Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Зайцев, Структура S -матрицы и метод обратной задачи в J -матричном подходе, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 29–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:38:56

© 2004 г.

С. А. Зайцев*

СТРУКТУРА S -МАТРИЦЫ И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В J -МАТРИЧНОМ ПОДХОДЕ

На основе аналитических свойств S -матрицы получена система уравнений обратной задачи рассеяния для нелокальных потенциалов с лагерровскими формфакторами. При этом в системе может присутствовать кулоновское отталкивание.

Ключевые слова: сепарабельные потенциалы, обратная задача рассеяния, метод J -матрицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] был предложен метод построения по известной S -матрице нелокальных взаимодействий

$$\hat{V} = \sum_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle V^{\alpha\beta} \langle\beta| \quad (1)$$

с сепарабельными парциальными потенциалами $V^{\alpha\beta}$, задаваемыми разложением

$$V^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \sum_{n=0}^{N_\alpha-1} \sum_{n'=0}^{N_\beta-1} |\bar{\phi}_n^{(\alpha)}\rangle V_{n,n'}^{\alpha\beta} \langle\bar{\phi}_{n'}^{(\beta)}| \quad (2)$$

с использованием осцилляторных [1] базисных функций $|\bar{\phi}_n^{(\alpha)}\rangle$. Здесь μ – приведенная масса, а индекс канала α обозначает набор квантовых чисел, включающий значение орбитального момента ℓ_α . В работе [2] показано, что подход [1] остается справедливым и в случае, когда взаимодействие включает кулоновское отталкивание, если в качестве формфакторов $|\bar{\phi}_n^{(\alpha)}\rangle$ короткодействующего потенциала (2) выбрать лагерровские базисные функции

$$|\bar{\phi}_n^{(\alpha)}\rangle \equiv |\bar{\phi}_n^{\ell_\alpha}\rangle = \frac{n!}{r(n+2\ell_\alpha+1)!} (2br)^{\ell_\alpha+1} e^{-br} L_n^{2\ell_\alpha+1}(2br), \quad (3)$$

где b – масштабный параметр.

* Хабаровский государственный технический университет, Хабаровск, Россия.
E-mail: zaytsev@mail.khb.ru

Результат решения обратной задачи в J -матричном подходе [1], [2] для произвольного числа каналов N_c можно получить в форме собственных значений $\{\lambda_j\}$ и элементов $\{Z_{K_\alpha,j}\}$ ($K_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} N_\beta$) N_c строк ортогональной $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -матрицы $\mathbf{Z}$ ($\mathcal{N} = \sum_{\alpha=1}^{N_c} N_\alpha$) собственных векторов матрицы гамильтониана $\hat{h}$, рассчитанной в осцилляторном базисе $\{|\bar{\phi}_n^{(\alpha)}\rangle, n = \overline{0, N_\alpha - 1}, \alpha = \overline{1, N_c}\}$ [1], или, в случае использования лагерровских формфакторов (3), в базисе ортонормированных функций [2]

$$|\psi_n^{(\alpha)}\rangle = d_n^{\ell_\alpha} [2br]^{\ell_\alpha+1} e^{-br} L_n^{2\ell_\alpha+2}(2br), \quad d_n^\ell = \sqrt{\frac{2bn!}{(n+2\ell+2)!}}. \quad (4)$$

Параметры $\{\lambda_j, Z_{K_\alpha,j}, j = \overline{1, \mathcal{N}}\}$ задают набор фазовоэквивалентных потенциалов (1), (2).

С помощью потенциалов (1), (2) конечного ранга $\mathcal{N}$ можно описать данные по рассеянию лишь на ограниченном энергетическом интервале $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, $\epsilon = k^2$. Выбор значения правой границы ϵ_0 налагает ограничения на параметры задачи b и N_α , $\alpha = \overline{1, N_c}$. Например, в одноканальном случае матрица искомого потенциала

$$\hat{V}^\ell = \frac{\hbar^2}{2\mu} \sum_{n,n'=0}^{N-1} |\bar{\phi}_n^\ell\rangle V_{n,n'} \langle \bar{\phi}_{n'}^\ell| \quad (5)$$

должна обеспечивать существование у соответствующей $(N \times N)$ -матрицы гамильтониана собственных значений λ_m , удовлетворяющих неравенству $\lambda_m > \epsilon_0$. Действительно, фаза рассеяния на потенциале (5) (которую назовем теоретической) при $\epsilon > \lambda_{\max}$, где $\lambda_{\max}$ – старшее собственное значение, (неконтролируемо) убывает [2]. Иными словами, в этой области энергий значения теоретической и экспериментальной фаз рассеяния в общем случае различны. В реальных расчетах это различие начинается при меньших энергиях. Таким образом, часть искомых параметров $\{\lambda_j\}$ – назовем их “внутренними” – будет принадлежать интервалу $[0, \epsilon_0]$ (где теоретическая и экспериментальная фазы рассеяния совпадают). Остальные – “внешние” – окажутся за пределами интервала $[0, \epsilon_0]$, т.е. в области, где теоретическая и экспериментальная фазы рассеяния заведомо различны. “Внутренние” и “внешние” параметры $\{\lambda_j, Z_{N,j}\}$ различаются способами их поиска. “Внутренние” параметры $\{\lambda_j \in [0, \epsilon_0], Z_{N,j}^2\}$ отождествляются с полюсами и вычетами вспомогательной функции $\tilde{P}$ (матрицы в многоканальном случае) [1], [2], которая однозначно связана с S -матрицей. Для определения “внешних” параметров $\{\lambda_j \notin [0, \epsilon_0], Z_{N,j}^2\}$ мы не можем воспользоваться данными рассеяния по указанной выше причине. Здесь мы имеем единственное уравнение – условие нормировки вектора $\{Z_{N,j}\}$

$$\sum_{j=1}^N Z_{N,j}^2 = 1. \quad (6)$$

В результате в задаче возникают свободные параметры. Уравнения на связанные состояния (в случае присутствия последних) с энергиями $\{-\kappa_\nu^2, \nu = \overline{1, N_b}\}$,

$$\mathcal{D}^{(+)}(i\kappa_\nu) = 0, \quad (7)$$

где $\mathcal{D}^{(+)}$ – детерминант Фредгольма, не устраняют этой неопределенности, поскольку отвечают за ту часть “внешних” параметров $\{\lambda_j\}$, которые располагаются слева от интервала $[0, \epsilon_0]$.

С ростом числа каналов количество “внешних” параметров возрастает быстрее числа уравнений, которые ограничиваются условиями ортонормированности строк матрицы $\mathbf{Z}$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} Z_{K_\alpha, j} Z_{K_\beta, j} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Ниже обсуждается S -матрица в случае, когда короткодействующий потенциал в системе одноименно заряженных частиц задается сепарабельным разложением (1), (2) с лагранжевскими формфакторами (3). Показано, что свойства S -матрицы позволяют сформулировать дополнительные уравнения для определения искомых параметров $\{\lambda_j, Z_{K_\alpha, j}\}$, задающих потенциал (1), (2).

В разделах 2–4 рассмотрено потенциальное рассеяние одноименно заряженных частиц. Обобщение на случай многоканального рассеяния, когда энергия одинакова во всех каналах, сделано в разделе 5. В разделе 6 приводится пример, иллюстрирующий предлагаемый способ учета особенностей S -матрицы при построении потенциала (5). Раздел 7 содержит заключение.

2. СТРУКТУРА S -МАТРИЦЫ

В общем случае рассеяния частиц с отличными от нуля зарядами Z_1 и Z_2 используемые в методе J -матрицы [3] аналоги кулоновских решений $S_n^\ell, C_n^{\ell(+)}$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} S_n^\ell(k) &= \sin \zeta \omega_\ell(k) p_n^\ell(k), \\ C_n^{\ell(+)}(k) &= \frac{1}{\omega_\ell(k)} q_n^{\ell(+)}(k), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\omega_\ell(k) = \frac{|\Gamma(\ell + 1 + it)| (2 \sin \zeta)^\ell}{e^{\pi t/2} \xi^{it}} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} p_n^\ell(k) &= \frac{1}{(2\ell + 1)!} (-\xi)^n {}_2F_1(-n, \ell + 1 + it; 2\ell + 2; 1 - \xi^{-2}), \\ q_n^{\ell(+)}(k) &= -\frac{n! \Gamma(\ell + 1 + it)}{\Gamma(n + \ell + 2 + it)} (-\xi)^{n+1} \times \\ &\quad \times {}_2F_1(-\ell + it, n + 1; n + \ell + 2 + it; \xi^2), \end{aligned} \quad (11)$$

$\xi = e^{i\zeta} = (ib - k)/(ib + k)$, $t = \mathcal{Z}/k$, $\mathcal{Z} = Z_1 Z_2 e^2 \mu / \hbar^2$. Мы ограничиваемся рассмотрением рассеяния одноименно заряженных частиц, т.е. полагаем $\mathcal{Z} > 0$. В случае, когда наряду с кулоновским имеется короткодействующий потенциал (5), выражение для S -матрицы имеет вид [4]:

$$S = S_\ell^{(c)} \overline{S}^{(N)}, \quad (12)$$

где $S_\ell^{(c)} = \Gamma(\ell + 1 + it)/\Gamma(\ell + 1 - it)$ – кулоновская S -матрица,

$$\overline{S}^{(N)} = \frac{C_{N-1}^{\ell(-)}(k) - P_N(k^2)J_{N-1,N}(k)C_N^{\ell(-)}(k)}{C_{N-1}^{\ell(+)}(k) - P_N(k^2)J_{N-1,N}(k)C_N^{\ell(+)}(k)}. \quad (13)$$

Здесь $J_{n,n'}(k)$ – элементы трехдиагональной J -матрицы [3]–[5]:

$$\begin{aligned} J_{n,n}(k) &= \frac{(n + 2\ell + 1)!}{n!} \left[\frac{1}{b}(n + \ell + 1)(b^2 - k^2) + 2\mathcal{Z} \right], \\ J_{n,n+1}(k) &= J_{n+1,n}(k) = \frac{(n + 2\ell + 2)!}{2bn!} (b^2 + k^2). \end{aligned} \quad (14)$$

P -функция определена следующим образом [2]:

$$P_N(k^2) = (d_{N-1}^\ell)^2 \sum_{j=1}^N \frac{Z_{N,j}^2}{k^2 - \lambda_j}. \quad (15)$$

С учетом (14), (15) и соотношения [5]

$$C_n^{\ell(-)}(k) = C_n^{\ell(+)}(k) - 2iS_n^\ell(k), \quad k > 0, \quad (16)$$

выражение (13) можно записать в виде

$$\overline{S}^{(N)} = 1 - i \frac{p_{N-1}^\ell(k)\mathcal{A}_N(k^2) - p_N^\ell(k)\mathcal{B}_N(k^2)}{q_{N-1}^{\ell(+)}(k)\mathcal{A}_N(k^2) - q_N^{\ell(+)}(k)\mathcal{B}_N(k^2)} 2 \sin \zeta \omega_\ell^2(k), \quad (17)$$

где

$$\mathcal{A}_N(k^2) = \prod_{j=1}^N (k^2 - \lambda_j), \quad \mathcal{B}_N(k^2) = (b^2 + k^2) \sum_{j=1}^N \left[Z_{N,j}^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (k^2 - \lambda_i) \right]. \quad (18)$$

Ниже кратко остановимся на уравнениях относительно неизвестных параметров $\{\lambda_j, Z_{N,j}\}$, следующих из необходимости описания свойств дискретного спектра системы.

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Для описания связанных состояний необходимо выполнить аналитическое продолжение выражения (17) для S -матрицы в верхнюю полуплоскость k . Заметим, что при $\text{Im } k > 0$ гипергеометрические ряды в (11) сходятся, поскольку здесь $|\xi| < 1$.

В работе [6] для детерминанта Фредгольма

$$\mathcal{D}^{(+)}(k) = \det(\mathcal{I} - \widehat{G}^{(+)}\widehat{V}), \quad (19)$$

где $\mathcal{I}$ – единичная $(N \times N)$ -матрица, $\widehat{V}$ – матрица потенциала (5), $\widehat{G}^{(+)}$ – матрица кулоновской функции Грина, рассчитанная в базисе (3), было получено выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(+)}(k) = & -\frac{(N+2\ell+1)!}{(2\ell+1)!(N-1)!} \frac{1}{(b^2+k^2)^N} \times \\ & \times (q_{N-1}^{\ell(+)}(k)\mathcal{A}_N(k^2) - q_N^{\ell(+)}(k)\mathcal{B}_N(k^2)). \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, условие (7) обращения в нуль детерминанта Фредгольма при заданных значениях энергии $\{-\kappa_\nu^2, \nu = \overline{1, N_b}\}$ связанных состояний дает N_b уравнений относительно параметров $\{\lambda_j, Z_{N,j}\}$:

$$q_{N-1}^{\ell(+)}(i\kappa_\nu)\mathcal{A}_N(-\kappa_\nu^2) - q_N^{\ell(+)}(i\kappa_\nu)\mathcal{B}_N(-\kappa_\nu^2) = 0. \quad (21)$$

К этому следует добавить информацию об асимптотических нормировочных константах $\{\mathcal{M}^{(\nu)}, \nu = \overline{1, N_b}\}$ – коэффициентах пропорциональности между (нормированными на единицу) волновыми функциями связанных состояний $\Phi_\ell(i\kappa_\nu, r)$ и решениями Йоста $f_\ell(k, r)$:

$$\Phi_\ell(i\kappa_\nu, r) = \mathcal{M}^{(\nu)} f_\ell(i\kappa_\nu, r). \quad (22)$$

В случае

$$f_\ell(k, r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kr - t \ln 2kr)} \quad (23)$$

имеет место соотношение [7]–[9]

$$i \operatorname{Res} |_{k=i\kappa_\nu} S(k) = (-1)^\ell (\mathcal{M}^{(\nu)})^2. \quad (24)$$

Соотношение (24) с учетом (12), (17) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{p_{N-1}^\ell(i\kappa)\mathcal{A}_N(-\kappa^2) - p_N^\ell(i\kappa)\mathcal{B}_N(-\kappa^2)}{d\{q_{N-1}^{\ell(+)}(k)\mathcal{A}_N(k^2) - q_N^{\ell(+)}(k)\mathcal{B}_N(k^2)\}/dk|_{k=i\kappa_\nu}} = \\ & = -ie^{-i\pi\eta_\nu} \exp\left\{\eta_\nu \ln\left(\frac{b-\kappa_\nu}{b+\kappa_\nu}\right)^2\right\} \left(\frac{b^2-\kappa_\nu^2}{4b\kappa_\nu}\right)^{2\ell+1} \left(\frac{\mathcal{M}^{(\nu)}}{\Gamma(\ell+1+\eta_\nu)}\right)^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\eta_\nu = \mathcal{Z}/\kappa_\nu$.

Таким образом, стандартный учет информации о дискретном спектре системы дает $2N_b$ уравнений (21) и (25), которые можно ассоциировать с “внешними” параметрами $\{\lambda_i < 0, Z_{N,i}, i = \overline{1, N_b}\}$. Ниже мы рассмотрим особенности S -матрицы (17), которые позволяют сформулировать уравнения относительно “внешних” параметров $\{\lambda_j, Z_{N,j}\}$, для которых $\lambda_j > \epsilon_0$.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегралы

$$\int_0^\pi d\zeta (C_m^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_m^{\ell(+)})(C_n^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_n^{\ell(+)}), \quad (26)$$

характерные для дискретных форм обратной задачи (см., например, книгу [10] и цитируемую в ней литературу). Заметим, что участку $[0, \pi]$ интегрирования по ζ соответствует бесконечный интервал $k \in [0, \infty)$ (поскольку $\sin \zeta = 2bk/(b^2 + k^2)$, $\cos \zeta = (b^2 - k^2)/(b^2 + k^2)$, см. (11)), и можно воспользоваться соотношением

$$C_n^{\ell(-)}(k) = (C_n^{\ell(+)}(k))^*, \quad k > 0, \quad (27)$$

и унитарностью S -матрицы: $\bar{S}^{(N)*} = (\bar{S}^{(N)})^{-1}$. Таким образом, для интеграла (26) получаем выражение

$$\int_0^\pi d\zeta (C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(+)} - \bar{S}^{(N)} C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(+)} - \bar{S}^{(N)*} C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(-)} + C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(-)}). \quad (28)$$

Далее, используя соотношение (16), преобразуем (28) к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\zeta \{C_m^{\ell(-)}(C_n^{\ell(-)} + 2iS_n^\ell) - \bar{S}^{(N)} C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(+)} - \\ & - \bar{S}^{(N)*} C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(-)} + C_m^{\ell(+)}(C_n^{\ell(+)} - 2iS_n^\ell)\} = \\ & = \int_0^\pi d\zeta \{(1 - \bar{S}^{(N)*})C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(-)} + \\ & + (1 - \bar{S}^{(N)})C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(+)} + 2iS_n^\ell(C_m^{\ell(-)} - C_m^{\ell(+)})\} = \\ & = \int_0^\pi d\zeta \{(1 - \bar{S}^{(N)*})C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(-)} + (1 - \bar{S}^{(N)})C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(+)}\} + 4 \int_0^\pi d\zeta S_m^\ell S_n^\ell. \end{aligned} \quad (29)$$

Второй интеграл в (29) вычисляем, используя полноту функций S_n^ℓ [4]:

$$\int_0^\pi d\zeta S_n^\ell S_m^\ell = \delta_{n,m} \frac{\pi}{2} \frac{n!}{(n+2\ell+1)!(n+\ell+1+\tau)}, \quad (30)$$

где $\tau = Zb$. Из структуры второго слагаемого в подынтегральном выражении первого интеграла в (29),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m,n} &= (1 - \bar{S}^{(N)})C_m^{\ell(+)} C_n^{\ell(+)} = \frac{p_{N-1}^\ell(k)\mathcal{A}_N(k^2) - p_N^\ell(k)\mathcal{B}_N(k^2)}{q_{N-1}^{\ell(+)}(k)\mathcal{A}_N(k^2) - q_N^{\ell(+)}(k)\mathcal{B}_N(k^2)} \times \\ & \times (\xi - \xi^{-1})q_m^{\ell(+)}(k)q_n^{\ell(+)}(k), \end{aligned} \quad (31)$$

следует

$$\mathcal{F}_{m,n}(-\zeta) = (\mathcal{F}_{m,n}(\zeta))^*, \quad (32)$$

т.е. изменение знака (вещественного) k эквивалентно здесь комплексному сопряжению. Действительно, замена $k \rightarrow -k$ ($\zeta \rightarrow -\zeta$) приводит к замене $\xi \rightarrow \xi^{-1}$, $t \rightarrow -t$ в (11), т.е. действует так же, как и комплексное сопряжение. Заметим, что вещественные функции $\mathcal{A}_N$, $\mathcal{B}_N$ (18) при этом не изменяются. Таким образом, первое слагаемое в подынтегральном выражении первого интеграла в (29) дает вклад

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\zeta (1 - \bar{S}^{(N)*}) C_m^{\ell(-)} C_n^{\ell(-)} &= \int_0^\pi d\zeta (\mathcal{F}_{m,n}(\zeta))^* = \\ &= \int_0^\pi d\zeta \mathcal{F}_{m,n}(-\zeta) = - \int_0^{-\pi} d\zeta \mathcal{F}_{m,n}(\zeta) = \int_{-\pi}^0 d\zeta \mathcal{F}_{m,n}(\zeta). \end{aligned} \quad (33)$$

В результате для интеграла (26) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\zeta (C_n^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_n^{\ell(+)})(C_m^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_m^{\ell(+)})* &= \\ &= \int_{-\pi}^\pi d\zeta \mathcal{F}_{m,n} + \delta_{n,m} 2\pi \frac{n!}{(n+2\ell+1)!(n+\ell+1+\tau)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Интеграл в правой части (34) путем замены переменной интегрирования $\zeta \rightarrow \xi = e^{i\zeta}$ (см. (11)) преобразуется в контурный интеграл

$$-i \oint d\xi \xi^{-1} \mathcal{F}_{m,n} \quad (35)$$

вдоль единичной окружности в комплексной плоскости ξ .

Заметим, что в отсутствие кулоновского взаимодействия детерминант Фредгольма $\mathcal{D}^{(+)}(k)$ (20) является аналитической функцией на всей плоскости k , за исключением точки $k = -ib$, где у него имеется полюс порядка $2(N+\ell)$ [6]. Следовательно, S -матрица имеет полюс в точке $k = ib$ того же порядка. Этот полюс, по-видимому, является следствием асимптотического поведения на бесконечности формфакторов (3) потенциала (5), и его можно отнести к так называемым “ложным” полюсам [11]. Так, например, функция Йоста (детерминант Фредгольма), соответствующая экспоненциальному потенциалу $V(r) = V_0 e^{-r/a}$, имеет полюсы в нижней полуплоскости k в точках $k = -in/2a$, $n = 1, 2, \dots$. В свою очередь, S -матрица имеет бесконечное множество полюсов в точках $k = in/2a$, которым не соответствуют связанные состояния [7], [11].

Теорема Левинсона устанавливает связь между изменением фазы рассеяния вдоль действительной оси энергии и числом связанных состояний. Фаза рассеяния совпадает с фазой функции Йоста, взятой с обратным знаком [8]. Таким образом, теорема Левинсона может быть сведена к разности между изменением мнимой части $\ln \mathcal{D}^{(+)}(k)$ вдоль замкнутого контура, включающего всю действительную ось и полуокружность бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, и числом нулей функции Йоста в области, ограниченной этим контуром [7], [8]. Следовательно, полюс $k = ib$ S -матрицы, не являющийся нулем детерминанта Фредгольма, а обязанный своим происхождением полюсу $k = -ib$ функции $\mathcal{D}^{(+)}(k)$, не влияет на это соотношение (как и бесконечное число “ложных” полюсов S -матрицы, отвечающей экспоненциальному потенциалу).

Заметим, что преобразование $k \rightarrow \xi$ отображает верхнюю полуплоскость комплексной плоскости k в единичный круг на плоскости ξ . Поскольку выражение в знаменателе в правой части (31) с точностью до множителя совпадает с детерминантом Фредгольма (20), то все его корни в верхней полуплоскости k располагаются на мнимой оси [7] (или на вещественной оси плоскости ξ внутри круга единичного радиуса). Из (17), (11) видно, что у подынтегрального выражения в (35) имеется полюс в точке $\xi = 0$ порядка $N_0 = 2N - n - m - 1$ (кроме полюсов, отвечающих связанным состояниям). Представляя интеграл в правой части (34) в виде суммы вычетов, тождество (34) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
r_{m,n} &\equiv \text{Res}|_{\xi=0} \xi^{-1} \mathcal{F}_{m,n} = \\
&= \frac{b}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{b^2 + k^2} (C_m^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_m^{\ell(+)})(C_n^{\ell(-)} - \bar{S}^{(N)} C_n^{\ell(+)*} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{N_b} e^{-i\pi\eta_\nu} \exp\left\{\eta_\nu \ln\left(\frac{b - \kappa_\nu}{b + \kappa_\nu}\right)^2\right\} \left(\frac{2b}{b^2 - \kappa_\nu^2}\right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{b^2 - \kappa_\nu^2}{4b\kappa_\nu}\right)^{2\ell} \frac{(\mathcal{M}^{(\nu)})^2 q_m^{\ell(+)}(i\kappa_\nu) q_n^{\ell(+)}(i\kappa_\nu)}{(\Gamma(\ell + 1 + \eta_\nu))^2} - \\
&\quad - \delta_{n,m} \frac{n!}{(n + 2\ell + 1)!(n + \ell + 1 + \tau)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Обсудим возможность использования тождества (36) в поисках “внешних” параметров. Пусть при некоторых b и N нам удалось описать поведение экспериментальной фазы рассеяния δ_ℓ^{exp} на интервале $[0, \epsilon_0]$. Будем увеличивать N (при фиксированном b) и следить за разностью

$$|\Im_{m,n}^{(N)} - \Im_{m,n}^{\text{exp}}|, \tag{37}$$

где $\Im_{m,n}^{(N)}$ — интеграл в правой части (36), $\Im_{m,n}^{\text{exp}}$ — значение этого интеграла, полученное с использованием S -матрицы $\bar{S} = e^{2i\delta_\ell^{\text{exp}}}$. Увеличивая N , можно расширять область описания фазы рассеяния (участок, на котором теоретическая фаза $\delta_\ell^{(N)}$, $\bar{S}^{(N)} = e^{2i\delta_\ell^{(N)}}$, совпадает с δ_ℓ^{exp}). Таким образом, увеличивая N , можно сделать разность (37) сколь угодно малой. Далее, мы не интересуемся поведением фазы рассеяния вне интервала $[0, \epsilon_0]$. Следовательно, можно экстраполировать поведение фазы $\delta_\ell^{\text{exp}}(k)$, начиная с $k_0 = \sqrt{\epsilon_0}$, функцией с достаточно быстро затухающей асимптотикой, удовлетворяющей условию [8]

$$\int_0^\infty |\delta_\ell(k)| \frac{dk}{k} < \infty. \tag{38}$$

Учитывая возможность произвольного поведения исходной функции δ_ℓ^{exp} вне интервала $[0, \epsilon_0]$, можно ожидать, что переход к модифицированной таким образом экспериментальной фазе улучшит сходимость $\Im_{m,n}^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Im_{m,n}^{\text{exp}}$.

Заметим, что с ростом N возрастает значение индексов m, n ($m + n \leq 2N - 1$) отличных от нуля вычетов $r_{m,n}$ (36). Можно предположить, что вычеты $r_{m,n}$ с меньшими

m, n быстрее сходятся к экспериментальным значениям $r_{m,n}^{\text{exp}}$, задаваемым правой частью (36), где вместо $\overline{S}^{(N)}$ используется $e^{2i\delta_\ell^{\text{exp}}}$.

Исходя из вышесказанного мы предлагаем использовать выражение (36) при достаточно большом N и как можно меньших m, n в качестве уравнения на “внешние” параметры. Для этого S -матрица $\overline{S}^{(N)}$ в правой части (36) заменяется модифицированной описанным выше способом экспериментальной S -матрицей. Интервал описания исходной экспериментальной фазы остается прежним, однако N должно быть достаточно велико, чтобы воспроизвести модифицированную фазу рассеяния на достаточно широком интервале $[0, \epsilon_1]$ (т.е. теперь неизвестными остаются параметры, “внешние” по отношению к этому новому интервалу).

Заметим, что при задании экспериментальной S -матрицы следует учитывать свойства ее образа (17) вблизи точки $k = 0$. Так в случае рассеяния нейтральных частиц имеем

$$1 - \overline{S}^{(N)} \sim k^{2\ell+1}, \quad k \rightarrow 0. \quad (39)$$

В случае заряженных частиц функции (11) в пределе $k = 0$ выражаются [5] через вырожденные гипергеометрические функции [12]:

$$\begin{aligned} p_n^\ell(k) &\stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} (-1)^n \frac{n!}{(n+2\ell+1)!} L_n^{2\ell+1}(-4\tau), \\ q_n^{\ell(+)}(k) &\stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} (-1)^n n! (4\tau)^{2\ell+1} U(n+2\ell+2, 2\ell+2, 4\tau). \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, имеем

$$1 - \overline{S}^{(N)} \sim e^{-2\pi\mathcal{Z}/k}, \quad k \rightarrow 0. \quad (41)$$

Очевидно, что при соблюдении условий (39) или (41) подынтегральное выражение в правой части (36) не имеет особенностей в начале координат.

5. СВЯЗАННЫЕ КАНАЛЫ

В “упругом” случае (когда значения энергии в каналах совпадают) многоканальная S -матрица, соответствующая системе одноименно заряженных частиц с добавочным взаимодействием (1), (2), может быть представлена в виде [13]

$$\overline{S}^{(N)} = \mathcal{I} - 2i [\mathcal{C}_{N-1}^{(+)} - P\mathcal{J}\mathcal{C}_N^{(+)}]^{-1} [\mathcal{S}_{N-1} - P\mathcal{J}\mathcal{S}_N], \quad (42)$$

где $\mathcal{I}, \mathcal{C}_{N-1}^{(+)}, \mathcal{C}_N^{(+)}, \mathcal{S}_{N-1}, \mathcal{S}_N$ и $\mathcal{J}$ — диагональные $(N_c \times N_c)$ -матрицы с элементами:

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}]_{\alpha,\beta} &= \delta_{\alpha,\beta}, \quad [\mathcal{C}_{N-1}^{(+)}]_{\alpha,\alpha} = C_{N_{\alpha}-1}^{\ell_{\alpha}(+)}, \quad [\mathcal{C}_N^{(+)}]_{\alpha,\alpha} = C_{N_{\alpha}}^{\ell_{\alpha}(+)}, \\ [\mathcal{S}_{N-1}]_{\alpha,\alpha} &= S_{N_{\alpha}-1}^{\ell_{\alpha}}, \quad [\mathcal{S}_N]_{\alpha,\alpha} = S_{N_{\alpha}}^{\ell_{\alpha}}, \\ [\mathcal{J}]_{\alpha,\alpha} &= \frac{(N_{\alpha} + 2\ell_{\alpha} + 1)!}{2b(N_{\alpha} - 1)!} (b^2 + k^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Элементы P -матрицы имеют вид [2]

$$P_{\alpha,\beta} = d_\alpha d_\beta \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{Z_{K_\alpha,j} Z_{K_\beta,j}}{k^2 - \lambda_j}, \quad d_\alpha = d_{N_\alpha-1}^{\ell_\alpha}. \quad (44)$$

Для описания связанных состояний воспользуемся выражением для детерминанта Фредгольма

$$\mathcal{D}^{(+)}(k) = \det[\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)} - P\mathcal{J}\mathcal{Q}_N^{(+)}] \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{k^2 - \lambda_j}{k^2 + b^2} \prod_{\alpha=1}^{N_c} \frac{-(N_\alpha + 2\ell_\alpha + 1)!}{(N_\alpha - 1)!(2\ell_\alpha + 1)!}, \quad (45)$$

где $\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)}$, $\mathcal{Q}_N^{(+)}$ — диагональные матрицы:

$$[\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)}]_{\alpha,\alpha} = q_{N_\alpha-1}^{\ell_\alpha^{(+)}(k)}, \quad [\mathcal{Q}_N^{(+)}]_{\alpha,\alpha} = q_{N_\alpha}^{\ell_\alpha^{(+)}(k)}. \quad (46)$$

Тогда условие (7) преобразуется в уравнение

$$\det[\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)} - P\mathcal{J}\mathcal{Q}_N^{(+)}]|_{k=i\kappa} = 0. \quad (47)$$

Выражение для вычетов элементов многоканальной S -матрицы $S = e^{i\sigma_L} \bar{S}^{(\mathcal{N})} e^{i\sigma_L}$ имеет вид [9]

$$i \operatorname{Res}|_{k=i\kappa} [S(k)]_{\alpha,\beta} = e^{i\pi(\ell_\alpha + \ell_\beta)/2} \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_\beta, \quad (48)$$

где $e^{i\sigma_L}$ — диагональная матрица с элементами

$$[e^{i\sigma_L}]_{\alpha,\alpha} = \frac{\Gamma(\ell_\alpha + 1 + it)}{|\Gamma(\ell_\alpha + 1 + it)|}, \quad (49)$$

а $\mathcal{M}$ — N_c -компонентный вектор, связывающий решение Йоста F и вектор Φ волновой функции связанного состояния [7]:

$$F(i\kappa, r) \mathcal{M} = \Phi(i\kappa, r). \quad (50)$$

Из (42), (48) следует уравнение

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res}|_{k=i\kappa} [[\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)} - P\mathcal{J}\mathcal{Q}_N^{(+)}]^{-1} [\mathcal{P}_{N-1} - P\mathcal{J}\mathcal{P}_N]]_{\alpha,\beta} = \\ = e^{-i\pi\eta} \exp\left\{\eta \ln\left(\frac{b-\kappa}{b+\kappa}\right)^2\right\} \left(\frac{b^2 - \kappa^2}{4b\kappa}\right)^{\ell_\alpha + \ell_\beta + 1} \frac{\mathcal{M}_\alpha}{\Gamma(\ell_\alpha + 1 + \eta)} \frac{\mathcal{M}_\beta}{\Gamma(\ell_\beta + 1 + \eta)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Дополнительные уравнения могут быть получены путем учета полюсной особенности элементов S -матрицы (42) в точке $k = ib$. Для этого потребуются матричные аналоги интегралов (26)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\zeta [\mathcal{C}_m^{(-)} - \mathcal{C}_m^{(+)} \bar{S}^{(\mathcal{N})}] [\mathcal{C}_n^{(-)} - \mathcal{C}_n^{(+)} \bar{S}^{(\mathcal{N})}]^\dagger = \\ = \int_{-\pi}^\pi d\zeta \mathcal{C}_m^{(+)} [\mathcal{I} - \bar{S}^{(\mathcal{N})}] \mathcal{C}_n^{(+)} + 2\pi \Delta_{m,n}, \end{aligned} \quad (52)$$

где элементы диагональных матриц $\mathcal{C}_n^{(+)}$, $\Delta_{m,n}$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_n^{(+)}]_{\alpha,\alpha} &= C_{n_\alpha}^{\ell_\alpha(+)}, \\ [\Delta_{m,n}]_{\alpha,\alpha} &= \delta_{m_\alpha, n_\alpha} \frac{n_\alpha!}{(n_\alpha + 2\ell_\alpha + 1)!(n_\alpha + \ell_\alpha + 1 + \tau)}. \end{aligned} \quad (53)$$

При выводе (52) мы воспользовались соотношением

$$\mathcal{C}_n^{(+)} = \Omega^{-1} \mathcal{Q}_n^{(+)}, \quad \mathcal{S}_n = \sin \zeta \Omega \mathcal{P}_n, \quad (54)$$

где $\mathcal{Q}_n^{(+)}$, $\mathcal{P}_n^{(+)}$ и Ω — диагональные матрицы с элементами

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}_n^{(+)}]_{\alpha,\alpha} &= q_{n_\alpha}^{\ell_\alpha(+)}(k), \quad [\mathcal{P}_n]_{\alpha,\alpha} = p_{n_\alpha}^{\ell_\alpha}(k), \\ [\Omega]_{\alpha,\alpha} &= \frac{(2 \sin \zeta)^{\ell_\alpha} |\Gamma(\ell_\alpha + 1 + it)|}{e^{\pi t/2} \xi^{it}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Подынтегральное выражение в правой части (52) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}_{m,n} = (\xi - \xi^{-1}) \mathcal{Q}_m^{(+)} [\mathcal{Q}_{N-1}^{(+)} - P \mathcal{J} \mathcal{Q}_N^{(+)}]^{-1} [P_{N-1} - P \mathcal{J} \mathcal{P}_N] \mathcal{Q}_n^{(+)}. \quad (56)$$

А сам интеграл представляется в виде контурного (35) и сводится к сумме вычетов по связанным состояниям и вычету, соответствующему полюсу порядка $N_0 = N_\alpha + N_\beta - m_\alpha - n_\beta - 1$ в точке $\xi = 0$. В результате получаем тождество, аналогичное (36):

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|\xi=0} \xi^{-1} [\mathcal{F}_{m,n}]_{\alpha,\beta} &= \frac{b}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{b^2 + k^2} [[C_m^{(-)} - C_m^{(+)} \overline{S}^{(\mathcal{N})}] [C_n^{(-)} - C_n^{(+)} \overline{S}^{(\mathcal{N})}]^\dagger]_{\alpha,\beta} - \\ &- [\Delta_{m,n}]_{\alpha,\beta} + \sum_{\nu=1}^{N_b} e^{-i\pi\eta_\nu} \exp \left\{ \eta_\nu \ln \left(\frac{b - \kappa_\nu}{b + \kappa_\nu} \right)^2 \right\} \left(\frac{2b}{b^2 - \kappa_\nu^2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{b^2 - \kappa_\nu^2}{4b\kappa_\nu} \right)^{\ell_\alpha + \ell_\beta} \frac{\mathcal{M}_\alpha^{(\nu)} q_{m_\alpha}^{\ell_\alpha(+)}(i\kappa_\nu)}{\Gamma(\ell_\alpha + 1 + \eta_\nu)} \frac{\mathcal{M}_\beta^{(\nu)} q_{n_\beta}^{\ell_\beta(+)}(i\kappa_\nu)}{\Gamma(\ell_\beta + 1 + \eta_\nu)}. \end{aligned} \quad (57)$$

6. ПРИМЕР

Процедуру восстановления потенциала (5) проиллюстрируем на примере, где в качестве входной информации используются данные по s -волновому рассеянию нейтральной частицы на сферической прямоугольной потенциальной яме глубиной V_0 и радиусом R . Параметр ямы $K_0 R = 2$, $K_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$, задает связанное состояние с энергией $E = -\kappa^2$, $\kappa R = 0.638045$ и асимптотической нормировочной константой $\mathcal{M} R^{1/2} = 1.583324$. Мы ограничились максимальным значением $k_0 R = 6$, т.е. $\epsilon_0 R^2 = 36$.

“Внутренние” параметры $\{\lambda_j \in [0, \epsilon_0]\}$ совпадают с полюсами вспомогательной функции $\tilde{P}_N(\epsilon)$, которую получаем, обращая выражение (13) относительно функции $P_N(k^2)$ (15):

$$\tilde{P}_N(\epsilon) = \frac{1}{J_{N-1,N}(k)} \frac{C_{N-1}^{0(-)} - C_{N-1}^{0(+)} \overline{S}}{C_N^{0(-)} - C_N^{0(+)} \overline{S}}. \quad (58)$$

В свою очередь, вычеты $\tilde{P}_N$ отождествляются с $\{(d_{N-1}^0 Z_{N,j})^2\}$ [2]. Например, для $N = 4$ и $bR = 4.65$ получаем следующие две пары “внутренних” параметров:

$$\begin{aligned}\lambda_1 R^2 &= 9.080989, & Z_{4,1}^2 &= 0.173225, \\ \lambda_2 R^2 &= 35.787885, & Z_{4,2}^2 &= 0.355379.\end{aligned}\quad (59)$$

Таким образом, данным N и b отвечает минимальное (с учетом необходимости описания связанного состояния) число “внешних” параметров: $\{\lambda_3, Z_{4,3}, \lambda_4, Z_{4,4}\}$. Для их вычисления строим систему, состоящую из следующих условий: 1) условия нормировки (6); 2) условия (21); 3) уравнения (25); 4) уравнения (36), которое в данном примере, где

$$C_n^{0(\pm)} = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{k \mp ib}{k \pm ib} \right)^{n+1}, \quad (60)$$

принимает вид

$$\begin{aligned}& -i \frac{1}{\mathcal{K}!} \frac{d\mathcal{K}}{dk} \left\{ \frac{(N+1)\mathcal{A}_N(k^2) - N((k+ib)/(k-ib))\mathcal{B}_N(k^2)}{(N+1)\mathcal{A}_N(k^2) - N((k-ib)/(k+ib))\mathcal{B}_N(k^2)} (k+ib)^{\mathcal{K}-1} \right\} \Big|_{k=ib} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{b^2 + k^2} (1 - \bar{S}) \left(\frac{k-ib}{k+ib} \right)^{m+n+2} + \frac{1}{b^2 - \kappa^2} \left(\frac{\kappa-b}{\kappa+b} \right)^{m+n+2} \mathcal{M}^2, \\ & \mathcal{K} = 2N - m - n - 2.\end{aligned}\quad (61)$$

В правой части используется S -матрица $\bar{S} = e^{2i\bar{\delta}}$, где фаза $\bar{\delta}(k)$ совпадает с экспериментальной фазой $\delta^{\text{exp}}(k)$ на интервале $[0, k_0]$, а в области $k > k_0$ экстраполирована рациональной функцией с затухающей $\sim 1/k$ [8] асимптотикой:

$$\bar{\delta}(k) = \begin{cases} \delta^{\text{exp}}(k), & k \leq k_0, \\ \frac{u}{k^2} + \frac{v}{k}, & k > k_0. \end{cases} \quad (62)$$

Поведение исходной экспериментальной $\delta^{\text{exp}}(k)$ и модифицированной $\bar{\delta}(k)$ фаз рассеяния (при $u = 9.717254$, $v = 0.315288$) внутри интервала $[0, \epsilon_0]$ и за его пределами показано на рисунке. Здесь сплошная линия соответствует модифицированной фазе, а сплошная тонкая линия – экспериментальной.

Результат решения системы (1)–(4) с $m = 0$ и $n = 2$ таков:

$$\begin{aligned}\lambda_3 R^2 &= 203.292303, & Z_{4,3}^2 &= 0.454214, \\ \lambda_4 R^2 &= -0.0442675, & Z_{4,4}^2 &= 0.0171819.\end{aligned}\quad (63)$$

Далее по собственным значениям $\{\lambda_j\}$ и квадратам элементов $\{Z_{N,j}\}$ последней строки матрицы $\mathbf{Z}$ собственных векторов строится (например, трехдиагональная) матрица гамильтониана [1]. Вычитанием из последней матрицы оператора кинетической энергии

получают матрицу $\mathbf{V}$ потенциала (5) [2]. Теоретическая фаза рассеяния $\delta^{(4)}(k)$ представлена на рисунке штриховой линией с длинными штрихами.

Эволюцию теоретической фазы рассеяния $\delta^{(N)}$ при возрастании N от $N = 3$ до $N = 6$ можно проследить на рисунке, где фазы $\delta^{(3)}(k)$, $\delta^{(5)}(k)$ и $\delta^{(6)}(k)$ изображены штриховой с короткими штрихами, штрихпунктирной и пунктирной линиями, соответственно. Здесь при всех N число “внешних” параметров остается фиксированным: $\{\lambda_{N-1},$

$Z_{N,N-1}\}$ и $\{\lambda_N, Z_{N,N}\}$. Неизвестные параметры были найдены в результате решения системы уравнений (1)–(4); при этом в уравнении (61) использовалась своя для каждого N комбинация индексов $m = 0$ и $n = n_0$, указанная в таблице. Таблица содержит значения вычетов $r_{m=0,n}$ (36), соответствующих теоретическим S -матрицам $\bar{S}^{(N)}$ (13). Для сравнения в таблице также приводятся значения $r_{m,n}^{\text{exp}}$, задаваемые правой частью (36) с S -матрицей $\bar{S} = e^{2i\bar{\delta}}$, где модифицированная фаза $\bar{\delta}$ определена выражением (62). Видно, что с ростом N (по мере того как увеличивается интервал, где теоретическая фаза совпадает с модифицированной экспериментальной) значения вычетов $r_{m,n}$ приближаются к экспериментальным значениям $r_{m,n}^{\text{exp}}$.

n	$r_{0,n}^{\text{exp}}$	$r_{0,n}$			
		$N = 3,$ $n_0 = 1$	$N = 4,$ $n_0 = 2$	$N = 5,$ $n_0 = 5$	$N = 6,$ $n_0 = 7$
0	11.402843	11.254276	11.588794	11.469717	11.384319
1	−1.077483	−1.077483	−1.013361	−1.047574	−1.076793
2	0.326500	0.3956003	0.326500	0.360071	0.314934
3	−0.0288681	−0.00743774	−0.0405596	−0.0153991	−0.0335707
4	−0.0462000	−0.0483459	−0.0604831	−0.0407937	−0.0494786
5	0.0164725	0	0.00789452	0.0164725	0.0161637
6	0.0104322	0	0.0121261	0.00781545	0.0114440
7	−0.00458193	0	0	−0.00626561	−0.00458193
8	−0.00323731	0	0	−0.00744598	−0.00191864
9	0.00137365	0	0	0	0.00209275
10	0.00144027	0	0	0	0.00363561

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [2] был предложен приближенный метод решения обратной задачи рассеяния одноименно заряженных частиц с короткодействующим добавочным потенциалом, представленным сепарабельным разложением с использованием лагерровских формфакторов. Искомый потенциал конечного ранга описывает данные рассеяния на ограниченном интервале энергий. В процедуре восстановления потенциала [2] используется информация о рассеянии (кроме связанных состояний) лишь из данного энергетического интервала. Следствием этого ограничения является присутствие свободных параметров. В задаче потенциального рассеяния выбором значений ранга N потенциала (5) и масштабного параметра b число свободных параметров можно сократить до единицы. В многоканальной задаче количество свободных параметров возрастает с ростом числа каналов по квадратичному закону, и их определение представляет проблему. В

данной работе предлагается способ учета данных рассеяния, основанный на свойствах S -матрицы, который позволяет устранить эту неопределенность.

Благодарности. Автор выражает признательность А. М. Широкову за стимулирующие дискуссии.

Список литературы

- [1] *C. A. Zaitsev.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 263; 1999. Т. 121. С. 424.
- [2] *S. A. Zaitsev, E. I. Kramar.* J. Phys. G. 2001. V. 27. P. 2037.
- [3] *H. A. Yamani, L. Fishman.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 410.
- [4] *H. A. Yamani, M. S. Abdelmonem.* J. Phys. B. 1997. V. 30. P. 1633.
- [5] *J. T. Broad.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 1494.
- [6] *S. A. Zaitsev, E. I. Kramar.* J-matrix method and Bargmann potentials. quant-ph/0107109.
- [7] *Р. Ньютон.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
- [8] *К. Шадан, П. Сабатье.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
- [9] *Л. Д. Блохинцев, И. Борбей, Э. И. Долинский.* ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. № 6. С. 1189.
- [10] *Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько.* Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [11] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [12] Справочник по специальным функциям. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [13] *J. M. Bang, A. I. Mazur, A. M. Shirokov, Yu. F. Smirnov, S. A. Zaytsev.* Ann. Phys. 2000. V. 280. P. 299.

Поступила в редакцию 15.IV.2003 г.,
после доработки 8.VII.2003 г.