирование $\nabla_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ сохраняет форму в процессе ренормировки) в силу галилеевой инвариантности модели. Необходимо подчеркнуть, что наша модель не является галилеево-инвариантной вследствие вида коррелятора скоростей (3), что отражает существование эффекта сноса в развитой турбулентности [17]. Как следствие константы ренормировки при членах $\psi^\dagger \partial_t \psi$ и $\psi^\dagger (v \partial) \psi$ в этом случае другие. Более того, чтобы гарантировать мультипликативную ренормируемость модели, приходится добавить новый член $\psi^\dagger \psi v v$ в действие (4) с новым независимым параметром (зарядом) u_2 , который компенсирует расходимость, порожденную корреляционной функцией $\langle \psi^\dagger \psi v v \rangle$. Полученное ренормированное действие можно переписать в следующем виде:

$$S_R = \psi^\dagger (-Z_1 \partial_t - Z_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) + Z_3 D \nabla^2 - Z_4 D \tau) \psi + \\ + Z_5 \frac{D \lambda}{2} [(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2] + Z_6 \frac{u_2}{2D} \psi^\dagger \psi \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{v} D_v^{-1} \mathbf{v}. \quad (6)$$

Заметим, что из соображений размерности заряд u_2 должен фигурировать в комбинации u_2/D , иначе у него будет ненулевая размерность относительно пространственной и временной переменных. С другой стороны, ренормированное действие можно получить с помощью мультипликативной ренормировки полей $\psi \rightarrow \psi Z_\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger Z_{\psi^\dagger}$, $v \rightarrow v Z_v$ и ренормировки параметров

$$D_0 = D Z_D, \quad g_{10} = g_1 \mu^{2\epsilon+\eta} Z_{g_1}, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad u_{10} = u_1 \mu^\eta Z_{u_1}, \\ \lambda_0 = \lambda \mu^\delta Z_\lambda, \quad g_{20} = g_2 \mu^{2\delta} Z_{g_2}, \quad u_{20} = u_2 Z_{u_2}. \quad (7)$$

Константы ренормировки полей и параметров (7) связаны с константами ренормировки действия (6) следующими соотношениями:

$$Z_v = Z_1^{-1} Z_2, \quad Z_\psi = Z_{\psi^\dagger} = Z_1^{1/2}, \quad Z_\lambda = Z_1^{-1/2} Z_3^{-1} Z_5, \\ Z_D = Z_1^{-1} Z_3, \quad Z_{u_1} = Z_1 Z_3^{-1}, \quad Z_\tau = Z_3^{-1} Z_4, \\ Z_{g_1} = Z_1^5 Z_2^{-2} Z_3^{-3}, \quad Z_{g_2} = Z_1^{-1} Z_3^{-2} Z_5^2, \quad Z_{u_2} = Z_2^{-2} Z_3 Z_6. \quad (8)$$

Стандартный пертурбативный подход ренормгруппы основан на фейнмановской диаграммной технике [17], [18]. Явные вычисления в однопетлевом приближении

приводят к следующим результатам для констант ренормировки:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{g_2}{8\delta}, & Z_2 &= 1 + \frac{g_2}{8\delta}, & Z_3 &= 1 + \frac{g_2}{16\delta} - \frac{3g_1}{8u(1+u)\epsilon}, \\ Z_4 &= 1 + \frac{g_2}{4\delta}, & Z_5 &= 1 + \frac{g_2}{2\delta}, & Z_6 &= 1 + \frac{g_2}{16\delta} - \frac{3g_1(1+u_2)}{8u_1(1+u_1)\epsilon}. \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем основное дифференциальное уравнение ренормгруппы для ренормированной функции Грина G_R :

$$\{D_{RG} + N_\psi \gamma_\psi + N_{\psi^\dagger} \gamma_{\psi^\dagger}\} G_R(e, \mu, \dots) = 0,$$

где $e = \{D, \tau, u_1, u_2, g_1, g_2\}$ – полный набор ренормированных аналогов затравочных параметров, а многоточие означает другие параметры такие, как пространственные и временные переменные. Оператор ренормгруппы D_{RG} можно представить в виде

$$D_{RG} = \mu \partial_\mu + \beta_{u_1} \partial_{u_1} + \beta_{u_2} \partial_{u_2} + \beta_{g_1} \partial_{g_1} + \beta_{g_2} \partial_{g_2} - \gamma_D D_D - \gamma_\tau D_\tau, \quad (10)$$

где $D_x = x \partial_x$ для любой переменной x , $\gamma_a = \tilde{D}_\mu \ln Z_a$ – аномальная размерность, а $\tilde{D}_\mu$ обозначает дифференциальный оператор, взятый при фиксированных значениях затравочных параметров. В формуле (10) бета-функция определяется как $\beta_g = \tilde{D}_\mu g$, где $g \in \{g_1, g_2, u_1, u_2\}$, и из соотношений (7) напрямую получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} &= g_1(-2\epsilon - \eta + 3\gamma_D), & \beta_{g_2} &= g_2(-2\delta - \gamma_{g_2}), \\ \beta_{u_1} &= u_1(-\eta + \gamma_D), & \beta_{u_2} &= -u_2\gamma_{u_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из явных формул (9) и соотношений (8) легко вычисляются нужные аномальные размерности:

$$\gamma_D = \frac{3g_1}{4u_1(1+u_1)} + \frac{g_2}{8}, \quad \gamma_{g_2} = -\frac{3g_1}{2u_1(1+u_1)} - \frac{3g_2}{2}, \quad \gamma_{u_2} = -\frac{g_2}{8} + \frac{3g_1(1+u_2)}{4u_1(1+u_1)}.$$

4. ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ И РЕЖИМЫ СКЕЙЛИНГА

Согласно теории ренормгруппы инфракрасное (ИК) асимптотическое поведение управляется ИК-притягивающими фиксированными точками. Фиксированные точки $g^* = \{g_1^*, g_2^*, u_1^*, u_2^*\}$ можно найти из требования, что в этих точках все бета-функции должны одновременно обращаться в ноль: $\beta_{g_1}(g^*) = \beta_{g_2}(g^*) = \beta_{u_1}(g^*) = \beta_{u_2}(g^*) = 0$. Тип фиксированной точки определяется по собственным значениям матрицы $\Omega = \{\Omega_{ij} = \partial \beta_i / \partial g_j\}$, где β_i – полный набор бета-функций (11), а g_j – полный набор зарядов $\{g_1, g_2, u_1, u_2\}$. Для ИК-притягивающих фиксированных точек собственные значения матрицы Ω – строго положительные величины. Из этого условия определяется область устойчивости для данной фиксированной точки. Хорошо известно, что в ИК-области функции Грина проявляют скейлинговое поведение. Критическая размерность Δ_F ИК-величины F определяется следующим соотношением: $\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*$, где $d_F^{k,\omega}$ – каноническая размерность величины F из табл. 1, γ_F^* – значение аномальной размерности в данной фиксированной точке, а $\Delta_\omega = 2 - \gamma_D^*$.

Таблица 2. Устойчивые фиксированные точки замороженного поля скоростей и соответствующие критические показатели.

Тип фиксированной точки	ФТ-1	ФТ-2	ФТ-3	ФТ-4а	ФТ-4б
$g_1^{*''}$	0	0	$\frac{4\epsilon}{3}$	$\frac{4(6\epsilon - \delta)}{15}$	$\frac{4(6\epsilon - \delta)}{15}$
g_2^*	0	$\frac{4\delta}{3}$	0	$\frac{8(\delta - \epsilon)}{5}$	$\frac{8(\delta - \epsilon)}{5}$
u_1^*	0	0	0	0	0
u_2^*	не фиксируется	0	-1	0	$\frac{2\delta - 7\epsilon}{6\epsilon - \delta}$
Область устойчивости	$\epsilon < 0$	$6\epsilon < \delta$	$\epsilon > 0$	$0 < \epsilon$	$0 < \epsilon$
	$\delta < 0$	$\delta > 0$	$\epsilon > \delta$	$\frac{7\epsilon}{2} < \delta < 6\epsilon$	$\epsilon < \delta < \frac{7\epsilon}{2}$
	$\eta < 0$	$6\eta < \delta$	$\eta < \epsilon$	$\eta < \epsilon$	$\eta < \epsilon$
Δ_ω	2	$2 - \frac{\delta}{6}$	$2 - \epsilon$	$2 - \epsilon$	$2 - \epsilon$
$-\frac{\Delta_\psi}{\Delta_\omega}$	$\frac{\delta - 2}{2}$	$\frac{7\delta - 12}{12 - \delta}$	$\frac{\delta - 2}{2 - \epsilon}$	$\frac{6\delta - \epsilon - 10}{5(2 - \epsilon)}$	$\frac{6\delta - \epsilon - 10}{5(2 - \epsilon)}$
$\frac{d - 2\Delta_\psi}{\Delta_\omega}$	0	$\frac{2\delta}{12 - \delta}$	0	$\frac{2}{5} \frac{\delta - \epsilon}{2 - \epsilon}$	$\frac{2}{5} \frac{\delta - \epsilon}{2 - \epsilon}$

Введем теперь величины из работы [1], чтобы, возможно, прояснить структуру фиксированных точек модели. Первая величина – это число $N(t)$ активных частиц, распространяющихся из начала координат $\mathbf{x} = 0$ в момент времени $t = 0$, задаваемое функцией отклика:

$$N(t) = \int d\mathbf{x} \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{0}) \rangle \propto t^{(d-2\Delta_\psi)/\Delta_\omega} = t^{g_2^*/4(2-\gamma_D^*)},$$

где $\gamma_D^* = \gamma_D(g_1^*, g_2^*, u^*)$. Вторая величина – это вероятность $P(t)$ выживания активного кластера:

$$P(t) = - \lim_{A \rightarrow \infty} \langle e^{-A\psi(0, \mathbf{x})} \psi^\dagger(-t, \mathbf{0}) \rangle \propto t^{-\Delta_\psi/\Delta_\omega} = t^{-(2-\delta-g_2^*/8)/(2-\gamma_D^*)}.$$

Радиус гирации $R(t)$ активных частиц определяется так:

$$R^2(t) = \frac{\int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{0}) \rangle}{\int d\mathbf{x} \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{0}) \rangle} \propto t^{2/\Delta_\omega} = t^{2/(2-\gamma_D^*)}.$$

Для исследования фиксированных точек этой модели воспользуемся точным соотношением для бета-функций: $\beta_{g_1}/g_1 - 3\beta_{u_1}/u_1 = 2(\eta - \epsilon)$. В результате получается, что бета-функции β_{g_1} и β_{u_1} могут одновременно обращаться в ноль при конечных значениях своих аргументов только в случае $\epsilon = \eta$, который следует изучить отдельно. С другой стороны, при $\epsilon \neq \eta$ необходимо рассматривать предельное поведение,

Рис. 1. Области устойчивости для фиксированных точек замороженного поля скоростей.

т. е. либо $u_1 = 0$, либо $u_1 = \infty$, и перемасштабировать g_1 так, чтобы в бета-функциях β_{g_1} , β_{u_1} аномальная размерность γ_D имела конечное значение.

Рассмотрим случай, когда предел коррелятора поля скоростей отвечает известному замороженному полю скоростей и имеет четыре фиксированные точки (см. табл. 2). Для этого режима мы ввели новую переменную $g_1'' \equiv g_1/u_1$, ее бета-функция имеет вид $\beta_{g_1''} = g_1''(-2\epsilon + 2\gamma_D)$. Фиксированная точка ФТ-1 соответствует гауссовой (свободной) фиксированной точке. В этом режиме радиус гирации $R(t)$ имитирует обычное случайное блуждание ($R(t) \propto t^{1/2}$). Для фиксированной точки ФТ-2 коррелятор поля скоростей является несущественным, и модель ведет себя как “чистый” класс направленных перколяций с соответствующими критическими показателями [1]. Для фиксированной точки ФТ-3 нелинейность действия (1) процесса направленной перколяции несущественна. Наконец, фиксированные точки ФТ-4а и ФТ-4б соответствуют нетривиальному режиму ИК-скейлинга, в котором важны и нелинейность модели (1) направленной перколяции, и поле скоростей. Кроме того, для фиксированной точки ФТ-4а несущественно взаимодействие $\psi^\dagger \psi \mathbf{v}^2$, в отличие от случая фиксированной точки ФТ-4б. В интервале $\epsilon \in (0, 2)$ и при $\delta = \text{const}$ показатель вероятности выживания $P(t)$ меньше -1 для фиксированной точки ФТ-3 и больше -1 для фиксированной точки ФТ-4. Следовательно, в режиме фиксированной точки ФТ-4 вероятность выживания убывает медленнее, чем для фиксированной точки ФТ-3. В режиме фиксированной точки ФТ-3 флуктуации скорости приводят к убыванию активного кластера, а в режиме фиксированной точки ФТ-4 – к противоположному эффекту.

На рис. 1 изображены области устойчивости для фиксированных точек в плоскости (ϵ, δ) при $\eta \leq 0$. Границы областей показаны жирными линиями.

Второй предельный случай характеризуется полем скоростей типа белого шума. Этот режим называется “моделью быстрых изменений” [14] и имеет четыре фиксированные точки. В этом случае полезно ввести новые переменные $g_1' \equiv g_1/u_1^2$ и $w = 1/u_1$, для которых соответствующие бета-функции имеют следующий вид:

ТАБЛИЦА 3. Фиксированные точки в нетривиальном случае.

Тип фиксированной точки	ФТ-5	ФТ-6а	ФТ-6б
$\frac{g_1^*}{u_1^*(1+u_1^*)}$	$\frac{4\epsilon}{3}$	$\frac{4(6\epsilon - \delta)}{15}$	$\frac{4(6\epsilon - \delta)}{15}$
g_2^*	0	$\frac{8(\delta - \epsilon)}{5}$	$\frac{8(\delta - \epsilon)}{5}$
u_2^*	-1	0	$\frac{2\delta - 7\epsilon}{6\epsilon - \delta}$
Область устойчивости	$\epsilon > 0$ $\eta = \epsilon > \delta$	$\epsilon > 0$ $\eta = \epsilon < \frac{2\delta}{7}$	$\epsilon > 0$ $\eta = \epsilon > \frac{2\delta}{7}$
Δ_ω	$2 - \epsilon$	$2 - \epsilon$	$2 - \epsilon$
$-\frac{\Delta_\psi}{\Delta_\omega}$	$\frac{\delta - 2}{2 - \epsilon}$	$\frac{6\delta - \epsilon - 10}{5(2 - \epsilon)}$	$\frac{6\delta - \epsilon - 10}{5(2 - \epsilon)}$
$\frac{d - 2\Delta_\psi}{\Delta_\omega}$	0	$\frac{2}{5} \frac{\delta - \epsilon}{2 - \epsilon}$	$\frac{2}{5} \frac{\delta - \epsilon}{2 - \epsilon}$

$\beta_{g_1'} = g_1'(\eta - 2\epsilon + \gamma_D)$ и $\beta_w = w(\eta - \gamma_D)$. Фиксированные точки и их области устойчивости можно найти в работе [11].

Третий, наиболее нетривиальный, случай отличается от предыдущих: бета-функции β_{g_1} и β_{u_1} пропорциональны между собой, так что фиксированные точки вырождаются. Однако фиксированные точки можно разделить на две группы в соответствии со значением g_2 (см. табл. 3). Для фиксированной точки ФТ-5 нелинейность действия (1) направленной перколяции не существенна. Для фиксированных точек ФТ-6а и ФТ-6б соответствующая взаимодействию часть действия (1) и поле коррелятора скоростей сосуществуют. В интервале $\epsilon \in (0, 2)$ показатели величин $N(t)$, $P(t)$ и $R(t)$ ведут себя так же, как фиксированные точки ФТ-3, ФТ-4а и ФТ-4б соответственно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали влияние поля скоростей с конечным радиусом корреляции по времени (модель Антонова–Крейчнана) на развитие процесса направленной перколяции со связями. Построив теоретико-полевую модель, мы вычислили константы ренормировки тройного разложения по ϵ , $2\delta = 4 - d$ и η в ведущем порядке и нашли фиксированные точки, их области устойчивости и число активных частиц, вероятность выживания и радиус гирации.

Благодарности. Работа поддержана Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант VEGA 1/0222/13), Centre of Excellency for Nanofluid, Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences. Lukáš Mižišin благодарит за поддержку VVGS грант UPJS. Эта статья создавалась в рамках программы “Cooperative phenomena and phase transition in nanosystems with perspective

utilization in nano- and biotechnology” (проекты № 26220120033, 26110230061). Средства для исследования и программы развития предоставил European Regional Development Fund.

Список литературы

- [1] H.-K. Janssen, U. C. Täuber, *Ann. Phys.*, **315**:1 (2004), 147–192, arXiv:cond-mat/0409670.
- [2] U. C. Täuber, *Adv. Solid State Phys.*, **43** (2003), 659–575.
- [3] J. L. Cardy, R. L. Sugar, *J. Phys. A*, **13**:12 (1980), L423–L427.
- [4] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.*, **49**:7 (2000), 815–958, arXiv:cond-mat/0001070.
- [5] S. R. Broadbent, I. M. Hamersley, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **53**:3 (1957), 629–641.
- [6] H. K. Janssen, *Z. Phys. B*, **58**:4 (1985), 311–317.
- [7] E. Frey, U. C. Täuber, F. Schwabl, *Phys. Rev. E*, **49**:6 (1994), 5058–5072.
- [8] H.-K. Janssen, K. Oerding, F. van Wijland, H. J. Hilhorst, *Eur. Phys. J. B*, **7**:1 (1999), 137–145; H. Hinrichsen, *J. Stat. Mech.*, **07** (2007), P07006, 35 pp., arXiv:cond-mat/0702169; H.-K. Janssen, O. Stenull, *Phys. Rev. E*, **78**:6 (2008), 061117, 12 pp., arXiv:0809.2344).
- [9] J. L. Cardy, P. Grassberger, *J. Phys. A*, **18**:6 (1985), L267–L271; J. L. Cardy, *J. Phys. A*, **16**:18 (1983), L709–L712; F. Linder, J. Tran-Gia, S. R. Dahmen, H. Hinrichsen, *J. Phys. A*, **41**:18 (2008), 185005, 11 pp.
- [10] H.-K. Janssen, B. Schaub, B. Schittmann, *Z. Phys. B*, **72**:1 (1988), 111–114.
- [11] N. V. Antonov, V. I. Iglovikov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **42**:13 (2008), 135001, 19 pp., arXiv:0808.0076.
- [12] N. V. Antonov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **43**:40 (2010), 405001, 22 pp.
- [13] Н. В. Антонов, А. С. Капустин, А. В. Малышев, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 124–136.
- [14] N. V. Antonov, *Phys. Rev. E*, **60**:6 (1999), 6691–6707; *Physica D*, **144**:3–4 (2000), 370–386.
- [15] M. Doi, *J. Phys. A*, **9**:9 (1976), 1456–1477; 1479–1495.
- [16] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, ФАЗИС, М., 1998.
- [17] А. Н. Васильев, *Квантовополе́вая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [18] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.