Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пастон, А. А. Шейкин, Вложения для решений уравнений Эйнштейна, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 429–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:11:05

© 2013 г.

С. А. Пастон*, А. А. Шейкин*

ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Исследуются изометрические вложения в плоское объемлющее пространство некоторых решений уравнений Эйнштейна, обладающих достаточно большой симметрией. Кратко излагается метод построения поверхностей с заданной симметрией. Обсуждаются все минимальные вложения метрики Шварцшильда, полученные с помощью этого метода, а также показывается, как с его помощью можно построить все минимальные вложения для моделей Фридмана. Все вложения классифицируются по способам реализации симметрий соответствующих решений.

Ключевые слова: теория гравитации, изометрическое вложение, теория вложения, вложение метрики Шварцшильда, асимптотически плоское вложение, дополнительные измерения.

DOI: 10.4213/tmf8494

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно теореме Жане–Картана [1], [2] произвольное риманово пространство размерности d может быть локально изометрически вложено в любое риманово пространство размерности $N \geq d(d+1)/2$, а значит, в частности, в плоское пространство такой размерности. На случай неположительной сигнатуры пространства эта теорема была обобщена Фридманом [3]. Для четырехмерного пространства-времени теорема гарантирует существование локального вложения при $N = 10$. Однако в некоторых случаях размерность объемлющего пространства, в которое можно вложить пространство-время с заданной метрикой, может оказаться и меньше. Величину $p = N - d$ при минимально возможном значении N называют *классом вложения* метрики. Чем большей симметрией обладает пространство-время, тем меньше его класс вложения (см. [4]). С другой стороны, если требовать, чтобы вложение было глобальным, т. е. в объемлющее пространство было гладко вложено все многообразие, соответствующее заданной метрике, то необходимая размерность N может оказаться заметно больше значения, которое дает теорема Жане–Картана, поскольку

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: paston@pobox.spbu.ru, anton.shejkin@gmail.com

она гарантирует существование лишь *локального* вложения. Некоторые результаты, касающиеся существования глобальных вложений, можно найти в книге [5].

Если поверхность в плоском пространстве описывать с помощью функции вложения $y^a(x^\mu)$ (здесь и далее греческие индексы $\mu, \nu, \dots$ пробегают d значений, а латинские индексы $a, b, \dots$ — N значений), то задача построения вложения для заданной метрики $g_{\mu\nu}(x)$ сводится к решению уравнения

$$(\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b)\eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, а η_{ab} — плоская метрика объемлющего пространства.

Проблема построения вложений для различных решений уравнений Эйнштейна начала обсуждаться очень давно, почти сразу после появления общей теории относительности. Цели такого построения могут быть разными. Явный вид вложения может быть полезен для лучшего понимания геометрии пространства-времени, особенно хорошо это видно на примере описанного в разделе 3 вложения Фронсдала [6] метрики Шварцшильда (это вложение оказывается тесно связанным с использованием координат Крускала–Шекереса, см. замечание в конце работы [6]). Существование вложения может применяться для решения некоторых задач, не связанных с вложениями напрямую, например для нахождения точных решений уравнений Эйнштейна (см. [4]). Явный вид вложений для физически интересных случаев может быть также полезен для развития предложенного в работах [7], [8] подхода, в котором гравитацию описывает не метрика, а функция вложения. Таким развитием являются, например, исследование возможности физической интерпретации лишних решений теории [9]–[11], изучение канонической структуры теории [12]–[15], каноническая формулировка теории с дополнительными связями, обеспечивающими отсутствие лишних решений [16], [17], а также переход к теории поля в плоском объемлющем пространстве [18]. Часть этих результатов, а также формализм, удобный для проведения вычислений в рамках теории вложения, изложены в книге [19]. Подробный список литературы, связанной с теорией вложения и смежными с ней вопросами, может быть найден в обзоре [20].

Построению явных вложений решений уравнений Эйнштейна в плоское объемлющее пространство посвящено достаточно много работ, в основном для физически интересного случая $d = 4$. Важным результатом является теорема Казнера, согласно которой в этом случае вакуумное решение уравнений Эйнштейна (соответствующее нулевому тензору Эйнштейна) не может быть вложено в пятимерное объемлющее пространство, т. е. имеет класс вложения больше единицы [21]. Большое количество конкретных вариантов вложений можно найти в работах [22], [23], многие возникающие при построении вложений вопросы обсуждаются в работе [24].

Среди прочих рассматривалась задача построения вложения для решения Шварцшильда. По теореме Казнера в этом случае размерность объемлющего пространства $N \geq 6$. До недавнего времени было известно четыре минимальных, т. е. соответствующих $N = 6$, вложений метрики Шварцшильда. В работе [25] авторами настоящей статьи предложен метод построения поверхностей с заданной симметрией, с помощью которого были построены все четыре известных, а также два новых минимальных вложения метрики Шварцшильда. Краткому изложению идей этого метода посвящен раздел 2, а в разделе 3 мы описываем все шесть полученных с его помощью минимальных вложений метрики Шварцшильда, обладающих присущей этой

метрике симметрией. В разделе 4 показано, какие результаты дает применение данного метода к задаче построения вложений решений Фридмана для всех трех типов модели – закрытой, открытой и пространственно-плоской. Раскрыта связь между способами реализации симметрии для этих вложений и для вложений метрики Шварцшильда.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Будем считать, что поверхность $\mathcal{M}$ обладает симметрией относительно группы G , если $\mathcal{M}$ переходит сама в себя под действием некоторой изоморфной группе G подгруппы группы движений $\mathcal{P}$ плоского пространства R^{n_+, n_-} (плоского пространства с n_+ времениподобными и n_- пространственноподобными направлениями, $n_+ + n_- = N > d$). Для пространства R^{n_+, n_-} группой движения является соответствующее обобщение группы Пуанкаре, т. е. $\mathcal{P}$ представляет собой полупрямое произведение группы $SO(n_+, n_-)$ на группу $T^{n_+ + n_-}$ трансляций пространства R^{n_+, n_-} . Используемое определение симметрии поверхности соответствует тому, что у областей, переходящих друг в друга под действием преобразования симметрии, должны быть одинаковыми как внутренняя, так и внешняя геометрия, а значит, их можно совместить друг с другом с помощью сдвига и (или) поворота в объемлющем пространстве.

Таким образом, для построения искомой поверхности необходимо найти некоторый гомоморфизм V из группы G в группу $\mathcal{P}$. Как известно, элементы $\mathcal{P}$ можно представить в матричной форме в виде блочных матриц размера $N + 1$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\Lambda \in SO(n_+, n_-)$ и $a \in R^{n_+, n_-}$ параметризует трансляции (при этом точкам R^{n_+, n_-} соответствуют $(n_+ + n_- + 1)$ -мерные векторы, последняя компонента которых всегда равна единице). Поэтому V можно считать представлением группы G , матрицы которого имеют вид (2), причем представление должно быть однозначным и точным, но оно будет приводимым (поскольку матрица (2) соответствует приводимому, хотя и не вполне приводимому представлению). Тогда множество точек $y \in R^{n_+, n_-}$, задаваемых формулой

$$y = V(g)y_0 \quad (3)$$

при произвольных $g \in G$ и фиксированном начальном векторе $y_0 \in R^{n_+, n_-}$, по построению будет образовывать поверхность, обладающую требуемой симметрией. Если вектор y_0 сделать зависящим от некоторых непрерывных параметров, то множество точек, задаваемых формулой (3), при всех значениях этих параметров также будет образовывать обладающую требуемой симметрией поверхность, причем в этом случае той же симметрией будут обладать и ее сечения, соответствующие фиксированным значениям параметров.

Поскольку классификация представлений групп разработана очень хорошо, возникает конструктивный способ построения поверхностей, обладающих заданной симметрией: перечислять вещественные представления V группы G , начиная с минимальных значений их размерности, и отбирать те из них, для которых матрица

представления имеет вид (2). При этом, однако, необходимо учитывать, что для разных представлений и разных начальных векторов y_0 полученная поверхность может иметь разные размерности, поэтому не все варианты окажутся подходящими при заданной размерности поверхности d . Отметим, что требование симметрии искомой поверхности можно формулировать в зависимости от решаемой задачи как глобально, так и локально.

Изложенный метод можно успешно применять для поиска вложений римановых пространств с заданной метрикой, если они обладают достаточно большой симметрией. Идея заключается в том, чтобы сначала с помощью данного метода перечислить для требуемого значения N все поверхности, обладающие имеющейся у метрики симметрией, а потом потребовать, чтобы они имели необходимую метрику. Дифференциальные уравнения, которые на этом последнем шаге приходится решать, оказываются тем проще, чем больше была симметрия. Например, при вложении и метрики Шварцшильда, и метрики Фридмана эти уравнения оказываются обыкновенными (по радиальному параметру r для метрики Шварцшильда и по времени t для метрики Фридмана), поэтому задача легко решается. Если же метрика обладает невысокой симметрией, то вместо обыкновенных приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных, что существенно сложнее.

3. ВЛОЖЕНИЯ МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА

Мы приведем здесь результаты применения описанного выше метода к задаче построения всех обладающих симметрией метрики Шварцшильда вложений этой метрики в шестимерное объемлющее пространство. Следует отметить, что, вообще говоря, являющаяся вложением некоторого пространства-времени поверхность может не обладать всеми симметриями этого пространства-времени. Такие вложения рассматриваемым методом найти нельзя.

Метрика Шварцшильда представляет собой сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна при отсутствии материи. Соответствующий этой метрике интервал имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - R/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4)$$

где R – радиус Шварцшильда. Метрика Шварцшильда также обладает инвариантностью по отношению к сдвигам координаты t , поэтому полная симметрия многообразия с метрикой Шварцшильда описывается группой $G = SO(3) \times T^1$.

Следуя описанному в разделе 2 методу, нужно искать представления группы G , матрицы которых могут быть записаны в форме (2). Представления прямого произведения $SO(3) \times T^1$ в общем случае сводятся к прямой сумме представлений, являющихся тензорными произведениями представлений групп $SO(3)$ и T^1 . Для каждого найденного представления необходимо записать соответствующий ему общий вид функции вложения $y^a(x^\mu)$ по формуле (3) и подставить его в уравнение (1). В результате решение этого уравнения сводится к решению несложных обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет явно получить возможные варианты функции вложения.

Оказывается (подробности см. в [25]), что для $N = 6$ представление V всегда оказывается прямой суммой представления группы $SO(3)$ и группы T^1 . При этом представление группы $SO(3)$ может быть только фундаментальным, т. е. $SO(3)$ -повороты реализуются в виде таких же поворотов в некотором трехмерном подпространстве объемлющего пространства. А вот представления группы T^1 могут реализовываться шестью разными способами, что приводит к появлению шести разных вложений для метрики Шварцшильда при $N = 6$.

ВАРИАНТ 1: реализация сдвигов по t в виде $SO(2)$ -поворотов в некотором двумерном подпространстве объемлющего пространства, имеющем, как следствие, сигнатуру $(++)$. Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \sin(\alpha t), & y^3 &= r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \cos(\alpha t), & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^2 &= \int dr \sqrt{\frac{R(R + 4\alpha^2 r^3)}{4\alpha^2 r^3(r - R)}}, & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

с сигнатурой $(++----)$, здесь α – произвольная положительная константа. Это вложение было найдено Казнером в 1921 году в работе [26] (там положено $\alpha = 1$) и является исторически первым вложением метрики Шварцшильда. Оно покрывает только область $r > R$ и имеет коническую особенность при $r = R$. Данное вложение не является асимптотически плоским, т. е. не стремится к четырехмерной плоскости при $r \rightarrow \infty$, и не может быть записано в терминах элементарных функций.

ВАРИАНТ 2: реализация сдвигов по t в виде $SO(1, 1)$ -поворотов в некотором двумерном подпространстве объемлющего пространства, имеющем, как следствие, сигнатуру $(+-)$. Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} r > R : & & r < R : \\ y^0 &= 2R \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2R}\right) & y^0 &= \pm 2R \sqrt{\frac{R}{r} - 1} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2R}\right), \\ y^1 &= \pm 2R \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2R}\right), & y^1 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r} - 1} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2R}\right), \\ y^2 &= \int dr \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^3}, & y^3 &= r \cos \theta, \quad y^4 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y^5 = r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

с сигнатурой $(+-----)$. Это вложение было предложено Фронсдалом в работе [6]. Определяемая такими формулами поверхность является гладкой (см. [6] или [25]), хотя при $r = R$ это не очевидно, поскольку вложение записано в сингулярных в этой точке координатах Шварцшильда. От других вложений вложение Фронсдала отличает тот факт, что оно покрывает все области риманова пространства, соответствующего решению Шварцшильда: два экземпляра области $r > R$ и два экземпляра области $r < R$, относящиеся к черной дыре и белой дыре. Оно тесно связано с известными координатами Крускала (см. [25]). Это вложение не является асимптотически плоским и не может быть записано в терминах элементарных функций.

ВАРИАНТ 3: реализация сдвигов по t в виде поворотов в двумерном “светоподобном” подпространстве объемлющего пространства (в котором одно направление времениподобно, а другое – светоподобно). Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} y^0 &= t\sqrt{1 - \frac{R}{r}}, & y^3 &= r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \left(\frac{\gamma^2 t^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{R}{r}} + \frac{u(r)}{\sqrt{2}}, & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \left(\frac{\gamma^2 t^2}{2} + 1 \right) \sqrt{1 - \frac{R}{r}} + \frac{u(r)}{\sqrt{2}}, & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

с сигнатурой $(+ + - - -)$. Здесь γ – произвольная положительная константа, а $u(r)$ – гладкая при $r > R$ функция, явный вид которой приведен в работе [25]. Это вложение было впервые предложено Фуджитани, Икедой и Мацумото в работе [27] (там $\gamma = \sqrt{2}$). Определяемое таким вложением многообразие покрывает только область $r > R$, оно имеет коническую особенность при $r = R$. Данное вложение не является асимптотически плоским, оно записывается в терминах элементарных функций.

В соответствии с типом поворотов в описанных трех вариантах вложения их можно классифицировать как эллиптическое, гиперболическое и параболическое соответственно.

ВАРИАНТ 4: реализация сдвигов по t в виде $SO(2)$ -поворотов в некотором двумерном подпространстве объемлющего пространства, сопровождаемых трансляцией в ортогональном ему направлении. Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} y^0 &= t', & y^3 &= r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{(3R)^{3/2}}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{t'}{3^{3/2}R} - \sqrt{\frac{R}{r}} \left(1 + \frac{r}{3R} \right)^{3/2} \right), & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^2 &= \frac{(3R)^{3/2}}{\sqrt{r}} \cos \left(\frac{t'}{3^{3/2}R} - \sqrt{\frac{R}{r}} \left(1 + \frac{r}{3R} \right)^{3/2} \right), & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (8)$$

с сигнатурой $(+ - - - -)$. Используемый здесь параметр $t' = t + h(r)$ (выражение для функции $h(r)$ приведено в работе [25]) отличается от времени Шварцшильда t , поэтому определяемая вложением поверхность является явно гладкой. При $r \rightarrow 0$ радиусы спиралей, определяемых при фиксированном r формулой (8), неограниченно растут, т. е. центральная сингулярность оказывается на бесконечности. Данное вложение покрывает половину соответствующего решению Шварцшильда риманова пространства, определяемую условием $v + u > 0$ в координатах Крускала–Шекереса (один экземпляр области $r > R$ и один экземпляр области $r < R$, относящиеся к черной дыре), а при $v + u \rightarrow 0$ оказывается $y^0 \rightarrow -\infty$. В отличие от всех прочих симметричных вложений в шестимерное пространство, данное вложение является асимптотически плоским. Как легко увидеть, оно записывается в терминах элементарных функций. Это вложение было предложено в работе [25], его можно назвать спиральным или асимптотически плоским.

ВАРИАНТ 5: реализация сдвигов по t в виде $SO(1, 1)$ -поворотов в некотором двумерном подпространстве объемлющего пространства, сопровождаемых трансляцией в ортогональном ему направлении. Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{R}{2\beta\sqrt{r_c r}} \left(e^{\beta t' + u(r)} - \frac{r - r_c}{R} e^{-\beta t' - u(r)} \right), & y^3 &= r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{R}{2\beta\sqrt{r_c r}} \left(e^{\beta t' + u(r)} + \frac{r - r_c}{R} e^{-\beta t' - u(r)} \right), & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^2 &= \hat{\gamma} t', & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (9)$$

с сигнатурой $(+ - - - -)$. Здесь $\hat{\gamma} > 0$, $r_c = R/(1 + \hat{\gamma}^2)$, $\beta \geq \sqrt{2r_c/27R^2(3R - 2r_c)}$, $t' = t + h(r)$, а $u(r)$ — гладкая при $r > 0$ функция, выражение для которой приведено в работе [25]. Это вложение было впервые предложено Дэвидсоном и Пазом в работе [28], в ней можно найти выражение для функции $h(r)$ (в форме (9) вложение было записано в [25]). Поверхность, определяемая данным вложением, является всюду гладкой (при $r \rightarrow 0$ будет $y^0 \rightarrow \infty$). Данное вложение, точно так же, как и спиральное, покрывает половину соответствующего решению Шварцшильда риманова пространства, а при $v + u \rightarrow 0$ оказывается $y^2 \rightarrow -\infty$. Оно не является асимптотически плоским и не может быть записано в терминах элементарных функций.

ВАРИАНТ 6: реализация сдвигов по t в виде поворотов в двумерном “светоподобном” подпространстве объемлющего пространства, сопровождаемых некоторой сложной трансляцией. Функция вложения имеет вид

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{v(\gamma t')^3}{6\sqrt{2}} + \frac{\gamma t'}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2v\gamma^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) + v \right) + u(r), & y^3 &= r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{v(\gamma t')^3}{6\sqrt{2}} + \frac{\gamma t'}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2v\gamma^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) - v \right) + u(r), & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^2 &= \frac{1}{2v\gamma^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) + v \frac{\gamma^2 t'^2}{2}, & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

с сигнатурой $(+ - - - -)$. Здесь $\gamma \geq 0$, $v > \sqrt{27/32}\gamma^2 R$, $t' = t + h(r)$, а $u(r)$ — гладкая при $r > 0$ функция, выражение для которой, как и для функции $h(r)$, приведено в работе [25]. Поверхность, определяемая данным вложением, является всюду гладкой (при $r \rightarrow 0$ либо $y^0 \rightarrow \infty$, либо $y^1 \rightarrow \infty$). Так же, как и два предыдущих вложения, данное вложение покрывает половину соответствующего решению Шварцшильда риманова пространства, а при $v + u \rightarrow 0$ оказывается $y^0 \rightarrow -\infty$. Оно не является асимптотически плоским и не может быть записано в терминах элементарных функций. Это вложение было предложено в работе [25], его можно назвать кубическим.

Отметим, что, поскольку метрика заряженной черной дыры Райснера–Нордстрема обладает той же симметрией, что и метрика Шварцшильда, для нее удастся построить минимальные вложения, аналогичные описанным здесь, в том числе гладкие при всех $r > 0$. Изложение этих результатов выходит за рамки настоящей статьи.

4. ВЛОЖЕНИЯ МЕТРИКИ ФРИДМАНА

Поскольку решения Фридмана не являются вакуумными, упомянутая в разделе 1 теорема Казнера не ограничивает их класс вложения, и для них существуют вложения в пятимерное объемлющее пространство. Такие вложения для всех трех моделей Фридмана (закрытой, открытой и пространственно-плоской) приведены в работе [22], однако впервые они были найдены в работе [29]. Некоторые особенности этих вложений обсуждаются в недавней работе [30].

В настоящем разделе мы покажем, что именно эти и только эти вложения можно получить с помощью описанного выше метода, а значит, они обладают симметрией соответствующей модели. Если для закрытой и открытой моделей это видно сразу (см. ниже формулы (12), (15)), то для пространственно-плоской модели наличие у соответствующей ей четырехмерной поверхности (задаваемой формулой (24), см. ниже) группы симметрии плоского трехмерного евклидова пространства совершенно не очевидно.

4.1. Закрытая модель Фридмана. Метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (11)$$

а симметрия в этом случае задается группой $SO(4)$. Будем искать четырехмерную поверхность $\mathcal{M}$, обладающую симметрией относительно такой группы. При этом будем считать, что указанной симметрией должна обладать не только вся поверхность $\mathcal{M}$, но и ее трехмерные подмногообразия, соответствующие фиксированным значениям параметра t .

Чтобы построить вложение в пятимерное пространство, необходимо найти представления V группы $SO(4)$, являющиеся либо пятимерными (псевдо)ортогональными матрицами, либо шестимерными матрицами вида (2). С учетом того, что V не должно иметь непрерывного ядра, единственным подходящим в данном случае оказывается пятимерное представление, являющееся прямой суммой векторного и скалярного представлений. При этом размерность получаемой поверхности $\mathcal{M}$ будет автоматически равна четырем. Учитывая, что начальный вектор y_0 может зависеть от t (см. после (3)), в результате получаем функцию вложения вида

$$\begin{aligned} y^0 &= f(t), & y^2 &= a(t) \sin \chi \cos \theta, \\ y^1 &= a(t) \cos \chi, & y^3 &= a(t) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ & & y^4 &= a(t) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Она описывает поверхность $\mathcal{M}$, подмногообразия $t = \text{const}$ которой представляют собой трехмерные сферы.

Подставляя (12) в (1) с правой частью, соответствующей метрике (11), находим, что сигнатура должна иметь вид $(+ - - -)$ и что

$$f(t) = \int dt \sqrt{\dot{a}^2(t) + 1}, \quad (13)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. Таким образом, формулы (12), (13) дают функцию вложения для решения Фридмана закрытого типа, они совпадают с приведенными в работе [22].

4.2. Открытая модель Фридмана. Метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (14)$$

а симметрия задается группой $SO(1, 3)$.

Будем действовать так же, как для закрытой модели. Необходимо найти представления V группы $SO(1, 3)$, являющиеся либо пятимерными (псевдо)ортогональными матрицами, либо шестимерными матрицами вида (2). Снова учитывая, что представление V не должно иметь непрерывного ядра, можно получить, что единственным подходящим опять оказывается пятимерное представление, являющееся прямой суммой векторного и скалярного представлений. Поскольку трехмерные подмногообразия искомой поверхности $\mathcal{M}$, соответствующие фиксированным значениям t , должны быть пространственноподобны по всем трем направлениям, соответствующую такому представлению функцию вложения необходимо записать в виде

$$\begin{aligned} y^0 &= a(t) \operatorname{ch} \chi, & y^2 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ y^1 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \cos \theta, & y^3 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi, \\ & & y^4 &= f(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Эта функция вложения описывает поверхность, подмногообразия $t = \operatorname{const}$ которой представляют собой трехмерные псевдосферы (гиперboloиды).

Подставляя (15) в (1) с правой частью, соответствующей метрике (14), находим, что сигнатура должна иметь вид $(+ - - - -)$ и что

$$f(t) = \int dt \sqrt{\dot{a}^2(t) - 1}. \quad (16)$$

Отметим, что выражение под корнем в этой формуле всегда неотрицательно вследствие одного из уравнений Фридмана. Таким образом, формулы (15) с учетом (16) дают функцию вложения для решения Фридмана открытого типа, они совпадают с приведенными в работе [22].

4.3. Пространственно-плоская модель Фридмана. Метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (17)$$

а симметрия в этом, наиболее сложном, случае задается группой движений трехмерной плоскости $G = SO(3) \triangleright T^3$ – полупрямым произведением группы вращений $SO(3)$ на группу трансляций T^3 . Элементы группы G можно записывать в виде $g = (O \times b)$, где $O \in SO(3)$ и $b \in T^3$, т. е. b_i – трехмерный вектор, параметризующий трансляции. Будем искать четырехмерную поверхность $\mathcal{M}$, которая обладает симметрией относительно такой группы, причем с такой же симметрией ее трехмерных подмногообразий, соответствующих фиксированным значениям параметра t . Интересно, что кроме ожидаемого варианта, когда эти трехмерные подмногообразия оказываются трехмерными плоскостями, могут возникнуть и другие варианты (см. ниже).

Для построения вложения в пятимерное пространство нужно найти представление V группы G , являющиеся либо пятимерными (псевдо)ортогональными матрицами, либо шестимерными матрицами вида (2). Для того чтобы описать представление группы G , удобно сначала задать представление ее подгруппы $SO(3)$, а затем

определить действие трансляций T^3 на пространстве этого представления. Как всегда, учтем, что представление V не должно иметь непрерывного ядра. Тогда можно показать, что существует единственный вариант, в котором V является пятимерной псевдоортогональной (в некотором базисе) матрицей. Пространство представления в этом случае соответствует прямой сумме векторного и двух скалярных представлений подгруппы $SO(3)$, а формула (3) принимает вид

$$y = V(g)y_0 = \left(\begin{array}{c|cc} O_{ik} & 0 & \beta b_i \\ \beta b_m O_{mk} & 1 & \frac{1}{2}\beta^2 b_m b_m \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_k^0 \\ s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где пятимерная матрица $V(g)$ записана в блочном виде и β – произвольная константа, причем $\beta \neq 0$. Квадратичная форма, которую сохраняет эта матрица, с точностью до множителя имеет вид

$$\eta = \left(\begin{array}{c|cc} -\delta_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad (19)$$

т.е. в данном случае $V(g)$ является псевдоортогональной матрицей, записанной в светоподобных координатах.

Можно также показать, что существует единственный вариант, в котором V является шестимерной матрицей вида (2). Пространство представления в этом случае соответствует прямой сумме векторного и трех скалярных представлений подгруппы $SO(3)$, а формула (3) принимает вид

$$y = V(g)y_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} O_{ik} & 0 & 0 & \beta b_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_k^0 \\ s_1^0 \\ s_2^0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\beta \neq 0$. Видно, что соответствующая Λ (см. формулу (2)) часть матрицы $V(g)$ является ортогональной.

Рассмотрим сначала случай представления (20). Поскольку элементы группы G зависят от шести вещественных параметров, а поверхность, соответствующая фиксированному значению t , должна быть трехмерна, необходимо, чтобы для начального вектора y_0 существовала трехмерная группа стабильности. Легко заметить, что это так, только если $x_k^0 = 0$, тогда группой стабильности будут $SO(3)$ -вращения. В результате, учитывая, что начальный вектор y_0 зависит от t , и записывая вектор b_i в сферических координатах r, θ, φ , получаем для данного случая функцию вложения в виде

$$\begin{aligned} y^0 &= s_1^0(t), & y^2 &= \beta r \cos \theta, \\ y^1 &= s_2^0(t), & y^3 &= \beta r \sin \theta \cos \varphi, \\ & & y^4 &= \beta r \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Подчеркнем, что здесь величина β не зависит от t , поэтому получить вложение метрики (17), используя такую функцию вложения, не удастся. Отметим, что сечение $t = \text{const}$ полученной поверхности представляет собой трехмерную плоскость.

Теперь рассмотрим случай представления (18). Снова необходимо обеспечить существование трехмерной группы стабильности вектора y_0 , чего можно добиться двумя способами. Во-первых, можно положить $x_k^0 = 0$ при $s_2^0 \neq 0$, тогда группой стабильности будут $SO(3)$ -вращения. Во-вторых, если $x_k^0 \neq 0$, то обязательно существует одномерная подгруппа стабильности – это $O \in SO(2)$, соответствующая поворотам вокруг вектора x_k^0 , а для того чтобы полная группа стабильности была трехмерной, необходимо положить $s_2^0 = 0$. Тогда группой стабильности будет группа движений плоскости, ортогональной вектору x_k^0 .

Сначала рассмотрим вариант $x_k^0 \neq 0$. Начальный вектор y_0 должен зависеть от t , однако направление вектора x_k^0 от t зависеть не может, поскольку определяется подгруппой стабильности вектора y_0 . Поэтому в рассматриваемом случае от t зависят только длина вектора x_k^0 (обозначим ее как $f(t)$) и величина $s_1^0(t)$. Выражая вектор $O_{ik}x_k^0$ через $f(t)$ и характеризующие O_{ik} сферические углы θ, φ , получаем из (18) функцию вложения в виде

$$\begin{aligned} y^+ &= \beta b_m O_{mk} x_k^0 + s_1^0(t), & y^2 &= f(t) \cos \theta, \\ y^- &= 0, & y^3 &= f(t) \sin \theta \cos \varphi, \\ & & y^4 &= f(t) \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (22)$$

где y^+, y^- – светоподобные координаты в объемлющем пространстве, метрика которого с точностью до знака дается формулой (19). Если заметить, что при фиксированных значениях параметров t, θ, φ координата y^+ принимает любые значения за счет изменения параметра трансляции b_m , то оказывается, что функция вложения (22) описывает четырехмерную светоподобную плоскость $y^- = 0$, а значит, получить вложение метрики (17), используя такую функцию вложения, не удастся. Отметим, что сечение $t = \text{const}$ полученной поверхности не является трехмерной плоскостью, хотя трехмерную плоскость можно получить, проводя сечение по-другому.

Остается рассмотреть вариант $x_k^0 = 0$ для случая представления (18). Снова учитывая, что начальный вектор y_0 зависит от t , и записывая вектор b_i в сферических координатах r, θ, φ , получаем для данного случая функцию вложения в виде

$$\begin{aligned} y^+ &= s_1^0(t) + \frac{1}{2} \beta^2 s_2^0(t) r^2, & y^2 &= \beta s_2^0(t) r \cos \theta, \\ y^- &= s_2^0(t), & y^3 &= \beta s_2^0(t) r \sin \theta \cos \varphi, \\ & & y^4 &= \beta s_2^0(t) r \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя ее в уравнение (1) с правой частью, соответствующей метрике (17), несложно найти функции $s_{1,2}^0(t)$ и получить (с точностью до лоренцева буста в плоскости y^+, y^-) окончательное выражение для функции вложения пространственно-плоской модели Фридмана:

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{2} \left(r^2 a(t) + \int \frac{dt}{\dot{a}(t)} + a(t) \right), & y^2 &= a(t) r \cos \theta, \\ y^1 &= \frac{1}{2} \left(r^2 a(t) + \int \frac{dt}{\dot{a}(t)} - a(t) \right), & y^3 &= a(t) r \sin \theta \cos \varphi, \\ & & y^4 &= a(t) r \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (24)$$

причем сигнатура объемлющего пространства имеет вид $(+ - - -)$. Это вложение совпадает с приведенным в работе [22]. Отметим, что сечение $t = \text{const}$ (равно как и любые другие сечения) полученной поверхности не является трехмерной плоскостью, несмотря на то что она обладает симметрией относительно группы движений такой плоскости. Это сечение представляет собой некоторую параболическую (поскольку y^+ квадратично по r) поверхность в четырехмерном “светоподобном” подпространстве (y^+, y^2, y^3, y^4) , являющуюся промежуточным вариантом между сферой, возникающей в закрытой модели Фридмана, и псевдосферой (гиперболоидом), возникающей в открытой модели Фридмана. Об этом же говорит и тот факт, что вложение (24) может быть получено некоторыми предельными переходами из вложений (12) и (15) закрытой и открытой моделей, на примере закрытой модели это показано в работе [11].

Таким образом, вложения для закрытой, открытой и пространственно-плоской моделей Фридмана можно классифицировать как эллиптическое, гиперболическое и параболическое соответственно. По способу реализации симметрии эти три вложения соотносятся друг с другом так же, как вложения Казнера, Фронсдала и Фуджитани–Икеды–Мацумото для метрики Шварцшильда (см. варианты 1, 2 и 3 в разделе 3).

Благодарности. Авторы благодарят организаторов IV Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (МКТП–2012), посвященной Александру Николаевичу Васильеву. Работа одного из авторов (А. Шейкин) поддержана фондом некоммерческих программ “Династия”.

Список литературы

- [1] M. Janet, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **5** (1926), 38–43.
- [2] E. Kartan, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **6** (1927), 1–7.
- [3] A. Friedman, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 625–649.
- [4] Д. Крамер, Х. Штефанн, М. Мак-Каллум, Э. Херльт, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, ред. Э. Шмүцер, Энергоиздат, М., 1982.
- [5] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, **II**, Наука, М., 1981.
- [6] C. Fronsdal, *Phys. Rev.*, **116:3** (1959), 778–781.
- [7] T. Regge, C. Teitelboim, “General relativity à la string: a progress report”, *Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (Trieste, Italy, 1975), ed. R. Ruffini, North-Holland, Amsterdam, 1977, 77–88.
- [8] S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, *Phys. Rev. D*, **14:12** (1976), 3301–3303.
- [9] A. Davidson, *Class. Quantum Grav.*, **16:3** (1999), 653–659, arXiv:gr-qc/9710005.
- [10] A. Davidson, D. Karasik, Y. Lederer, *Cold dark matter from dark energy*, arXiv:gr-qc/0111107.
- [11] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Internat. J. Modern Phys. D*, **21:5** (2012), 1250043, 19 pp., arXiv:1106.5212.
- [12] V. Tapia, *Class. Quant. Grav.*, **6:3** (1989), L49–L56.
- [13] R. Capovilla, A. Escalante, J. Guven, E. Rojas, *Internat. J. Theor. Phys.*, **48:9** (2009), 2486–2498, arXiv:gr-qc/0603126.
- [14] V. A. Franke, V. Tapia, *Nuovo Cimento B*, **107:6** (1992), 611–630.
- [15] D. Karasik, A. Davidson, *Phys. Rev. D*, **67:6** (2003), 064012, 17 pp., arXiv:gr-qc/0207061.
- [16] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **153:2** (2007), 271–288, arXiv:0711.0576.

- [17] S. A. Paston, A. N. Semenova, *Internat. J. Theor. Phys.*, **49**:11 (2010), 2648–2658, arXiv: 1003.0172.
- [18] С. А. Пастон, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 285–296, arXiv: 1111.1104.
- [19] С. А. Пастон, *Гравитация как теория вложения*, LAMBERT Acad. Publ., Saarbrücken, 2012.
- [20] M. Pavsic, V. Tapia, *Resource letter on geometrical results for embeddings and branes*, arXiv: gr-qc/0010045.
- [21] E. Kasner, *Amer. J. Math.*, **43**:2 (1921), 126–129.
- [22] J. Rosen, *Rev. Modern Phys.*, **37**:1 (1965), 204–214.
- [23] C. D. Collinson, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 403–410.
- [24] H. Goenner, “Local isometric embedding of riemannian manifolds and Einstein’s theory of gravitation”, *General Relativity and Gravitation*, **1**, ed. A. Held, Plenum Press, New York–London, 1980, 441–468.
- [25] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Class. Quant. Grav.*, **29**:9 (2012), 095022, 17 pp., arXiv: 1202.1204.
- [26] E. Kasner, *Amer. J. Math.*, **43**:2 (1921), 130–133.
- [27] T. Fujitani, M. Ikeda, M. Matsumoto, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1961), 43–61.
- [28] A. Davidson, U. Paz, *Found. Phys.*, **30**:5 (2000), 785–794.
- [29] H. P. Robertson, *Rev. Modern Phys.*, **5**:1 (1933), 62–90.
- [30] I. E. Gulamov, M. N. Smolyakov, *Gen. Relativ. Grav.*, **44**:3 (2012), 703–710, arXiv: 1111.0687.

Поступила в редакцию 28.01.2013