Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, Б. У. Мамиров, Асимптотика собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 417–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:22:02

© 2013 г.

Ж. И. Абдуллаев*, Б. У. Мамиров*

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрен двухчастичный оператор Шредингера $H(k)$ на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ (здесь k – полный квазиимпульс системы двух частиц, $k \in \mathbb{T}^3 := (-\pi, \pi]^3$). Установлено, что при любом $k \in S = \mathbb{T}^3 \setminus (-\pi, \pi)^3$ существует потенциал $\hat{v}$ такой, что двухчастичный оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, накапливающихся на левом краю $m(k)$ сплошного спектра. Описаны классы потенциалов $W(j)$, $W(ij)$ и множества $S(j) \subset S$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, такие, что при любом $k \in S(3)$, $(k_2, k_3) \in (-\pi, \pi)^2$ и при $\hat{v} \in W(3)$ оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$ с асимптотикой экспоненциального вида при $n \rightarrow \infty$; если $k \in S(i) \cap S(j)$ и $\hat{v} \in W(ij)$, то собственные значения $z_{nm}(k)$ оператора $H(k)$ вычисляются точно. В обоих случаях указан явный вид собственных функций.

Ключевые слова: гамильтониан, полный квазиимпульс, оператор Шредингера, асимптотика, собственное значение, собственная функция.

DOI: 1010.4231/tmf8498

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного непрерывного оператора Шредингера является так называемый эффект Ефимова [1]: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с нулевой энергией, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся в нуле. Этот эффект с физической точки зрения изучался во многих работах (см., например, [2], [3]). Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе [4] и позже в работах [5]–[7].

*Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан. E-mail: jabdullaev@mail.ru

Существование бесконечного числа собственных значений гамильтониана системы из n частиц установлено в статьях [8], [9].

Спектральные свойства двухчастичного дискретного оператора Шредингера $H(k)$, где k – полный квазиимпульс системы двух частиц, $k \in \mathbb{T}^3 := (-\pi, \pi]^3$, изучены в работах [10], [11]. В этих работах рассмотрен оператор Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$ с контактным потенциалом $\hat{v}(n_1 - n_2) = \mu \delta_{n_1 n_2}$ и установлена единственность собственного значения $z(k)$ оператора $H(k)$. В работе [11] доказано, что оператор Шредингера $H(k)$ при $k \neq 0$ имеет положительное собственное значение, лежащее ниже непрерывного спектра, при условии, что оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень. В работе [12] показано, что если $k \in S := \mathbb{T}^3 \setminus (-\pi, \pi)^3$, то оператор $H(k)$ может иметь бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, накапливающихся на левом краю непрерывного спектра. Отметим, что при $k \in S$ ширина непрерывного спектра $\omega_j(k)$ по некоторому направлению e_j (определение ширины см. в (5)) обращается в нуль.

Основным результатом работы [7] является следующая асимптотика при $z \rightarrow -0$:

$$\lim \left| \frac{N(z)}{\ln |z|} \right| = U_0, \quad 0 < U_0 < \infty,$$

где U_0 не зависит от потенциалов взаимодействия, а зависит только от отношения масс частиц, $N(z)$ – число собственных значений (с учетом кратности) оператора Шредингера, лежащих ниже $z < 0$. Из этого, в частности, вытекает асимптотическая формула для собственных значений:

$$z_n = -e^{-n/U_0} (C + o(1)). \quad (1)$$

Здесь константа C , вообще говоря, зависит от потенциалов взаимодействий, и вид этой зависимости до сих пор неизвестен.

В настоящей работе рассмотрен дискретный двухчастичный оператор Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$, $k \in \mathbb{T}^3$, (см. формулу (3)) с общим потенциалом v . Если ширина $\omega_j(k)$ непрерывного спектра по направлениям $j \in \{1, 2, 3\}$ обращается в нуль, то при любом $\hat{v} \in W(i)$ (см. определение (9)) оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих ниже непрерывного спектра (теорема 1). Кроме того, если $(k, \hat{v}) \in S(3) \times W(3)$ и $(k_1, k_2) \in (-\pi, \pi)^2$, то оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k) < m(k)$, имеющих асимптотику (19). Асимптотики (1) и (19) схожи, но в (19) коэффициент C вычислен точно (теорема 3).

Если ширина непрерывного спектра обращается в нуль по двум направлениям, $\omega_j(k) = \omega_i(k) = 0$, и потенциал $\hat{v}$ принадлежит классу $W(i, j)$ (см. определение (10)), то оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_{nm}(k)$, и они вычисляются в явном виде (теорема 2).

Если ширина непрерывного спектра обращается в нуль хотя бы по одному направлению, то минимум функции ε_k (см. формулу (4)) является вырожденным. Утверждение о бесконечности числа собственных значений в теореме 2 можно доказать, пользуясь методом из работы [9]. Эти результаты не имеют аналогов в непрерывном пространстве, так как в непрерывном случае ширина непрерывного спектра равна бесконечности по любому направлению.

2. ДВУХЧАСТИЧНЫЙ ГАМИЛЬТониАН

Оператор энергии $\hat{H}$ системы двух квантовых частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ по формуле $\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2$, где свободный оператор энергии $\hat{H}_0$ действует в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ и имеет вид

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}.$$

Здесь m_1, m_2 – массы частиц ($m_1, m_2 > 0$), которые в дальнейшем считаются равными единице, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, решетчатый лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел:

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{j=1}^3 [\hat{\psi}(x + e_j) - 2\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x - e_j)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ – единичные орты в $\mathbb{Z}^3$. Взаимодействие двух частиц описывается оператором $\hat{V}_2$:

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(x) = \hat{v}(-x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^3, \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}(x) < \infty. \quad (2)$$

При выполнении этих условий оператор $\hat{V}_2$ является ограниченным и самосопряженным в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$. Отсюда следует ограниченность и самосопряженность оператора энергии $\hat{H}$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}: \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^3)^2)$. Оператор энергии $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$ в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов U_s , $s \in \mathbb{Z}^3$, заданных равенством

$$(U_s f)(k^{(1)}, k^{(2)}) = e^{-i(s, k^{(1)} + k^{(2)})} f(k^{(1)}, k^{(2)}), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2).$$

Отсюда следует [13], что существуют разложения пространства $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ операторов U_s и H в прямые интегралы:

$$L_2((\mathbb{T}^3)^2) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus L_2(F_k) dk, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus U_s(k) dk, \quad H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \tilde{H}(k) dk.$$

Здесь

$$F_k = \{(k^{(1)}, k^{(2)}) \in (\mathbb{T}^3)^2: k^{(1)} + k^{(2)} = k\}, \quad k \in \mathbb{T}^3,$$

$U_s(k)$ – оператор умножения на функцию $e^{-i(s, k)}$ в пространстве $L_2(F_k)$, $k \in \mathbb{T}^3$. Слойный оператор $\tilde{H}(k)$ также действует в пространстве $L_2(F_k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, по формуле

$$(\tilde{H}(k)f)(q, k - q) = (\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q))f(q, k - q) - (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{T}^3} v(q - s)f(s, k - s) ds,$$

где $\varepsilon(q) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos q_j)$ – энергия отдельной частицы с импульсом $q \in \mathbb{T}^3$, ядро v интегрального оператора есть преобразование Фурье функции $\hat{v}$. При выполнении условия (2) ядро v является четной вещественнозначной непрерывной функцией на $\mathbb{T}^3$. Слойный оператор $\tilde{H}(k)$ унитарно эквивалентен оператору $H(k) = H_0(k) - V$, называемому оператором Шредингера. Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$u_k: L_2(F_k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^3), \quad (u_k g)(q) = g\left(\frac{k}{2} - q, \frac{k}{2} + q\right).$$

Оператор Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$ действует в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$(H(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q) - (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{T}^3} v(q-s)f(s) ds. \quad (3)$$

Невозмущенный оператор $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) = 2 \sum_{j=1}^3 \left(1 - \cos \frac{k_j}{2} \cos q_j\right). \quad (4)$$

Оператор возмущения V является интегральным оператором в пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ с ядром $(2\pi)^{-3/2}v(q-s)$. При выполнении условия (2) оператор V является положительным и принадлежит классу операторов со следом.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ введем обозначения

$$M(k) = \max_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p), \quad m(k) = \min_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p).$$

Очевидно, что

$$M(k) = 2 \sum_{j=1}^3 \left(1 + \cos \frac{k_j}{2}\right), \quad m(k) = 2 \sum_{j=1}^3 \left(1 - \cos \frac{k_j}{2}\right).$$

В силу теоремы Вейля о существенном спектре [13] непрерывный спектр оператора $H(k)$ совпадает со спектром оператора $H_0(k)$. Спектр невозмущенного оператора $H_0(k)$ является чисто непрерывным и совпадает с отрезком $[m(k), M(k)]$. Длина этого отрезка

$$\omega(k) = M(k) - m(k) = \max_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p) - \min_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p) = 4 \cos \frac{k_1}{2} + 4 \cos \frac{k_2}{2} + 4 \cos \frac{k_3}{2}$$

называется шириной непрерывного спектра оператора $H(k)$. Ширина непрерывного спектра $\omega(k)$ есть функция, симметричная относительно k_i и k_j , четная по каждому $k_j \in [-\pi, \pi]$ и убывающая по координатам $k_j \in [0, \pi]$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно,

$$\min_{k \in \mathbb{T}^3} \omega(k) = \omega(\pi, \pi, \pi) = 0, \quad \max_{k \in \mathbb{T}^3} \omega(k) = \omega(0, 0, 0) = 12.$$

Ширину непрерывного спектра оператора $H(k)$ по направлению e_j , $j = 1, 2, 3$, мы определим как

$$\omega_j(k) = \max_{p_j \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p) - \min_{p_j \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k(p) = 4 \cos \frac{k_j}{2}. \quad (5)$$

Заметим, что $\omega(k) = \omega_1(k) + \omega_2(k) + \omega_3(k)$. Кроме того,

$$\omega_j(k) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k \in S(j) := \{k \in \mathbb{T}^3 : k_j = \pi\}. \quad (6)$$

Из самосопряженности оператора $H(k)$ следует, что спектр $\sigma(H(k))$ этого оператора удовлетворяет условию $\sigma(H(k)) \subset (-\infty, \infty)$. Из положительности оператора V вытекает, что $\sigma(H(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset$, поэтому дискретные собственные значения оператора $H(k)$ могут лежать только на полуоси $(-\infty, m(k))$. Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ и для $z < m(k)$ определим интегральный оператор $G(k, z) = V^{1/2} r_0(k, z) V^{1/2}$, где $r_0(k, z)$ – резольвента невозмущенного оператора $H_0(k)$, а $V^{1/2}$ – положительный квадратный корень из оператора V . При условии (2) оператор $G(k, z)$ является положительным и принадлежит классу операторов со следом при всех $k \in \mathbb{T}^3$ и $z < m(k)$. Решение f стационарного уравнения Шредингера $H(k)f = zf$ и неподвижные точки φ оператора $G(k, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0(k, z) V^{1/2} \varphi, \quad \varphi = V^{1/2} f. \quad (7)$$

ЛЕММА 1. Число $z < m(k)$ является собственным значением оператора $H(k)$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $G(k, z)$. Кроме того, имеет место равенство

$$\dim \text{Ker}(H(k) - zI) = \dim \text{Ker}(G(k, z) - I). \quad (8)$$

Введем класс потенциалов

$$W(i) = \{\hat{v} : \text{supp } \hat{v} = e_i \mathbb{Z}, \quad \hat{v}((n-1)e_i) > \hat{v}(ne_i), \quad n \in \mathbb{N}\}, \quad (9)$$

а также класс потенциалов

$$W(i, j) = \{\hat{v} : \text{supp } \hat{v} = e_i \mathbb{Z} \cup e_j \mathbb{Z}, \\ \hat{v}(s) = \hat{v}_+(|s|), \quad s \in \text{supp } \hat{v}, \quad \hat{v}_+(n-1) > \hat{v}_+(n), \quad n \in \mathbb{N}\} \quad (10)$$

и множество

$$S(i, j) = \{k \in \mathbb{T}^3 : k_i = k_j = \pi\}. \quad (11)$$

Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ определим аналитическую при $z \in (-\infty, m(k))$ функцию по формуле

$$d(k, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(k, \hat{v}) \in S(j) \times W(j)$. Тогда оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k) < m(k)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, из которых только $z_0(k)$ невырожденное, а остальные собственные значения двукратно вырожденные. Собственным значениям $z_0(k)$ и $z_n(k)$ соответствуют собственные функции

$$f_0(p) = \frac{1}{\varepsilon_k(p) - z_0(k)} \quad \text{и} \quad f_n^\pm(p) = \frac{e^{\pm i n p_j}}{\varepsilon_k(p) - z_n(k)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $(k, \hat{v}) \in S(j) \times W(j)$. Тогда имеет место равенство

$$G(k, z) = d(k, z)V, \quad (14)$$

где $d(k, z)$ определяется по формуле (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(k, \hat{v}) \in S(j) \times W(j)$. Для определенности мы предположим, что $j = 3$, т. е. $k_3 = \pi$, $\hat{v} \in W(3)$. Оператор $V^{1/2}$ является интегральным оператором в $L_2(\mathbb{T}^3)$ с ядром

$$v_{1/2}(q_3 - s_3) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\hat{v}(n)} e^{in(q_3 - s_3)},$$

$$(V^{1/2}f)(q_1, q_2, q_3) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{T}^3} v_{1/2}(q_3 - s_3) f(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3.$$

Он унитарно эквивалентен оператору $\hat{V}^{1/2}$, действующему в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ по формуле

$$(\hat{V}^{1/2}\hat{f})(n) = \sqrt{\hat{v}(n)}\hat{f}(n), \quad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{T}^3)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (G(k, z)f)(q) &= (V^{1/2}r_0(k, z)V^{1/2}f)(q) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_{1/2}(q_3 - s_3)v_{1/2}(s_3 - t_3) ds_1 ds_2 ds_3}{6 - 2\cos(k_1/2)\cos s_1 - 2\cos(k_2/2)\cos s_2 - z} \right) f(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Внутренний интеграл в правой части последнего равенства запишем в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds_1 ds_2}{6 - 2\cos(k_1/2)\cos s_1 - 2\cos(k_2/2)\cos s_2 - z} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v_{1/2}(q_3 - s_3)v_{1/2}(s_3 - t_3) ds_3. \end{aligned}$$

Первый интеграл в этом произведении равен

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds_1 ds_2}{6 - 2\cos(k_1/2)\cos s_1 - 2\cos(k_2/2)\cos s_2 - z} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{6 - 2\cos(k_1/2)\cos s_1 - 2\cos(k_2/2)\cos s_2 - z} = d(k, z). \end{aligned}$$

Несложные вычисления показывают, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v_{1/2}(q_3 - s_3)v_{1/2}(s_3 - t_3) ds_3 = (2\pi)^{-3/2}v(q_3 - t_3).$$

Отсюда и из (15) получим

$$(G(k, z)f)(q) = d(k, z)(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{T}^3} v(q_3 - t_3)f(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = d(k, z)(Vf)(q).$$

Равенство (14) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство (14). Это означает, что собственные функции оператора V являются также собственными функциями оператора $G(k, z)$. Ненулевыми собственными значениями оператора V являются числа $\hat{v}(ne_j)$, $n \in \mathbb{Z}$; им соответствуют собственные функции $\varphi_n(p_j) = e^{inp_j}$. Из четности функции $\hat{v}$ вытекает, что $\hat{v}(ne_j) = \hat{v}(-ne_j)$, а из монотонности $\hat{v}$ вытекает, что числа $\hat{v}(ne_j)$ разные при разных $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому число $\hat{v}(0)$ является простым, а остальные числа $\hat{v}(ne_j)$, $n \in \mathbb{N}$, представляют собой двукратно вырожденные собственные значения оператора V . Тогда из (14) следует, что числа $\lambda_n(k, z) = \hat{v}(ne_j)d(k, z)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются собственными значениями оператора $G(k, z)$.

Докажем, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ уравнение

$$\hat{v}(ne_j)d(k, z) = 1 \quad (16)$$

имеет единственное решение $z_n(k) \in (-\infty, m(k))$. Функция

$$\Delta_n(k, z) = 1 - \hat{v}(ne_j)d(k, z)$$

непрерывно и строго убывает, $(\Delta_n(k, z))'_z < 0$, на полуоси $(-\infty, m(k))$ и удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_n(k, z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow m(k)-0} \Delta_n(k, z) = -\infty.$$

Поэтому она обращается в нуль в единственной точке $z_n(k) \in (-\infty, m(k))$. Это означает, что уравнение (16) имеет единственное решение $z_n(k)$.

Из леммы 1 следует, что числа $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются собственными значениями оператора $H(k)$. Из равенств (8) и (14) следует, что

$$\dim \text{Ker}(H(k) - z_n(k)I) = \dim \text{Ker}(V - \hat{v}(ne_j)I). \quad (17)$$

Утверждение теоремы 1 о кратности собственных значений следует из равенства (17). Оператор $G(k, z)$ имеет собственные функции $\varphi_0(p) = 1$ и $\varphi_n^\pm(p) = e^{\pm inp_j}$, соответствующие собственным значениям $\lambda_0(k, z)$ и $\lambda_n(k, z)$, $n \in \mathbb{N}$. С учетом соотношения (7) получаем, что собственным значениям $z_0(k)$ и $z_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$, оператора $H(k)$ соответствуют собственные функции $f_0(p)$ и $f_n^\pm(p)$ вида (13).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(k, \hat{v}) \in S(i, j) \times W(i, j)$. Тогда оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_{nm}(k)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, вида

$$z_{nm}(k) = 6 - \sqrt{\frac{\omega^2(k)}{4} + \hat{v}^2(ne_i + me_j)}. \quad (18)$$

Собственное значение $z_{00}(k)$ невырожденное, а кратность собственного значения $z_{nm}(k)$ при $n + m \geq 1$ равна $4n + 4m$ для всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 1, можно показать справедливость равенства (14). В условиях теоремы 2 ненулевыми собственными значениями оператора V являются числа $\hat{v}(ne_i + me_j)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Им соответствуют собственные функции

$\varphi_{nm}(p) = e^{inp_i + imp_j}$. В силу четности функции $\hat{v}$ только $\hat{v}(0, 0, 0)$ – простое собственное значение, а кратность собственного значения $\hat{v}(ne_i + me_j)$ при $m, n \in \mathbb{Z}$, $|n| + |m| \geq 1$ равна $4|n| + 4|m|$. Из равенства (14) следует, что числа

$$\lambda_{nm}(k, z) = \hat{v}(ne_i + me_j)d(k, z), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

являются собственными значениями оператора $G(k, z)$.

В силу леммы 1 числа $z \in (-\infty, m(k))$ являются собственными значениями оператора $H(k)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{nm}(k, z) = 1$, т. е. $\hat{v}(ne_i + me_j)d(k, z) = 1$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Для решения уравнения $\hat{v}(ne_i + me_j)d(k, z) = 1$ нам потребуется вычислить $d(k, z)$ при $k \in S(i, j)$. Для определенности мы предположим, что $k_2 = \pi$ и $k_3 = \pi$. Из представления (4) получим

$$\varepsilon_k(q) - m(k) + m(k) - z = 2 \cos \frac{k_1}{2} (1 - \cos q_1) + m(k) - z.$$

Тогда $d(k, z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} d(k, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - m(k) + m(k) - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dq_1}{2 \cos(k_1/2)(1 - \cos q_1) + m(k) - z}. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части этого равенства с помощью замены $w = e^{iq_1}$ представим в виде

$$d(k, z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\cos(k_1/2)} \int_{|w|=1} \frac{dw}{w^2 - 2Aw + 1}, \quad A := A(k_1, z) = 1 + \frac{m(k) - z}{2 \cos(k_1/2)} > 1.$$

Уравнение $w^2 - 2Aw + 1 = 0$ имеет два действительных корня $w_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$. Более того, $w_1 = A + \sqrt{A^2 - 1} > 1$ и $0 < w_2 = A - \sqrt{A^2 - 1} < 1$. В силу теоремы Коши получаем

$$d(k, z) = \frac{1}{\cos(k_1/2)} \frac{1}{w_1 - w_2} = \frac{1}{\cos(k_1/2)} \frac{1}{2\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{m(k) - z}} \frac{1}{\sqrt{M(k) - z}}.$$

Таким образом, уравнение $\hat{v}(ne_i + me_j)d(k, z) = 1$ принимает вид

$$\frac{\hat{v}(ne_i + me_j)}{\sqrt{m(k) - z} \sqrt{M(k) - z}} = 1.$$

Решая это уравнение относительно z , получим формулу (18). Из леммы 1 следует, что числа $z_{nm}(k)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, являются собственными значениями оператора $H(k)$. Из равенств (17) и (14) следует, что

$$\dim \text{Ker}(H(k) - z_{nm}(k)I) = \dim \text{Ker}(V - \hat{v}(ne_i + me_j)I).$$

Отсюда мы получаем утверждение теоремы о кратности собственных значений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(k, \hat{v}) \in S(3) \times W(3)$ и $(k_1, k_2) \in (-\pi, \pi)^2$. Тогда оператор $H(k) = H(k_1, k_2, \pi)$ имеет бесконечное число собственных значений

$$z_n(k) = z_n(k_1, k_2, \pi) < m(k), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

имеющих при $n \rightarrow \infty$ асимптотику вида

$$z_n(k_1, k_2, \pi) = m(k_1, k_2, \pi) - \exp \left\{ -\frac{4\pi \sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}}{\hat{v}(ne_3)} \right\} \left(\frac{64 \cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}{\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2)} + o(1) \right). \quad (19)$$

Аналогичное утверждение имеет место, если $(k, \hat{v}) \in S(1) \times W(1)$ и $(k_2, k_3) \in (-\pi, \pi)^2$ или $(k, \hat{v}) \in S(2) \times W(2)$ и $(k_1, k_3) \in (-\pi, \pi)^2$. Согласно теореме 1 существует бесконечное число собственных значений оператора $H(k)$ при $(k, \hat{v}) \in S(3) \times W(3)$. Чтобы получить асимптотическую формулу для $z_n(k)$, нам нужно знать поведение функции $d(k, z)$ при z , близких к нижней грани $m(k)$ сплошного спектра. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $k \in S(3)$ и $(k_1, k_2) \in (-\pi, \pi)^2$. Тогда при $z \rightarrow m(k)$ имеет место асимптотическая формула

$$d(k, z) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}} \left(-\ln(m(k) - z) + \ln \frac{64 \cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}{\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2)} + o(1) \right). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in S(3)$, т. е. $k_3 = \pi$, и $(k_1, k_2) \in (-\pi, \pi)^2$. Тогда

$$\begin{aligned} d(k, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - m(k) + m(k) - z} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{dq_1 dq_2}{2 \cos(k_1/2)(1 - \cos q_1) + 2 \cos(k_2/2)(1 - \cos q_2) + m(k) - z}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, с помощью замены $w = e^{iq_1}$ вычислим последний интеграл:

$$\begin{aligned} d(k, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\sqrt{6 - z - 2 \cos(k_2/2) \cos q_2 - 2 \cos(k_1/2)}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{6 - z - 2 \cos(k_2/2) \cos q_2 + 2 \cos(k_1/2)}} dq_2. \end{aligned}$$

Этот интеграл запишем в виде

$$d(k, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 \cos(k_2/2)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq_2}{\sqrt{(B^- - \cos q_2)(B^+ - \cos q_2)}},$$

где

$$B^+ := B^+(k, z) = \frac{6 - z + 2 \cos(k_1/2)}{2 \cos(k_2/2)}, \quad B^- := B^-(k, z) = \frac{6 - z - 2 \cos(k_1/2)}{2 \cos(k_2/2)}.$$

Здесь $B^- > 1$ при $z < m(k)$. Так как подынтегральная функция является четной на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, имеем

$$d(k, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos(k_1/2)} \int_0^\pi \frac{dq}{\sqrt{(B^- - \cos q)(B^+ - \cos q)}}.$$

Теперь с помощью универсальной замены $\cos q = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(q/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(q/2)}$ получим

$$\begin{aligned} d(k, z) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos(k_2/2)} \int_0^\pi \frac{dq}{\sqrt{B^- - \frac{1 - \operatorname{tg}^2(q/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(q/2)}} \sqrt{B^+ - \frac{1 - \operatorname{tg}^2(q/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(q/2)}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos(k_2/2)} \frac{2}{\sqrt{(B^- + 1)(B^+ + 1)}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{r^2 + t^2} \sqrt{u^2 + t^2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{B^- - 1}{B^- + 1}}, \quad u = \sqrt{\frac{B^+ - 1}{B^+ + 1}}, \quad r, u > 0. \quad (22)$$

В последнем интеграле в (21) используем замены $t = uy$, $r = au$. Тогда он принимает вид

$$\begin{aligned} J(r, u) &:= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{r^2 + t^2} \sqrt{u^2 + t^2}} = \frac{1}{u} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}} = \\ &= \frac{1}{u} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}} + \frac{1}{u} \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}} = \frac{1}{u} (J_1(a) + J_2(a)). \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $z \rightarrow m(k) - 0$ имеют место соотношения $B^- \rightarrow 1 + 0$, $r \rightarrow 0 + 0$ и $a \rightarrow 0 + 0$.

Теперь наша задача – найти асимптотику выражения $J_1(a) + J_2(a)$ при $a \rightarrow 0 + 0$. Ясно, что

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} J_2(a) = \lim_{a \rightarrow 0+0} \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}} = \int_1^\infty \frac{dy}{y \sqrt{1 + y^2}} = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Поэтому

$$J_2(a) = \ln(\sqrt{2} + 1) + o(1), \quad a \rightarrow 0 + 0.$$

Теперь вычислим первый интеграл:

$$J_1(a) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{1 + y^2}}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$J_1(a) = -\ln a + \ln 4 - \ln(1 + \sqrt{2}) + o(1).$$

Таким образом,

$$J(r, u) = \frac{J_1(a) + J_2(a)}{u} = \frac{-\ln a + \ln 4 + o(1)}{u}, \quad a \rightarrow 0 + 0. \quad (23)$$

Теперь, используя формулы (21) и (23), получаем

$$d(k, z) = \frac{1}{2\pi \cos(k_2/2)} \frac{2}{\sqrt{(B^- + 1)(B^+ + 1)}} \frac{-\ln a + \ln 4 + o(1)}{u}.$$

Так как $a = r/u$, с учетом формул (22) имеем

$$d(k, z) = \frac{1}{2\pi \cos(k_2/2)} \frac{2}{\sqrt{B^- + 1}\sqrt{B^+ - 1}} \left(-\ln \sqrt{\frac{B^- - 1}{B^- + 1} \frac{B^+ + 1}{B^+ - 1}} + \ln 4 + o(1) \right).$$

Учитывая определение функций $B^\pm$, при $z \rightarrow m(k) - 0$ получим формулу (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если выполнены условия теоремы 3, то выполняются и условия теоремы 1. При этом собственные значения $z = z_n(k_1, k_2, \pi)$ оператора $H(k_1, k_2, \pi)$ удовлетворяют уравнению (16). Подставляя асимптотику (20) в (16), получим уравнение

$$\frac{1}{4\pi \sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}} \times \\ \times \left(-\ln(m(k_1, k_2, \pi) - z) + \ln \frac{64 \cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}{\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2)} + o(1) \right) = \frac{1}{\hat{v}(ne_3)}. \quad (24)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{1}{4\pi \sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}} \times \\ \times \left(-\ln(m(k_1, k_2, \pi) - z) + \ln \frac{64 \cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}{\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2)} \right) = \frac{1}{\hat{v}(ne_3)}.$$

Это логарифмическое уравнение имеет единственное решение

$$z_n(k_1, k_2, \pi) = m(k_1, k_2, \pi) - \frac{64 \cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}{\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2)} \exp \left\{ -\frac{4\pi \sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2)}}{\hat{v}(ne_3)} \right\}.$$

Применяя методы теории возмущений, получим, что уравнение (24) имеет решение вида (19).

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12:5** (1970), 1080–1091.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [3] R. D. Amado, J. V Noble, *Phys. Rev. D*, **5:8** (1972), 1992–2002.
- [4] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136):4(8)** (1974), 567–593.
- [5] Yu. N. Ovchinnikov, I. M Sigal, *Ann. Physics*, **123:2** (1989), 274–295.

- [6] H. Tamura, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 433–459.
- [7] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [8] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 273–288.
- [9] K. Pankrashkin, “Variational principle for Hamiltonians with degenerate bottom”, *Mathematical Results in Quantum Mechanics* (Moieciu, Romania, 10–15 September, 2007), eds. I. Beltita, G. Nenciu, R. Purice, World Sci., Singapore, 2008, 231–240, arXiv: 0710.4790.
- [10] P. A. Faria da Viegas, L. Ioriatti, M. O’Carrol, *Phys. Rev. E* (3), **66**:1 (2002), 016130, 9 pp.
- [11] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245.
- [12] Ж. И. Абдуллаев, З. Э. Муминов, *Докл. АН РУз*, **3** (2004), 4–8.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 11.01.2013,
после доработки 14.02.2013