Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Соколов, Фазовые переходы в двумерных системах
и многопетлевые ренормгрупповые разложения, *ТМФ*,
2013, том 176, номер 1, 140–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:26:31

© 2013 г.

А. И. Соколов*

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ И МНОГОПЕТЛЕВЫЕ РЕНОРМГРУППОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Обсуждается применение метода теоретико-полевой ренормгруппы для изучения критического поведения двумерных моделей. Ренормгрупповые функции двумерной евклидовой теории n -векторного поля со взаимодействием типа $\lambda\phi^4$ выписаны в пятипетлевом приближении. Представлены численные оценки, полученные путем суммирования ренормгрупповых разложений методом Паде–Бореля–Леруа, и проведено их сравнение с точными результатами, известными для моделей с $n = 1, 0, -1$. На основе ренормгрупповых разложений строятся псевдо- ϵ -разложения координаты вильсоновской фиксированной точки g^* , критических индексов и универсального отношения $R_6 = g_6/g^2$, где g_6 есть эффективная константа связи шестого порядка. Эти разложения оказываются более удобными с точки зрения получения численных оценок, чем исходные ряды ренормгруппы: коэффициенты высоких порядков в псевдо- ϵ -разложениях для g^* , R_6 и γ^{-1} существенно меньше своих ренормгрупповых аналогов. В результате для пересуммирования псевдо- ϵ -разложений можно использовать простые аппроксиманты Паде, не обращаясь к преобразованию Бореля–Леруа. При этом численные оценки для g^* и γ^{-1} , извлеченные из псевдо- ϵ -разложений, оказываются ближе к известным точным значениям, чем те, которые дает суммирование пятипетлевых рядов ренормгруппы методом Паде–Бореля–Леруа.

Ключевые слова: ренормализационная группа, двумерная модель Изинга, n -векторная модель, пятипетлевые разложения, критические индексы, псевдо- ϵ -разложение.

DOI: 10.4213/tmf8491

Со времен периода *штурма и натиска* (1970–1980 гг.) теоретико-полевой ренормгрупповой (РГ) подход в пространствах фиксированной размерности показал себя как мощный метод вычисления универсальных параметров, характеризующих поведение различных систем вблизи критической температуры T_c . В настоящее время известны РГ-разложения бета-функций, критических индексов, констант связи высших порядков и т. д. для трехмерных $O(n)$ -симметричных и некоторых других

* Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: ais2002@mail.ru

моделей, что дало возможность получить высокоточные численные оценки экспериментально наблюдаемых величин [1]–[7]. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, насколько эффективным оказывается метод теоретико-полевой РГ в двух измерениях, где ряды РГ расходятся более сильно и сингулярные (неаналитические) вклады в РГ-функции должны оказывать более серьезное влияние по сравнению со случаем размерности три.

Гамильтониан модели, описывающий критическое поведение двумерной $O(n)$ -симметричной системы, имеет вид

$$H = \int \left[\frac{m_0^2 \varphi_\alpha^2 + (\nabla \varphi_\alpha)^2}{2} + \frac{\lambda}{24} (\varphi_\alpha^2)^2 \right] d^2x, \quad (1)$$

где φ_α – вещественное n -векторное поле, коэффициент m_0^2 пропорционален $T - T_c^{(0)}$, а $T_c^{(0)}$ – температура фазового перехода в приближении среднего поля. Для модели (1) бета-функция и критические индексы были вычислены в рамках массивной теории с функцией Грина, четыреххвостовой и треххвостовой вершинами, нормированными обычным образом:

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(0, m, g_4) &= m^2, & \frac{\partial G_R^{-1}(p, m, g_4)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} &= 1, \\ \Gamma_R(0, 0, 0, m, g) &= m^2 g_4, & \Gamma_R^{1,2}(0, 0, m, g_4) &= 1. \end{aligned}$$

РГ-разложения в четырехпетлевом приближении в точке $n = 1$ были получены достаточно давно [1], в то время как соответствующие ряды для произвольного n и с точностью до пяти петель были построены намного позже [8]. Результаты этих вычислений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\beta(g)}{2} &= -g + g^2 - \frac{g^3}{(n+8)^2} (10.33501055n + 47.67505273) + \\ &+ \frac{g^4}{(n+8)^3} (5.000275928n^2 + 149.1518586n + 524.3766023) - \\ &- \frac{g^5}{(n+8)^4} (0.0888429n^3 + 179.69759n^2 + 2611.1548n + 7591.1087) + \\ &+ \frac{g^6}{(n+8)^5} (-0.00408n^4 + 80.3096n^3 + 5253.56n^2 + 53218.6n + 133972), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= 1 - \frac{n+2}{n+8}g + \frac{g^2}{(n+8)^2} (n+2) 3.375628955 - \\ &- \frac{g^3}{(n+8)^3} (4.661884772n^2 + 34.41848329n + 50.18942749) + \\ &+ \frac{g^4}{(n+8)^4} (0.3189930n^3 + 71.703302n^2 + 429.42449n + 574.58772) - \\ &- \frac{g^5}{(n+8)^5} (-0.11970n^4 + 69.379n^3 + 1482.76n^2 + 6953.61n + 8533.16), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{g^2}{(n+8)^2} (n+2) 0.9170859698 - \frac{g^3}{(n+8)^2} (n+2) 0.05460897758 +$$

$$+ \frac{g^4}{(n+8)^4} (-0.09268446n^3 + 4.0564105n^2 + 29.251167n + 41.535216) - \\ - \frac{g^5}{(n+8)^5} (0.07092n^4 + 1.05240n^3 + 57.7615n^2 + 325.329n + 426.896). \quad (4)$$

Уточненное выражение для пятипетлевого вклада в γ^{-1} взято из работы [9]. В вышеприведенных рядах РГ вместо перенормированной константы связи g_4 используется константа связи

$$g = \frac{n+8}{24\pi} g_4.$$

Эта переменная оказывается более удобной, поскольку она не обращается в нуль в пределе $n \rightarrow \infty$, стремясь вместо этого к конечному значению, равному единице.

Чтобы вычислить положение фиксированной вильсоновской точки g^* и численные значения критических индексов, мы применяем процедуру пересуммирования на основе преобразования Бореля–Леруа

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \int_0^{\infty} e^{-t} t^b F(xt) dt, \quad F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{(i+b)!} y^i.$$

Аналитическое продолжение борелевского образа осуществляется с помощью подходящих аппроксимант Паде $[L/M]$. В частности, оказывается, что четыре последовательные диагональные и околодиагональные аппроксиманты $[1/1]$, $[2/1]$, $[2/2]$ и $[3/2]$ приводят к численным оценкам для g^* , которые быстро сходятся, осциллируя, к асимптотическим значениям; это хорошо видно из табл. 1.

Указанные асимптотические значения, т. е. окончательные РГ-оценки на уровне пяти петель для g^* , представлены в табл. 2 для $0 \leq n \leq 8$ (чтобы избежать недоразумений, заметим, что модели с $n \geq 2$, не имеющие упорядоченной фазы, применяются здесь только в качестве тестовых моделей для определения численной мощи пертурбативных РГ-методов). Как следует из табл. 2, асимптотические значения ощутимо отличаются от численных оценок, полученных для g^* с помощью решеточных вычислений и вычислений по методу Монте-Карло [10]–[16]; такие оценки обычно рассчитывают на основе данных для линейных (χ) и нелинейных (χ_4) восприимчивостей, связанных друг с другом с помощью величины g_4 :

$$\chi_4 = \left. \frac{\partial^3 M}{\partial H^3} \right|_{H=0} = -\chi^2 m^{-2} g_4.$$

Поскольку сходимость численных оценок для величины g^* , задаваемой пересуммированным рядом РГ, имеет осциллирующий характер, учет членов высших порядков (шести-, семипетлевых и т. д.) в выражении (2) не устранил этот недостаток. Именно поэтому мы предполагаем, что данная особенность отражает влияние сингулярного (неаналитического) вклада в бета-функцию.

Критические индексы модели Изинга ($n = 1$) и моделей с $n = 0$ и $n = -1$ можно найти, применив процедуру суммирования Паде–Бореля к пятипетлевым разложениям (3), (4) для γ^{-1} и η . Чтобы как-то оценить точность полученных численных результатов, мы оцениваем критические индексы с помощью различных аппроксимант Паде, с различными значениями параметра сдвига b и т. д. В частности, можно

Таблица 1. Положение вильсоновской фиксированной точки при $n = 1$, $n = 0$ и $n = -1$ в четырех последовательных РГ-приближениях и окончательные пятипетлевые оценки для $g^*(n)$.

n	[1/1]	[2/1]	[2/2]	[3/2]	g^* , 5 петель
1	2.4246	1.7508	1.8453	1.8286	1.837 ± 0.03
0	2.5431	1.7587	1.8743	1.84024	1.86 ± 0.04
-1	2.6178	1.7353	1.8758	1.8278	1.85 ± 0.05

Таблица 2. Положение вильсоновской фиксированной точки g^* и индекс поправки к скейлингу ω для $0 \leq n \leq 8$, полученные в пятипетлевом приближении. Для сравнения приведены значения g^* , полученные из высокотемпературного (ВТ) разложения [11], [13] и разложения сильной связи (СС) [12], а также рассчитанные с помощью вычислений по методу Монте-Карло (МК) [14], [15], с помощью пересуммирования ϵ -разложения для g^* (ϵ -разложение) [13] и с помощью соответствующего $1/n$ -разложения ($1/n$ -разложение) [13].

n	0	1	2	3	4	8
g^*						
РГ, 5 петель	1.86(4)	1.837(30)	1.80(3)	1.75(2)	1.70(2) ($b = 1$)	1.52(1) ($b = 1$)
ВТ	1.679(3)	1.754(1)	1.81(1)	1.724(9)	1.655(16)	
МК		1.71(12)	1.76(3)	1.73(3)		
СС	1.673(8)	1.746(8)	1.81(2)	1.73(4)		
ϵ -разложение	1.69(7)	1.75(5)	1.79(3)	1.72(2)	1.64(2)	1.45(2)
$1/n$ -разложение				1.758	1.698	1.479
ω						
РГ, 5 петель	1.31(3)	1.31(3)	1.32(3)	1.33(2)	1.37(3)	1.50(2)

произвести оценку индекса η с помощью двух принципиально различных процедур: путем прямого суммирования ряда (4) и путем пересуммирования РГ-разложения для индексов

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{\nu} + \eta - 2, \quad \eta^{(4)} = \frac{1}{\nu} - 2,$$

которое обладает регулярной структурой, способствующей быстрой сходимости процедуры итераций. Характерная относительная погрешность, получаемая при этом, не превышает 0.05.

Полученные результаты собраны в табл. 3. Видно, что в случае малого индекса η и в некоторых других случаях расхождения между пятипетлевыми РГ-оценками и известными точными значениями критических индексов превышают приведенную относительную погрешность. Более того, в пятипетлевом приближении индекс поправки к скейлингу ω двумерной модели Изинга оказывается близким к значению $\omega = 4/3$, предсказываемому конформной теорией [17], и к оценке $\omega = 1.35 \pm 0.25$, которая получается из высокотемпературных разложений [18], но заметно отличается от точного значения $\omega = 1$ [19], а также противоречит гипотезе, согласно которой $\omega = 2$ [20]. Это можно принять как аргумент в пользу заключения о том, что неаналитические вклады дают существенный вклад в размерности два.

Таблица 3. Критические индексы для $n = 1$, $n = 0$ и $n = -1$, полученные с помощью пересуммирования Паде–Бореля пятипетлевых РГ-разложений для γ^{-1} и η . Для сравнения приведены известные точные величины.

	g^*	γ	η	ν	α
$n = 1$					
РГ	1.837	1.79	0.146	0.96	0.07
Точные		$7/4 = 1.75$	$1/4$	1	0
$n = 0$					
РГ	1.86	1.45	0.128	0.77	0.45
Точные		$43/32 = 1.34375$	$5/24 \approx 0.20833$	$3/4$	$1/2$
$n = -1$					
РГ	1.85	1.18	0.082	0.62	0.76
Точные		$37/32 = 1.15625$	$3/20 = 0.15$	$5/8 = 0.625$	$3/4$

Теория поля также позволяет найти константу связи шестого порядка, входящую в разложение свободной энергии в степенях намагниченности M . Для двумерной модели Изинга

$$F(M) - F(0) = m^2 \left[\frac{1}{2} \frac{M^2}{Z} + g_4 \left(\frac{M^2}{Z} \right)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} g_{2k} \left(\frac{M^2}{Z} \right)^k \right],$$

где m – перенормированная масса, а Z – константа перенормировки поля. В критической области, где флуктуации настолько сильны, что они полностью экранируют исходное (неодетое) взаимодействие, поведение системы имеет универсальный характер, а безразмерные эффективные константы связи g_{2k} стремятся к своим асимптотическим пределам g_{2k}^* .

Чтобы оценить величину g_6^* , вычислим РГ-разложение для g_6 с последующим применением техники пересуммирования Паде–Бореля–Леруа, что позволяет получить достаточно хорошие численные результаты. Известно, что приемлемые по точности численные оценки можно получить, только применяя достаточно длинные ряды РГ. В работе [21] мы получили выражение для g_6 в приближении четырех петель, которое, как оказалось, обеспечивает хорошие численные оценки для интересующих нас величин.

Метод вычисления рядов РГ, использованный в работе [21], основан на фейнмановских диаграммных разложениях. Поскольку в двух измерениях голые константы связи оказываются несущественными в РГ-смысле, РГ-разложение для g_6 можно получить исходя из разложения по степеням единственной вершины – константы четырехчастичного взаимодействия λ . В свою очередь, эту константу можно разложить в ряд теории возмущений как функцию от перенормированной безразмерной константы связи четырехчастичного взаимодействия g_4 . Подставив соответствующие степенные ряды для λ в исходное разложение, можно получить ряд РГ для g_6 . Как было показано в работе [22], одно-, двух-, трех- и четырехпетлевые вклады дают соответственно одной, тремя, шестнадцатью и 94 одночастично-неприводимыми диаграммами Фейнмана. Вычисляя вклады этих диаграмм и применяя только что описанную процедуру перенормировки, получим

$$g_6 = \frac{36}{\pi} g_4^3 (1 - 3.2234882 g_4 + 14.957539 g_4^2 - 85.7810 g_4^3).$$

Этот ряд можно использовать для оценки универсального числа g_6^* .

Получив разложение до уровня четырех петель, можно постоить три различные аппроксиманты Паде: $[2/1]$, $[1/2]$ и $[0/3]$. Наилучшие численные результаты дают, однако, лишь диагональные и околodiагональные аппроксиманты Паде. Именно поэтому в дальнейшем мы ограничим рассмотрение аппроксимантами $[2/1]$ и $[1/2]$. Более того, диагональную аппроксиманту Паде $[1/1]$ также можно применять, хотя это и отвечает на практике использованию РГ-приближения более низкого порядка.

Поскольку разложение Тейлора для свободной энергии содержит в качестве коэффициентов отношения $R_{2k} = g_{2k}/g_4^{k-1}$ вместо собственно перенормированных констант связи,

$$F(z) - F(0) = \frac{m^2}{g_4} \left(\frac{z^2}{2} + z^4 + R_6 z^6 + R_8 z^8 + \dots \right), \quad z^2 = \frac{g_4 M^2}{Z},$$

можно работать с рядом РГ для R_6 . Его можно пересуммировать тремя различными способами на основе преобразования Бореля–Леруа и вышеприведенных аппроксимант Паде. Интеграл Бореля–Леруа вычисляется как функция от параметра b при условии $g_4 = g_4^*$. Для координаты фиксированной точки принимается значение $g_4^* = 0.6124$ [23], которое, по-видимому, представляет собой наиболее точную оценку величины g_4^* , имеющуюся на сегодняшний день. Затем определяется оптимальное значение величины b_{opt} , обеспечивающее максимально быструю сходимость итераций. Оно получается из условия того, что выбранные аппроксиманты Паде должны давать при $b = b_{\text{opt}}$ по возможности максимально близкие друг к другу значения R_6^* . Наконец, производится усреднение по всем трем оценкам для R_6^* , которое и считается в дальнейшем численным значением этого универсального отношения.

Результаты вычислений сведены в табл. 4. Видно, что при $b = 1.24$ все три рабочие аппроксиманты приводят к практически идентичным значениям величины R_6^* . Отсюда можно заключить, что для двумерной модели Изинга в критическом режиме $R_6^* = 2.94$ и $g_6^* = 1.10$. Чтобы выяснить, насколько близки эти значения к своим точным величинам, обсудим чувствительность численных оценок к типу пересуммирования. Из табл. 4 можно заключить, что, помимо прочего, результаты, полученные с помощью аппроксиманты Паде $[2/1]$, наиболее сильно зависят от параметра b . Эта ситуация напоминает ситуацию, возникающую в трехмерной $O(n)$ -симметричной модели, для которой аппроксиманты Паде типа $[L - 1/1]$ для бета-функции и критических индексов приводят к численным оценкам, ощутимо зависящим от b , в то время как для диагональных и околodiагональных аппроксимант зависимость результатов от параметра сдвига практически отсутствует [1], [3], [24]. В нашем случае можно считать, что аппроксиманты Паде $[1/1]$ и $[1/2]$ дают такие “устойчивые” аппроксимации для g_6^* . Поскольку для значений b , лежащих в диапазоне от 0 до 7, величина g_6^* , усредненная по двум аппроксимациям, остается в пределах интервала (1.044, 1.141), вряд ли полученные оценки могут отличаться от точного значения больше чем на 5%.

Еще один способ проверки точности наших численных ответов состоит в сравнении значений величины g_6^* , полученных с помощью имеющихся четырех последовательных РГ-приближений. В рамках однопетлевого приближения имеем $g_6^* = 2.633$, что, очевидно, представляет собой очень грубую оценку, однако учет РГ-вкладов

Таблица 4. Значения R_6^* , полученные с помощью техники Паде–Бореля–Леруа для различных b в РГ-приближении трех петель (аппроксиманта $[1/1]$) и четырех петель (аппроксиманты $[1/2]$ и $[2/1]$). Оценка для $b = 1$ в средней строке отсутствует, поскольку соответствующая аппроксиманта Паде испорчена (“опасным”) полюсом, расположенным на положительной полуоси.

b	0	1	1.24	2	3	4	5	7
$[1/1]$	2.741	2.908	2.937	3.009	3.077	3.125	3.161	3.212
$[1/2]$	2.827	—	2.936	2.877	2.853	2.838	2.828	2.814
$[2/1]$	3.270	2.988	2.936	2.800	2.667	2.568	2.491	2.380

более высоких порядков в величину g_6 существенно улучшает ситуацию. Действительно, пересуммирование двух- трех- и четырехпетлевых разложений с применением “наиболее устойчивых” аппроксимант $[0/1]$, $[1/1]$ и $[1/2]$ дает для g_6^* значения 0.981, 1.129 и 1.051 соответственно. Поскольку этот набор величин указывает на осциллирующий характер сходимости, можно ожидать, что точное значение перенормированной константы связи шестичастичного взаимодействия лежит между оценками двух наиболее высоких – третьего и четвертого – порядков. Это означает, что относительное отклонение полученных значений от точного не должно превышать 0.05.

Полезно сравнить наши оценки с оценками, полученными с помощью других методов. Путем анализа высокотемпературных разложений для различных двумерных изинговских решеток в работе [25] получены значения $R_6^* = 2.943 \pm 0.007$; почти такая же величина была получена в работе [26]. Наш ответ для R_6^* оказывается в прекрасном соответствии с этим числом. Конечно, практически точное совпадение решеточных оценок с оценками, полученными в четырехпетлевом приближении, имеет несколько случайный характер и не должно рассматриваться как проявление чрезвычайно высокой точности обсуждаемых методов. Но все же близость оценок друг к другу несомненно показывает высокую предсказательную силу обоих подходов. Более того, такая близость проливает свет на роль сингулярного вклада в константу связи g_6 , который не проявляется в теории возмущений; этот вклад представляется достаточно малым.

Обсудим далее результаты, полученные в рамках альтернативного подхода теории возмущений – псевдо- ϵ -разложения (см. ссылку 19 в работе [2]). Псевдо- ϵ -разложения для координаты g^* вильсоновской фиксированной точки и критических индексов можно легко получить из рядов РГ (2)–(4) с применением стандартной техники. Они имеют вид [27]

$$g^* = \tau + 0.716173621\tau^2 + 0.095042867\tau^3 + 0.086080396\tau^4 - 0.204139\tau^5, \quad (5)$$

$$\gamma^{-1} = 1 - \frac{1}{3}\tau - 0.113701246\tau^2 + 0.024940678\tau^3 - 0.039896059\tau^4 + 0.0645212\tau^5, \quad (6)$$

$$\eta = 0.033966147\tau^2 + 0.046628762\tau^3 + 0.030925471\tau^4 + 0.0256843\tau^5. \quad (7)$$

Заметим, что при членах высших порядков в данных рядах стоят малые коэффициенты и эти члены имеют нерегулярные знаки. Малость этих коэффициентов позво-

Таблица 5. Положение вильсоновской фиксированной точки g^* , полученное из псевдо- ϵ -разложения (5) с помощью аппроксимант Паде $[L/M]$. Здесь и в последующих таблицах координаты “опасных” полюсов отмечены нижними индексами.

$M \setminus L$	1	2	3	4	5
0	1.000	1.716	1.811	1.897	1.693
1	3.523 _{1.4}	1.826 _{7.5}	2.724 _{1.1}	1.837	
2	1.425	1.918 _{3.0}	1.850 _{6.1}		
3	2.601 _{1.4}	1.751			
4	1.194				

Таблица 6. Численные значения критического индекса γ , полученные с помощью суммирования по Паде псевдо- ϵ -разложения γ^{-1} (6).

$M \setminus L$	0	1	2	3	4	5
0	1.000	1.500	1.808	1.730	1.859	1.660
1	1.333	2.024 _{2.9}	1.744	1.778	1.777	
2	1.558	1.702	1.800 _{5.2}	1.777		
3	1.646	6.871 _{1.1}	1.772			
4	1.732	1.718				
5	1.714 _{6.1}					

ляет получить достаточно точные оценки для g^* и для критического индекса γ без привлечения методов пересуммирования, основанных на преобразовании Бореля.

Чтобы это показать, приведем обычные треугольники Паде, получаемые из выражений (5) и (6) при $\tau = 1$ (см. табл. 5 и 6). Поскольку известно, что диагональные и околодиагональные аппроксиманты Паде обеспечивают наилучшие численные результаты, значения 1.751 и 1.837 из табл. 5 следует считать наиболее надежными оценками величины g^* . Усредняя эти значения, получим $g^* = 1.794$, что отличается от точного значения $g^* = 1.75436$ [23] на 2%. Как видно из табл. 5, именно пятипетлевое приближение обеспечивает столь хороший численный ответ; почти все приближения низших порядков содержат опасные особенности типа полюсов, приводящие к сильному разбросу оценок. То же имеет место и для показателя восприимчивости. В самом деле, численные результаты, получаемые с помощью основных рабочих аппроксимант $[2/3]$ и $[3/2]$, а также с помощью аппроксиманты $[4/1]$ почти совпадают друг с другом и близки к точному значению $\gamma = 1.75$. В то же время аппроксиманты $[2/2]$ и $[1/3]$, отвечающие четырехпетлевому приближению, содержат “опасные” полюсы, что сильно влияет на результаты.

К сожалению, техника псевдо- ϵ -разложения оказывается значительно менее эффективной при оценке “малых” критических индексов η . И прямое суммирование разложения (7), и пересуммирование по Паде рядов для “больших” индексов γ и ν приводит к величинам, отличающимся от точного значения $\eta = 0.25$ на 0.1 и даже больше. Напротив, псевдо- ϵ -разложение для отношения R_6 [27],

$$R_6 = 4\tau(1 - 0.409036\tau + 0.305883\tau^2 - 0.437676\tau^3), \quad (8)$$

показывает хорошую суммируемость по Паде (см. табл. 7). Усредняя по двум рабочим аппроксимантам $[2/2]$ и $[3/1]$, получим значение $R_6 = 2.90$, которое близко

ТАБЛИЦА 7. Треугольник Паде для универсального отношения R_6 , задаваемый псевдо- ϵ -разложением (8).

$M \setminus L$	1	2	3	4
0	4.000	2.364	3.587	1.837
1	2.839	3.064	2.867	
2	3.148 _{4.5}	2.940		
3	2.621			

к более ранним оценкам $R_6 = 2.94$ [21], $R_6 = 2.95$ [26], $R_6 = 2.943$ [25] и к значениям $R_6 = 2.94294$ [23], $R_6 = 2.94238$ [26], [28], полученным с высокой точностью. Применение более эффективной техники пересуммирования Паде–Бореля сдвигает оценку, полученную с помощью псевдо- ϵ -разложения, к значению $R_6 = 2.94$ [27], что делает ее практически равной вышеприведенным оценкам.

Следует отметить, что область, в которой можно успешно применить двумерную $\lambda\phi^4$ -модель теории поля, не ограничивается $O(n)$ -симметричными системами. РГ-анализ двумерных кубических моделей, MN -моделей, а также киральных и слабо разупорядоченных моделей показывает свою эффективность при условии использования высоких – четырех- и пятипетлевых – приближений [9], [29]–[31]. В частности, многопетлевые РГ-вычисления воспроизводят с высокой точностью известные точные результаты для некоторых двумерных анизотропных систем с параметрами порядка, имеющими вид n -векторов.

Список литературы

- [1] G. A. Baker, B. G. Nickel, D. I. Meiron, *Phys. Rev. B*, **17**:3 (1978), 1365–1374.
- [2] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B*, **21**:9 (1980), 3976–3998.
- [3] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. E*, **51**:3 (1995), 1894–1898, arXiv: hep-th/9803264.
- [4] R. Guida, J. Zinn-Justin, *J. Phys. A*, **31**:40 (1998), 8103–8121, arXiv: cond-mat/9803240.
- [5] A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, S. S. Kashtanov, *Phys. Rev. E*, **60**:2 (1999), 1344–1349, arXiv: hep-th/9810082.
- [6] D. V. Pakhnin, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **61**:22 (2000), 15130–15135, arXiv: cond-mat/9912071.
- [7] J. M. Carmona, A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rev. B*, **61**:22 (2000), 15136–15151, arXiv: cond-mat/9912115.
- [8] Е. В. Орлов, А. И. Соколов, *$\Phi T T$* , **42**:11 (2000), 2087–2093, arXiv: hep-th/0003140.
- [9] P. Calabrese, E. V. Orlov, D. V. Pakhnin, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **70**:9 (2004), 094425, 15 pp., arXiv: cond-mat/0405432.
- [10] G. A. Baker. Jr., *Phys. Rev. B*, **15**:3 (1977), 1552–1559.
- [11] P. Butera, M. Comi, *Phys. Rev. B*, **54**:22 (1996), 15828–15848, arXiv: hep-lat/9710092.
- [12] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, *Nucl. Phys. B*, **459**:3 (1996), 207–242, arXiv: hep-lat/9506002.
- [13] A. Pelissetto, E. Vicari, *Nucl. Phys. B*, **519**:3 (1998), 626–660, arXiv: cond-mat/9711078.
- [14] J.-K. Kim, A. Patrascioiu, *Phys. Rev. D*, **47**:6 (1993), 2588–2590.
- [15] G. Jug, B. N. Shalaev, *J. Phys. A*, **32**:42 (1999), 7249–7261, arXiv: cond-mat/9908068.
- [16] J. Kim, *Phys. Lett. B*, **345**:4 (1995), 469–472, arXiv: hep-lat/9502005.
- [17] B. Nienhuis, *J. Phys. A*, **15**:1 (1982), 199–213.
- [18] M. Barma, M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.*, **53**:20 (1984), 1935–1938.

- [19] E. Barouch, B. M. McCoy, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:23 (1973), 1409–1411.
- [20] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena*, Springer, Berlin, 1999.
- [21] A. I. Sokolov, E. V. Orlov, *Phys. Rev. B*, **58**:5 (1998), 2395–2398, arXiv: cond-mat/9804008.
- [22] A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, *Phys. Lett. A*, **227**:3–4 (1997), 255–258, arXiv: cond-mat/9803357.
- [23] M. Caselle, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari, *J. Phys. A*, **33**:46 (2000), 8171–8180, arXiv: hep-th/0003049; **34**:14 (2001), 2923–2948, arXiv: cond-mat/0011305.
- [24] А. И. Соколов, *ФТТ*, **40**:7 (1998), 1284–1290.
- [25] S.-Y. Zinn, S.-N. Lai, M. E. Fisher, *Phys. Rev. E*, **54**:2 (1996), 1176–1182.
- [26] A. Pelissetto, E. Vicari, *Nucl. Phys. B*, **522**:3 (1998), 605–624, arXiv: cond-mat/9801098.
- [27] É. Le Roy, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (2), **2** (1900), 317–430.
- [28] А. И. Соколов, *ФТТ*, **47**:11 (2005), 2056–2059, arXiv: cond-mat/0510088.
- [29] P. Fonseca, A. Zamolodchikov, *J. Statist. Phys.*, **110**:3–6 (2003), 527–590, arXiv: hep-th/0112167.
- [30] P. Calabrese, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **66**:18 (2002), 180403, 4 pp., arXiv: cond-mat/0205046.
- [31] P. Calabrese, A. Celi, *Phys. Rev. B*, **66**:18 (2002), 184410, 14 pp., arXiv: cond-mat/0111118.
- [32] P. Calabrese, E. V. Orlov, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **67**:2 (2003), 024413, 9 pp., arXiv: cond-mat/0207187.