Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ю. Письмак, Ю. М. Письмак, Моделирование взаимодействия электромагнитного поля с двумерной поверхностью в рамках подхода Симанзика, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 3, 442–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:46:43

© 2013 г.

Д. Ю. Письмак*[†], Ю. М. Письмак*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В РАМКАХ ПОДХОДА СИМАНЗИКА

Подход Симанзика к построению моделей взаимодействия квантовых полей с макрообъектами позволяет с точностью до произвольной безразмерной константы найти общий вид функционала действия с потенциалом Черна–Саймонса для описания взаимодействия материальной поверхности с электромагнитным полем. Обсуждаются результаты, полученные в статических моделях такого типа. Рассматривается также простая динамическая модель взаимодействия безмассового скалярного поля с движущимися плоскостями.

Ключевые слова: эффект Казимира, электродинамика в пространстве с макроскопическими неоднородностями, потенциал Черна–Саймонса, взаимодействие безмассового поля с движущимися поверхностями.

DOI: 10.4213/tmf8495

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля на первоначальных этапах ее развития использовалась в теоретической физике для описания взаимодействий элементарных частиц. В теории элементарных частиц изучаются простейшие возбуждения однородного и изотропного вакуума, а квантово-полевые модели с пространственно-временными неоднородностями обычно не рассматриваются [1]. В 1948 г. Казимир рассчитал силу воздействия вакуумных флуктуаций на идеально проводящие незаряженные пластины плоского конденсатора и показал, что на достаточно малых расстояниях между ними возникают силы притяжения [2]. В настоящее время этот теоретический результат подтвержден экспериментально с высокой точностью [3].

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: ypismak@yahoo.com

[†]Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Zürich, Switzerland.
E-mail: dashap2@gmail.com

Характерными масштабами для явлений типа эффекта Казимира являются расстояния от 10 до 10000 нм. Это пограничная область, в которой проявляются закономерности как квантовой, так и классической физики и происходит много необычного. За последние годы заметно вырос интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям этой особой физики. Здесь уже получено много важных результатов на основе изучения моделей квантовой теории поля с пространственно-временными неоднородностями, поэтому исследованию таких моделей уделяется большое внимание.

В последние десятилетия активно исследовались особенности вакуумных флуктуаций в искривленном пространстве и модели скалярного поля с различными граничными условиями, которые применялись для описания реальных электромагнитных эффектов (см. обсуждение и ссылки в работах [4]–[8]). Однако с самого начала предполагалось, что задание граничных условий следует рассматривать как приближенное описание взаимодействия квантовых полей с веществом. В качестве обобщения метода граничных условий Симанзик [9] предложил моделировать это взаимодействие с помощью добавки к обычному функционалу действия квантово-полевой системы дополнительного функционала, сосредоточенного в области, в которой находится материальный объект (дефект). К действию дефекта предъявляется также дополнительное требование: оно не должно нарушать фундаментальные физические принципы исходной квантово-полевой модели, такие как калибровочная инвариантность, локальность и перенормируемость.

Сингулярные потенциалы типа дельта-функции, сосредоточенные на поверхности дефекта, воспроизводят в пределе сильной связи некоторые простые граничные условия (Дирихле и Неймана). Квантовые теории поля с дельтаобразным потенциалом исследовались в основном для скалярных полей (см., например, обзор [7]).

В работах [10]–[17] подход Симанзика был использован для построения единой модели, пригодной для изучения любых эффектов взаимодействия материальных тел с полями квантовой электродинамики. В настоящей статье мы приводим полученные на сегодняшний день результаты исследования различных эффектов взаимодействия фотонного поля с двумерной поверхностью в рамках данной модели. Свойства материала поверхности представлены константой ее взаимодействия с фотонным полем. Рассматривается также возможность использования подхода Симанзика и, в частности, модели из работ [10]–[17] для описания динамических эффектов на примере двух параллельных движущихся плоскостей, взаимодействующих с безмассовым скалярным полем.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Для описания взаимодействия квантового поля с материальным объектом Симанзик предложил функционал действия вида

$$S(\varphi) = S_V(\varphi) + S_{\text{def}}(\varphi);$$

здесь S_V – действие исходной квантово-полевой системы, S_{def} – действие дефекта:

$$S_V(\varphi) = \int L(\varphi(x)) d^D x, \quad S_{\text{def}}(\varphi) = \int_{\Gamma} L_{\text{def}}(\varphi(x)) d^{D'} x,$$

где Γ – подпространство размерности $D' < D$ в D -мерном пространстве [9].

Основные принципы квантовой электродинамики – калибровочная инвариантность, локальность, перенормируемость – налагают сильные ограничения на возможный вид действия дефекта S_{def} . Для двумерной поверхности без зарядов и токов, форма которой задана уравнением $\Phi(x) = 0$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, ее взаимодействие с электромагнитным полем $A_\mu(x)$ записывается в виде

$$S_\Phi(A) = \frac{a}{2} \int \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\lambda \Phi(x) A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x) \delta(\Phi(x)) d^4x, \quad (1)$$

где $F_{\nu\rho}(x) = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu$, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ обозначает полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon^{0123} = 1$), параметр a – безразмерная константа взаимодействия. Выражение (1) представляет собой наиболее общую форму сосредоточенного на поверхности дефекта калибровочно-инвариантного действия, инвариантного относительно перепараметризации и не содержащего параметров отрицательной размерности. Полное действие, включающее обычное действие фотонного поля в однородном пространстве, имеет вид

$$S(A, \Phi) = S_0(A) + S_\Phi(A), \quad S_0 = -\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) d^4x. \quad (2)$$

Для стационарных дефектов функция $\Phi(x)$ не зависит от времени. Для плоскости $x_3 = l$ мы имеем $\Phi(x) = x_3 - l$, для сферы радиуса r_0 с центром в начале координат мы имеем $\Phi(x) = \vec{x}^2 - r_0^2$. Предел $a \rightarrow \infty$ соответствует идеально проводящему материалу.

Для количественного описания всех физических явлений, возникающих в результате взаимодействия поверхности с фотонным полем, зарядами и токами, достаточно знать производящий функционал функций Грина. В случае калибровки $\phi(A) = 0$ он имеет вид

$$G(J) = C \int e^{iS(A, \Phi) + iJA} \delta(\phi(A)) DA, \quad (3)$$

где функционал $S(A, \Phi)$ определен в (2), а константа C задается соотношением $G(0)|_{a=0} = 1$.

Полное действие $S(A, \Phi)$ (2) системы записывается в виде $S(A, \Phi) = A_\mu K_\Phi^{\mu\nu} A_\nu / 2$. Интеграл (3) является гауссовым и вычисляется точно:

$$G(J) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(D_\Phi D^{-1}) - \frac{1}{2} J D_\Phi J \right\},$$

где $D_\Phi = iK_\Phi^{-1}$ – пропагатор фотонного поля при наличии дефекта в калибровке $\phi(A) = 0$, а D – пропагатор свободного фотонного поля в той же калибровке. Для статического дефекта $\ln G(0)$ определяет энергию Казимира.

3. ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА

Энергия Казимира для стационарного дефекта определяется соотношением

$$E_{\text{Cas}} = -\frac{1}{T} \text{Tr} \ln(D_\Phi D^{-1}),$$

где T – продолжительность (в нашей модели бесконечная) существования дефекта. В рассматриваемой нами модели энергия Казимира была вычислена в работе [10]

для двух параллельных плоскостей с константами a_1, a_2 взаимодействия с фотонным полем. Для плотности энергии взаимодействия пластин e_{Cas} было получено явное выражение в терминах полилогарифма $\text{Li}_4(x)$:

$$e_{\text{Cas}} = -\frac{1}{16\pi^2 r^3} \sum_{k=1}^2 \text{Li}_4\left(\frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + i(-1)^k(a_1 + a_2) - 1}\right).$$

Функция $\text{Li}_4(x)$ определяется с помощью интегрального представления:

$$\text{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^4} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} k^2 \ln(1 - xe^{-k}) dk.$$

Для плоскостей из одинакового материала (при $a_1 = a_2 = a$) зависимость давления (плотности силы) Казимира $F_{\text{Cas}}(r, a)$ на пластины от расстояния r между ними равна

$$F_{\text{Cas}}(r, a) = -\frac{\partial e_{\text{Cas}}(r, a)}{\partial r} = -\frac{\pi^2}{240r^4} f(a).$$

Функция $f(a)$ является четной и имеет минимум при $|a| = a_m \approx 0.5892$, при этом $f(a_m) \approx -0.11723$; кроме того, $f(0) = f(a_0) = 0$, где $a_0 \approx 1.03246$, и $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = 1$. При $0 < a < a_0$ (при $a > a_0$) функция $f(a)$ отрицательна (положительна). Таким образом, сила F_{Cas} является отталкивающей при значениях $|a| < a_0$ и притягивающей при $|a| > a_0$. При больших значениях $|a|$ она совпадает с обычной силой Казимира между идеально проводящими пластинами. Модель предсказывает максимальную силу отталкивания F_{Cas} (составляющую примерно 10% от силы Казимира идеально проводящих плоскостей). Мы ожидаем, что это максимальное значение достигается при $|a| \approx 0.6$.

Для двух бесконечно толстых пластин существование отталкивающей силы Казимира было предсказано в работе [18].

Для двух параллельных плоскостей плотность силы Казимира конечна, но для сферы это неверно. Формально энергия и сила Казимира для сферы не существуют из-за ультрафиолетовых расходимостей. Поэтому для придания смысла этим величинам требуются регуляризация и перенормировка. Ультрафиолетовые расходимости производящего функционала $G(J)$ устраняются с помощью регуляризации типа Паули–Вилларса путем преобразования свободного действия фотонного поля [13]:

$$S_0 \rightarrow S_{0r} = -\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu}(x)(1 + M^{-2} \partial_\lambda \partial^\lambda) F_{\mu\nu}(x) d^4x, \quad S(A) \rightarrow S_r(A) = S_{0r} + S_{\text{def}}.$$

В регуляризованной теории появляется один дополнительный параметр M , имеющий размерность массы, но калибровочная инвариантность не нарушается. При больших значениях M асимптотика энергии Казимира E_{Cas} в регуляризованной теории имеет вид [13]

$$E_{\text{Cas}} = M^3 r_0^2 C(a) + MD(a) + \frac{F(a)}{r_0} + O\left(\frac{1}{M}\right),$$

где $C(a)$, $D(a)$, $F(a)$ – конечные величины и

$$F(a) = \frac{3}{64} \frac{a^2}{4 + a^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{4 - 4a^2 \mathcal{G}_l(p) \mathcal{R}_l(p)}{4 + a^2} + \frac{a^2 (2l+1)^4}{(4 + a^2)(4p^2 + (2l+1)^2)^3} \right) dp.$$

Здесь использованы обозначения

$$\mathcal{G}_l(x) = I_{l+1/2}(x) K_{l+1/2}(x),$$

$$\mathcal{R}_l(x) = \left(\frac{1}{2} I_{l+1/2}(x) + I'_{l+1/2}(x) \right) \left(\frac{1}{2} K_{l+1/2}(x) + K'_{l+1/2}(x) \right),$$

где $I_{l+1/2}(x)$ и $K_{l+1/2}(x)$ – функции Бесселя.

При $a \rightarrow \infty$ величина $F(a)/r_0$ совпадает с известным результатом, полученным для идеально проводящей сферы [14]. Если к лагранжиану модели добавить не зависящее от фотонного поля выражение

$$L(x) = (Ar_0^2 + B)\delta(|\vec{x}| - r_0),$$

содержащее два параметра A и B , то их перенормировка устраняет расходимости. В силу конечности величины $F(a)$ для модифицированного действия Черна–Саймонса не требуется перенормировки радиуса r_0 , которая использовалась в модели с граничными условиями в работе [15] при расчете энергии Казимира для сферы. Перенормированная энергия Казимира при определенных значениях перенормированных параметров A_r , B_r может оказаться ограниченной снизу и, следовательно, сфера может быть стабильной.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ТОКОМ И ЗАРЯДОМ

В модели с потенциалом Черна–Саймонса взаимодействия поверхности с фотонным полем изучались поля, возникающие в системах плоскость–кулоновский центр и плоскость–параллельный ей ток [10]. Если уравнение, описывающее положение материальной плоскости, есть $x_3 = 0$, а заряд e находится в точке $x = (0, 0, l)$, $l \geq 0$, то электрическое поле в этой системе равно полю такого же электрического заряда, расположенного в той же точке, и полупространства $x_3 \leq 0$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{eff}} = 1 + 2a$. Кроме электрического поля, имеется также постоянное магнитное поле $\vec{H}$:

$$H_1 = \frac{e a x_1}{(a^2 + 1)\rho^3}, \quad H_2 = \frac{e a x_2}{(a^2 + 1)\rho^3}, \quad H_3 = \frac{e a (|x_3| + l)}{(a^2 + 1)\rho^3},$$

где $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + (|x_3| + l)^2)^{1/2}$. Если материальная поверхность представляет собой плоскость $x_3 = 0$ и параллельно ей течет ток j по линии $x_3 = l$, $x_2 = 0$, то в этой системе магнитное поле равно полю, создаваемому тем же током и полупространством $x_3 \leq 0$ с магнитной проницаемостью $\mu_{\text{eff}} = 1/(1 + 2a)$. При таких токе и плоскости имеется также аномальное электрическое поле $\vec{E}$:

$$E_1 = 0, \quad E_2 = \frac{2ja}{a^2 + 1} \frac{x_2}{\tau^2}, \quad E_3 = \frac{2ja}{a^2 + 1} \frac{|x_3| + l}{\tau^2},$$

где $\tau = (x_2^2 + (|x_3| + l)^2)^{1/2}$.

5. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА–ПОЛДЕРА

Потенциал Казимира–Полдера описывает взаимодействие нейтрального атома с поверхностью материального тела, которое представляет собой взаимодействие флуктуирующего электрического дипольного момента атома со своим изображением. Впервые расчеты этого потенциала проведены Казимиром и Полдером в 1948 г. в работе [19]. Для модели с потенциалом Черна–Саймонса рассчитан потенциал Казимира–Полдера для плоскости. Для энергии основного состояния атома, находящегося на расстоянии l от плоскости, был получен следующий результат [16]:

$$E = -\frac{1}{64\pi^2 l^3} \frac{a^2}{1+a^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\omega l} 2(1+2\omega l) \alpha_{33}(i\omega) d\omega + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} e^{-2\omega l} (1+2\omega l+4\omega^2 l^2) (\alpha_{11}(i\omega) + \alpha_{22}(i\omega)) d\omega \right) + \\ + \frac{1}{64\pi^2 l^2} \frac{a}{1+a^2} \int_0^{+\infty} e^{-2\omega l} 2\omega(1+2\omega l) (\alpha_{12}(i\omega) - \alpha_{21}(i\omega)) d\omega.$$

В пределе $a \rightarrow +\infty$ это выражение совпадает с хорошо известным результатом, полученным Казимиром и Полдером для идеально проводящей плоскости [19]. Специфика потенциала Черна–Саймонса проявляется в присутствии вкладов недиагональных элементов матрицы $\alpha_{jk}(i\omega)$ поляризуемости атома. Эти вклады при определенных условиях могут быть доминирующими, что дает возможность их экспериментального обнаружения и тем самым проверки применимости модели взаимодействия Черна–Саймонса [16].

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

В модели с потенциалом Черна–Саймонса уравнения Максвелла модифицируются. Это проявляется в изменении законов распространения электромагнитных волн. В рамках модели с потенциалом Черна–Саймонса в работе [17] было изучено распространение волн в разделенном материальной плоскостью пространстве. Одной из особенностей этих процессов является независимость коэффициентов прохождения и отражения от угла падения волны и ее частоты: если a – константа взаимодействия поверхности с электромагнитным полем, то коэффициент отражения волны равен $a^2/(1+a^2)$, коэффициент прохождения равен $1/(1+a^2)$. Направления прошедшего и падающего лучей совпадают. При прохождении и отражении луча меняется его поляризация. При этом чем меньше относительная интенсивность отраженной или прошедшей волн, тем сильнее меняется их поляризация по сравнению с поляризацией падающей волны. При малых a векторы электрического поля отраженной и падающей волн почти ортогональны, а падающей и прошедшей почти параллельны. Если $a \gg 1$, то почти ортогональны друг другу напряженности электрического поля падающей и прошедшей волн, а у отраженной и падающей они почти параллельны [17].

7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Кроме статических эффектов, рассмотренных выше, также представляют несомненный интерес случаи взаимодействия полей с движущимися макрообъектами. В рамках рассматриваемой модели для этого достаточно предположить, что функция $\Phi(x)$, определяющая форму поверхности, зависит от времени. В настоящей работе мы рассматриваем такую возможность для фотодинамики. Ограничимся моделью скалярного поля.

В простейшем случае взаимодействия движущихся вдоль оси x_3 двух перпендикулярных к ней плоскостей с безмассовым скалярным полем функционал действия записывается в виде

$$S(\varphi, v, a_1, a_2) = \frac{1}{2} \int ((\partial\varphi(x))^2 - (a_1\delta(x_3 - vx_0) + a_2\delta(x_3 + vx_0))\varphi^2(x)) dx.$$

Здесь v – скорость движения, a_1 – константа взаимодействия с полем плоскости, движущейся в положительном направлении оси x_3 . Плоскость с константой взаимодействия a_2 движется в противоположном направлении. Чтобы решить уравнение Эйлера–Лагранжа

$$(\partial_0^2 - \vec{\partial}^2 + a_1\delta(x_3 - vx_0) + a_2\delta(x_3 + vx_0))\varphi(x) = 0$$

для рассматриваемой модели, удобно воспользоваться преобразованием Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(x_0, x_3; k_1, k_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2$$

и перейти от координат x_0, x_3 к новым координатам x_+, x_- :

$$\begin{aligned} x_+ &\equiv x_3 - vx_0, & x_- &\equiv x_3 + vx_0, \\ \partial_0 &= v(\partial_- - \partial_+), & \partial_3 &= \partial_+ + \partial_-, & \partial_0^2 - \partial_3^2 &= (v^2 - 1)(\partial_+^2 + \partial_-^2) - 2(v^2 + 1)\partial_+\partial_-. \end{aligned}$$

В этих переменных уравнение Эйлера–Лагранжа переписывается в виде

$$((v^2 - 1)(\partial_+^2 + \partial_-^2) - 2(v^2 + 1)\partial_+\partial_- + k^2 + a_1\delta(x_+) + a_2\delta(x_-))\varphi_k(x) = 0, \quad (4)$$

где мы воспользовались обозначениями $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и $\varphi_k(x) = \varphi(x_+, x_-; k_1, k_2)$. Мы построим решение этого уравнения в виде ряда теории возмущений. Если известно начальное приближение $\varphi_k^{(0)}(x)$, которое является решением уравнения (4) при $a_1 = a_2 = 0$, то задача сводится к вычислению функции Грина двумерного линейного дифференциального оператора с двумя дельтаобразными потенциалами. Она является частным случаем более общей задачи нахождения решения уравнения

$$[L(\vec{\partial}) + a_1\delta(x_1) + a_2\delta(x_2)]G(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \quad (5)$$

Здесь $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2)$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$, а $L(\vec{\partial}) = L(\partial_1, \partial_2)$ – дифференциальный оператор полиномиального вида по производным ∂_1, ∂_2 . Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\vec{p}\vec{x}_1 - i\vec{q}\vec{x}_2} G(\vec{p}, \vec{q}) dp dq. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в (5), получаем уравнение для $G(\vec{p}, \vec{q})$:

$$L(i\vec{p})G(\vec{p}, \vec{q}) + a_1 \int G(\vec{p}, \vec{q}) dp_1 + a_2 \int G(\vec{p}, \vec{q}) dp_2 = \delta(\vec{p} - \vec{q}). \quad (7)$$

Решение этого уравнения представим в виде суммы:

$$G(\vec{p}, \vec{q}) = G_0(\vec{q})\delta(\vec{p} - \vec{q}) + G_1(p_1, \vec{q})\delta(p_2 - q_2) + G_2(p_2, \vec{q})\delta(p_1 - q_1) + G_3(\vec{p}, \vec{q}),$$

где функции G_i , $i = 1, 2, 3$, несингулярны при $\vec{p} = \vec{q}$. Функция $G(\vec{p}, \vec{q})$ удовлетворяет уравнению (7) в том и только в том случае, когда для функций G_i , $i = 0, 1, 2, 3$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} L(i\vec{q})G_0(\vec{q}) &= 1, \\ L(ip_1, iq_2)G_1(p_1, \vec{q}) + a_1G_0(\vec{q}) + a_1J_1(\vec{q}) &= 0, \\ L(iq_1, ip_2)G_2(p_2, \vec{q}) + a_2G_0(\vec{q}) + a_2J_2(\vec{q}) &= 0, \\ L(i\vec{p})G_3(\vec{p}, \vec{q}) + a_1G_2(p_2, \vec{q}) + a_2G_1(p_1, \vec{q}) + a_1J_{32}(p_2, \vec{q}) + a_2J_{31}(p_1, \vec{q}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} J_1(\vec{q}) &= \int G_1(p_1, \vec{q}) dp_1, & J_2(\vec{q}) &= \int G_2(p_2, \vec{q}) dp_2, \\ J_{32}(p_2, \vec{q}) &= \int G_3(\vec{p}, \vec{q}) dp_1, & J_{31}(p_1, \vec{q}) &= \int G_3(\vec{p}, \vec{q}) dp_2. \end{aligned}$$

Из формул (8) следует, что

$$G_0(\vec{q}) = L^{-1}(i\vec{q}), \quad (9)$$

$$G_1(p_1, \vec{q}) = -a_1G_0(p_1, q_2)(G_0(\vec{q}) + J_1(\vec{q})), \quad (10)$$

$$G_2(p_2, \vec{q}) = -a_2G_0(q_1, p_2)(G_0(\vec{q}) + J_2(\vec{q})). \quad (11)$$

Уравнения для $J_1(\vec{q})$ и $J_2(\vec{q})$ получаем, интегрируя равенства (10) и (11) по p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} J_1(\vec{q}) &= -a_1g_1(q_2)(G_0(\vec{q}) + J_1(\vec{q})), & g_1(q_2) &\equiv \int G_0(p_1, q_2) dp_1, \\ J_2(\vec{q}) &= -a_2g_2(q_1)(G_0(\vec{q}) + J_2(\vec{q})), & g_2(q_1) &\equiv \int G_0(q_1, p_2) dp_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_1(\vec{q}) = -\frac{a_1g_1(q_2)G_0(\vec{q})}{1 + a_1g_1(q_2)}, \quad J_2(\vec{q}) = -\frac{a_2g_2(q_1)G_0(\vec{q})}{1 + a_2g_2(q_1)}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и (11), получаем

$$G_1(p_1, \vec{q}) = -\frac{a_1G_0(p_1, q_2)G_0(\vec{q})}{1 + a_1g_1(q_2)}, \quad G_2(p_2, \vec{q}) = -\frac{a_2G_0(q_1, p_2)G_0(\vec{q})}{1 + a_2g_2(q_1)}.$$

Теперь, подставив в последнее из равенств (8) соотношение

$$G_3(\vec{p}, \vec{q}) = G_0(\vec{p})F(\vec{p}, \vec{q})G_0(\vec{q}), \quad (12)$$

получим в результате уравнение

$$F(\vec{p}, \vec{q}) + a_1(f_2(p_2, q_1) + H_2(p_2, \vec{q})) + a_2(f_1(p_1, q_2) + H_1(p_1, \vec{q})) = 0, \quad (13)$$

где

$$f_1(p_1, q_2) = -\frac{a_1 G_0(p_1, q_2)}{1 + a_1 g_1(q_2)}, \quad f_2(p_2, q_1) = -\frac{a_2 G_0(q_1, p_2)}{1 + a_2 g_2(q_1)}$$

и

$$H_1(p_1, \vec{q}) = \int G_0(\vec{p}) F(\vec{p}, \vec{q}) dp_2, \quad H_2(p_2, \vec{q}) = \int G_0(\vec{p}) F(\vec{p}, \vec{q}) dp_1. \quad (14)$$

Мы видим, что функция $F(\vec{p}, \vec{q})$ записывается как

$$F(\vec{p}, \vec{q}) = F_1(p_1, \vec{q}) + F_2(p_2, \vec{q}).$$

Подставим это равенство в (13). В результате с учетом (14) получим уравнения, которым удовлетворяют функции F_1 и F_2 :

$$\begin{aligned} F_1(p_1, \vec{q}) + a_2(f_1(p_1, q_2) + g_2(p_1)F_1(p_1, \vec{q}) + K_1(p_1, \vec{q})) &= 0, \\ F_2(p_2, \vec{q}) + a_1(f_2(p_2, q_1) + g_1(p_2)F_2(p_2, \vec{q}) + K_2(p_2, \vec{q})) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы положили

$$K_1(p_1, \vec{q}) = \int G_0(\vec{p}) F_2(p_2, \vec{q}) dp_2, \quad K_2(p_2, \vec{q}) = \int G_0(\vec{p}) F_1(p_1, \vec{q}) dp_1. \quad (16)$$

Из (15) получаем

$$\begin{aligned} F_1(p_1, \vec{q}) &= -\frac{a_2(f_1(p_1, q_2) + K_1(p_1, \vec{q}))}{1 + a_2 g_2(p_1)}, \\ F_2(p_2, \vec{q}) &= -\frac{a_1(f_2(p_2, q_1) + K_2(p_2, \vec{q}))}{1 + a_1 g_1(p_2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Итерируя эти уравнения, легко убедиться, что

$$F_1(p_1, \vec{q}) = F_{11}(p_1, q_1) + F_{12}(p_1, q_2), \quad F_2(p_2, \vec{q}) = F_{21}(p_2, q_1) + F_{22}(p_2, q_2). \quad (18)$$

В силу симметрии $F(\vec{p}, \vec{q}) = F(\vec{q}, \vec{p})$ функции $F_{11}(p_1, q_1)$, $F_{22}(p_2, q_2)$ также обладают симметрией относительно перестановки аргументов и

$$F_{12}(p_1, q_2) + F_{21}(p_2, q_1) = F_{12}(q_1, p_2) + F_{21}(q_2, p_1).$$

Для функций F_{ij} мы получаем из соотношений (16)–(18) уравнения

$$\begin{aligned} F_{11}(p_1, q_1) &= -\frac{a_2 K_{11}(p_1, q_1)}{1 + a_2 g_2(p_1)}, & F_{12}(p_1, q_2) &= -\frac{a_2(f_1(p_1, q_2) + K_{12}(p_1, q_2))}{1 + a_2 g_2(p_1)}, \\ F_{22}(p_2, q_2) &= -\frac{a_1 K_{22}(p_2, q_2)}{1 + a_1 g_1(p_2)}, & F_{21}(p_2, q_1) &= -\frac{a_1(f_2(p_2, q_1) + K_{21}(p_2, q_1))}{1 + a_1 g_1(p_2)}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} K_{11}(p_1, q_1) &= \int G_0(\vec{p}) F_{21}(p_2, q_1) dp_2, & K_{12}(p_1, q_2) &= \int G_0(\vec{p}) F_{22}(p_2, q_2) dp_2, \\ K_{22}(p_2, q_2) &= \int G_0(\vec{p}) F_{12}(p_1, q_2) dp_1, & K_{21}(p_2, q_1) &= \int G_0(\vec{p}) F_{11}(p_1, q_1) dp_1. \end{aligned}$$

Если представить функции $F_{ij}(p_i, q_j)$ в виде

$$F_{11}(p_1, q_1) = \frac{a_2 \Phi_{11}(p_1, q_1)}{(1 + a_2 g_2(p_1))(1 + a_2 g_2(q_1))}, \quad F_{12}(p_1, q_2) = \frac{a_2 \Phi_{12}(p_1, q_2)}{(1 + a_2 g_2(p_1))(1 + a_1 g_1(q_2))},$$

$$F_{21}(p_2, q_1) = \frac{a_1 \Phi_{21}(p_2, q_1)}{(1 + a_1 g_1(p_2))(1 + a_2 g_2(q_1))}, \quad F_{22}(p_2, q_2) = \frac{a_1 \Phi_{22}(p_2, q_2)}{(1 + a_1 g_1(p_2))(1 + a_1 g_1(q_2))},$$

то функции $\Phi_{ij}(p_i, q_j)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(p_1, q_1) &= - \int \frac{G_0(\vec{p}) a_1 \Phi_{21}(p_2, q_1)}{1 + a_1 g_1(p_2)} dp_2, \\ \Phi_{12}(p_1, q_2) &= -G_0(p_1, q_2) - \int \frac{G_0(\vec{p}) a_1 \Phi_{22}(p_2, q_2)}{1 + a_1 g_1(p_2)} dp_2, \\ \Phi_{21}(p_2, q_1) &= -G_0(q_1, p_2) - \int \frac{G_0(\vec{p}) a_2 \Phi_{11}(p_1, q_1)}{1 + a_2 g_2(p_1)} dp_1, \\ \Phi_{22}(p_2, q_2) &= - \int \frac{G_0(\vec{p}) a_2 \Phi_{12}(p_1, q_2)}{1 + a_2 g_2(p_1)} dp_1, \end{aligned}$$

эквивалентной уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(p_1, q_1) &= \int Q_1(p_1, p') \Phi_{11}(p', q_1) dp' + D_1(p_1, q_1), \\ \Phi_{12}(p_1, q_2) &= \int Q_1(p_1, p') \Phi_{12}(p', p_2) dp' - G_0(p_1, q_2), \\ \Phi_{21}(p_2, q_1) &= \int Q_2(p_2, p') \Phi_{21}(p', q_1) dp' - G_0(q_1, p_2), \\ \Phi_{22}(p_2, q_2) &= \int Q_2(p_2, p') \Phi_{22}(p', q_2) dp' + D_2(p_2, q_2). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1(p, p') &= \frac{a_2 D_1(p, p')}{1 + a_2 g_2(p')}, & Q_2(p, p') &= \frac{a_1 D_2(p, p')}{1 + a_1 g_1(p')}, \\ D_1(p, p') &= \int \frac{a_1 G_0(p, q) G_0(p', q)}{1 + a_1 g_1(q)} dq, & D_2(p, p') &= \int \frac{a_2 G_0(q, p) G_0(q, p')}{1 + a_2 g_2(q)} dq. \end{aligned}$$

Таким образом, если найдены решения $R_1(p, q)$, $R_2(p, q)$ двух интегральных уравнений

$$R_i(p, q) - \int Q_i(p, p') R_i(p', q) dp' = \delta(p - q), \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

то задача вычисления функций $\Phi_{ij}(p, q)$, $i, j = 1, 2$, и функции $F(\vec{p}, \vec{q})$ сводится к интегрированию:

$$\begin{aligned} \Phi_{ii}(p, q) &= \int R_i(p, p') D_i(p', q) dp', & i &= 1, 2, \\ \Phi_{ij}(p, q) &= - \int R_i(p, p') G_0(p', q) dp', & i, j &= 1, 2, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

и

$$F(\vec{p}, \vec{q}) = \int \frac{F_1(p_1, p')}{1 + a_2 g_2(p_1)} \left(\frac{D_1(p', q_1)}{1 + a_2 g_2(q_1)} - \frac{G_0(p', q_2)}{1 + a_1 g_1(q_2)} \right) dp' + \\ + \int \frac{F_2(p_2, p')}{1 + a_1 g_1(p_2)} \left(\frac{G_0(p', q_1)}{1 + a_2 g_2(q_1)} - \frac{D_1(p', q_2)}{1 + a_1 g_1(q_2)} \right) dp'.$$

Подставив последнее равенство в (12), мы получаем функцию $G_3(\vec{p}, \vec{q})$. Таким образом, наиболее нетривиальным в построении решения уравнения (5) является решение интегральных уравнений (19).

Мы применим полученные общие результаты к анализу уравнения (4). Для него мы имеем

$$L(i\vec{p}) = (1 - v^2)(p_1^2 + p_2^2) + 2(v^2 + 1)p_1 p_2 + k^2 = G_0^{-1}(\vec{p}).$$

Следовательно,

$$G_0(p_1, p_2) = G_0(p_2, p_1), \quad g_1(q) = g_2(q) \equiv g(q), \quad D_i(p, p') = D(p, p'; a_i).$$

Необходимые для расчета функций $g(q)$, $D(p, p'; a_i)$ интегрирования удается выполнить, и мы получаем следующие результаты:

$$g(q) \equiv \int G_0(p, q) dp = \frac{\pi}{\sqrt{4q^2 v^2 + k^2(v^2 - 1)}}, \\ D(p, q, a) \equiv \int \frac{a G_0(p, p') G_0(q, p')}{1 + a g(p')} dp' = \frac{a X(p, a)}{Y(p, q, a)} + \frac{a X(q, a)}{Y(q, p, a)},$$

где

$$X(z, a) = (1 - v^2)W(z) - a\pi(1 - v^2)^2 \sqrt{W(z)}, \\ Y(z_1, z_2, a) = 2\pi(z_1 - z_2)g(z_1)^{-1}((1 - v^2)^2 a^2 \pi^2 - W(z_1)) \times \\ \times (2\pi(1 + v^2)g(z_1)^{-1} - (1 + 6v^2 + v^4)z_1 + (1 - v^2)^2 z_2), \\ W(z) = (1 - v^2)(1 + v^2)^2 k^2 - 4v^2 z((1 + 6v^2 + v^4)z - 2\pi(1 + v^2)g(z)^{-1}).$$

Таким образом, для ядер Q_1 и Q_2 уравнений (19) в интересующей нас задаче имеются явные аналитические выражения. В них входят параметры a_1 , a_2 , v , k . Это дает возможность построения различных приближенных решений. В частности, не составляет большого труда расчет низших порядков теории возмущений по константам взаимодействия a_1 , a_2 . Уравнения (19) упрощаются в области больших и малых значений параметра k (при больших и малых поперечных импульсах). В случае малых скоростей $v \ll 1$ мы имеем процесс, в котором будет наблюдаться эффект Казимира с малыми поправками. При больших скоростях $v \sim 1$ ядра Q_1 , Q_2 уравнений (19) будут определяться предельным значением

$$\lim_{v \rightarrow 1} D(p, q, a) = \frac{ak^4}{p - q} \left(\frac{\theta(p)}{(k^2 + 4p^2)(k^2 + 4a^2\pi^2 p^2)} - \frac{\theta(q)}{(k^2 + 4q^2)(k^2 + 4a^2\pi^2 q^2)} \right),$$

которое, очевидно, существенно проще, чем выражение для $D(p, q, a)$ при промежуточных значениях скорости $0 < v < 1$. Все это позволяет надеяться на интересные результаты при более детальном исследовании свойств решений уравнений (4) и (19).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, представленные в настоящей работе, показывают, что модель с потенциалом Черна–Саймонса, которая использовалась при их получении, оказывается пригодной для исследования многих физических явлений, возникающих при взаимодействии материальной поверхности с электромагнитным полем. Это взаимодействие в модели описывается единственным безразмерным параметром. Поэтому наличие большого числа различных предсказаний позволяет экспериментально проверить пригодность модели для описания реальности, а также обоснованность предположений, использованных при ее построении.

Одним из важных предсказаний является нарушение Р- и Т-четности при конечных значениях параметра a , характеризующего свойства материала поверхности. Оно возникает из-за наличия полностью антисимметричного тензора $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ в действии Черна–Саймонса и проявляется в приведенных нами результатах в отсутствии симметрии относительно замены $a \rightarrow -a$.

Как это продемонстрировано для случая сферы, перенормируемость энергии Казимира требует добавки к действию Черна–Саймонса дополнительного действия, не зависящего от электромагнитного поля. Для сокращения ультрафиолетовых расходимостей достаточно предположить, что оно является функционалом поверхности дефекта, инвариантным относительно ее перепараметризации. Это дает возможность найти для заданной поверхности по характеру расходимостей, возникающих при снятии регуляризации, вид дополнительного действия с минимально необходимым числом параметров (для сферы таких параметров два). Таким образом, в перенормированной теории с неплоским дефектом число параметров оказывается большим, чем то, которое содержится непосредственно в действии Черна–Саймонса. При этом действие перенормируемой модели с наименьшим числом параметров с точностью до их значений однозначно фиксируется физическими принципами, предложенными для построения моделей в рамках рассматриваемого подхода.

Модель с потенциалом Черна–Саймонса можно использовать для изучения динамических эффектов, аналогичных тем, которые рассматривались в модели со скалярным полем. Хотя расчеты в такой модели окажутся значительно более громоздкими, принципиально новых сложностей не возникнет.

Благодарности. Работы была частично поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (проект № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Физматлит, М., 1984; К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, Мир, М., 1984.
- [2] H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Acad. Wetenschap.*, **51** (1948), 793–795.
- [3] G. L. Klimchitskaya, R. S. Decca, E. Fischbach, D. E. Krause, D. López, V. M. Mostepanenko, *Internat. J. Modern Phys. A*, **20**:11 (2005), 2205–2221, arXiv: quant-ph/0506120.
- [4] S. K. Blau, M. Visser, A. Wipf, *Nucl. Phys. B*, **310**:1 (1988), 163–180, arXiv: 0906.2817.
- [5] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, International Series of Monographs on Physics, **145**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
- [6] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Phys. Rept.*, **353**:1–3 (2001), 1–205, arXiv: quant-ph/0106045.

- [7] K. A. Milton, *J. Phys. A*, **37**:38 (2004), R209–R277, arXiv: hep-th/0406024.
- [8] K. A. Milton, “The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy”, *Applied Field Theory*, Proceedings of the 17th Symposium on Theoretical Physics (Seoul National University, Korea, June 29–July 1, 1998), eds. C. Lee, H. Min, Q-H. Park, Chungbum, Seoul, 1999, 1–55, arXiv: hep-th/9901011.
- [9] K. Symanzik, *Nucl. Phys. B*, **190**:1 (1981), 1–44.
- [10] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *Casimir effect for thin films from imperfect materials*, arXiv: hep-th/0505218; *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6525–6532, arXiv: hep-th/0606058.
- [11] I. V. Fialkovsky, V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2601–2616, arXiv: hep-th/0311236; *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6357–6363.
- [12] I. V. Fialkovsky, V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *J. Phys. A*, **41**:7 (2008), 075403, 8 pp.
- [13] В. Н. Марков, Ю. А. Петухин, Ю. М. Письмак, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*, **4**:4 (2009), 285–296.
- [14] T. H. Boyer, *Phys. Rev.*, **174**:5 (1968), 1764–1776.
- [15] V. V. Nesterenko, I. G. Pirozhenko, *Phys. Rev. D*, **57**:2 (1998), 1284–1290.
- [16] V. N. Marachevsky, Yu. M. Pis'mak, *Phys. Rev. D*, **81**:6 (2010), 065005, 6 pp., arXiv: 0907.1985; В. Н. Марачевский, Ю. М. Письмак, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*, **4**:4 (2008), 102–109.
- [17] Д. Ю. Письмак, Ю. М. Письмак, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 69–78; D. Pis'mak, Yu. Pis'mak, “Scattering of electromagnetic waves on a flat surface in a model with potential of Chern–Simons”, *Proceeding of the 12 Small Triangle Meeting on Theoretical Physics* (Stakčín, Slovakia, September 19–22, 2010), Institute of Experimental Physics Slovak Academe of Science, Košice, 2011, 64–71.
- [18] O. Kenneth, I. Klich, A. Mann, M. Revzen, *Phys. Rev. Lett.*, **89**:3 (2002), 033001, 4 pp., arXiv: quant-ph/0202114.
- [19] H. B. G. Casimir, D. Polder, *Phys. Rev.*, **73**:4 (1948), 360–372.