Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панин, Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Розенау–Бюргерса с различными граничными условиями, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 93–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:18:37

© 2013 г.

А. А. Панин*

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РОЗЕНАУ–БЮРГЕРСА С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрено несколько модельных начально-краевых задач для уравнения Розенау–Бюргерса с различными граничными условиями. Для каждой из задач доказана однозначная локальная разрешимость в классическом смысле, получены достаточные условия возникновения режима blow-up и оценка времени разрушения. При доказательстве используется известный метод пробных функций.

Ключевые слова: режим blow-up, локальная разрешимость, непродолжаемое решение, уравнение Розенау–Бюргерса.

DOI: 10.4231/tmf8507

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xxxx} + u) - u_{xx} - uu_x = 0, \quad (1)$$

известное как уравнение Розенау–Бюргерса. Несмотря на активное изучение данного уравнения, находящего свое применение в гидро- и электродинамике, к настоящему времени известно немного результатов о достаточных условиях разрушения его решений [1], [2]. В нашей работе получены достаточные условия существования непродолжаемого решения и его разрушения для серии начально-краевых задач для уравнения (1). При доказательстве разрушения использован метод пробных функций (нелинейной емкости) Похожаева и Митидиери [3]. Отметим, что к числу основных методов исследования разрушения решений относятся также энергетический метод Левина [4] и метод автомодельных режимов, основанный на различных методах сравнения и получивший свое развитие в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [5] (см. также работу [6]).

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: a-panin@yandex.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим серию начально-краевых задач следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xxxx} + u) - u_{xx} - uu_x = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$B_j[u(x, t)] = 0, \quad t \in [0, T), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4)$$

где $l = \text{const}$ – фиксированная длина промежутка, параметр $T \leq +\infty$ будет определен позднее, $u_0(x) \in C^4[0, l]$ – заданная функция, $B_j[u]$ – операторы граничных условий, каждый из которых является частным случаем выражения

$$\sum_{k=0}^3 \left(\alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=0} + \beta_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=l} \right). \quad (5)$$

Предполагается, что функция $u_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям (4), таким образом, начальное и граничные условия задачи (2)–(4) согласованны. Мы будем рассматривать следующие варианты граничных условий:

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + u_{xx}(0) - u_{xx}(l) = 0; \quad (6)$$

$$u(0) = 0, \quad lu_x(0) - u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + u_{xx}(0) = 0, \quad u_{xx}(l) = 0; \quad (7)$$

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + 3u_{xx}(0) = 0; \quad (8)$$

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u_{xx}(0) = 0, \quad l^3 u_{xxx}(0) - 6u(l) = 0. \quad (9)$$

Как будет ясно из дальнейшего, результаты, аналогичные полученным в настоящей статье, можно получить для некоторого класса граничных условий, частным случаем которых являются (6)–(9).

Удобно применять следующие обозначения: для любой функции $z(x) \in C^n[0, l]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, положим

$$\|z\|_n \equiv \sum_{k=0}^n \sup_{x \in [0, l]} \left| \frac{d^k z(x)}{dx^k} \right|; \quad (10)$$

для любой функции $z(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (4), определим линейный оператор

$$\mathbb{L}z \equiv z_{xxxx} + z.$$

Здесь и ниже для единообразия мы обозначаем производную по x индексом, даже если речь идет об обыкновенной производной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решением задачи (2)–(4) назовем функцию $u(t) \equiv u(x)(t)$ из класса $C^1([0, T]; C^4[0, l])$, удовлетворяющую (при каждом $t \in [0, T)$) в смысле сильного дифференцирования в пространстве $C^4[0, l]$ с нормой (10) уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}u - u_{xx} - uu_x = 0,$$

а также начальному условию $u(0) = u_0(x)$ и (при каждом значении $t \in [0, T)$) граничным условиям (4). Величина T может быть как конечной ($0 < T < +\infty$), так и бесконечной ($T = +\infty$).

Мы докажем, что для задач (2)–(4) верна следующая альтернатива: либо $T = +\infty$ (задача разрешима глобально по времени), либо

$$T = T_0 < +\infty, \quad \lim_{t \uparrow T_0} \|u(x)(t)\|_{C^1[0,l]} = +\infty,$$

т. е. решение разрушается за конечное время и реализуется режим blow-up. Также мы приведем достаточные условия режима blow-up.

3. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

3.1. Теорема о непродолжаемом решении. Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$y'(t) = A(y), \quad y(0) = y_0 \quad (11)$$

в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$ при $y_0 \in B$. Под решением задачи Коши понимается функция $y \in C^1([0, T_0); B)$, где $T_0 < +\infty$ или $T_0 = +\infty$, удовлетворяющая уравнению задачи (11), которое понимается в смысле сильного дифференцирования в банаховом пространстве B при всех $t \in [0, T_0)$, и начальному условию $y(0) = y_0$.

Мы будем последовательно использовать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (нелинейный) оператор $A(y)$ локально липшиц-непрерывен, т. е. существует такая функция $\mu: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, ограниченная на каждом ограниченном подмножестве луча $[0, +\infty)$, что для любых $z_1, z_2 \in B$ выполнено неравенство

$$\|A(z_1) - A(z_2)\| \leq \mu(\max\{\|z_1\|, \|z_2\|\}) \|z_1 - z_2\|. \quad (12)$$

Тогда существует и единственно решение $y(t)$, $t \in [0, T_0)$, задачи (1), для которого либо $T_0 = +\infty$, либо

$$T_0 < +\infty, \quad \lim_{t \uparrow T_0} \|y(t)\| = +\infty; \quad (13)$$

любое другое решение может быть продолжено до указанного решения.

Решение, для которого $T_0 = \infty$ или выполнено условие (13), мы будем называть непродолжаемым. Теорема 1 утверждает, в частности, что любое другое решение есть не что иное, как ограничение непродолжаемого решения на меньший временной промежуток.

Чтобы не разрывать изложение основного материала работы, мы вынесли доказательство теоремы 1 в конец статьи.

3.2. Обращение оператора $\mathbb{L}$. Допустимые граничные условия. Не конкретизируя пока выбор граничных условий, введем подпространство Z_0^4 функций $z(x) \in C^4[0, l]$, удовлетворяющих граничным условиям (4), и введем норму в этом подпространстве равенством $\|z\|_{Z_0^4} = \|z\|_4$ (см. (10)). Очевидно, подпространство Z_0^4 замкнуто по норме $\|\cdot\|_4$ и, таким образом, является банаховым пространством. Ранее был введен дифференциальный оператор

$$\mathbb{L}: Z_0^4 \rightarrow C[0, l], \quad \mathbb{L}z \equiv z_{xxxx} + z.$$

Нам потребуется его обратный. Как известно, разрешимость краевой задачи

$$\mathbb{L}z = f(x), \quad B_j[u(x, t)] = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (14)$$

зависит от граничных условий и длины l отрезка. Поэтому обратимость оператора $\mathbb{L}$ нуждается в проверке. С этой целью будем искать решение задачи (14) в виде суммы решения $\bar{z}(x)$ задачи Коши для дифференциального уравнения $z_{xxxx} + z = f(x)$ с начальными условиями $z(0) = z_x(0) = z_{xx}(0) = z_{xxx}(0) = 0$ и линейной комбинации линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$ уравнения $z_{xxxx} + z = 0$:

$$z(x) = \bar{z}(x) + \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x) \equiv \int_0^x K(x-s)f(s)ds + \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x),$$

где $K(x-s)$ – функция Коши уравнения задачи (14), а частные решения имеют вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{x/\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}, & y_2(x) &= e^{-x/\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ y_3(x) &= e^{x/\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}, & y_4(x) &= e^{-x/\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Запишем условие того, что функция $z(x)$ удовлетворяет граничным условиям (4):

$$B_j[\bar{z}(x)] + \sum_{i=1}^4 C_i B_j[y_i(x)] = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где учтена линейность операторов B_j . Таким образом, относительно коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 мы получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей с элементами $B_j[y_i(x)]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, оператор $\mathbb{L}$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\text{матрица } \{B_j[y_i(x)]\}_{i,j=\overline{1,4}} \text{ невырождена.} \quad (15)$$

Именно это условие и определяет класс краевых задач, к которому применимы все рассуждения настоящего раздела. В частности, к этому классу относятся граничные условия (6)–(9). Чисто техническую проверку этого факта мы опускаем.

При выполнении условия (15) решение задачи (14) существует при любой правой части $f(x) \in C[0, l]$ и представимо в виде

$$z(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds. \quad (16)$$

3.3. Сведение исходной задачи к задаче Коши в пространстве Z_0^4 . Для удобства ссылок будем говорить о задаче (2)–(4) с теми или иными фиксированными (допустимыми) граничными условиями как о ЗАДАЧЕ I. Для наших целей потребуется рассмотреть ряд других связанных с ней задач.

Предположим, что $u(x)(t)$ – решение задачи I в смысле определения 1. Отметим сразу, что тогда $u(x)(t) \in C^1([0, T]; Z_0^4)$. Далее, если u – решение задачи I в смысле определения 1, то

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}u = \mathbb{L} \frac{du}{dt}; \quad (17)$$

знак обыкновенной производной здесь и всюду далее в работе подразумевает дифференцирование абстрактной функции со значениями в банаховом пространстве, а именно (в формуле (17)) в пространствах $C[0, l]$ и Z_0^4 . Из определения 1 вытекает, что для решения u задачи I выполняется равенство

$$\mathbb{L} \frac{du}{dt} = u_{xx} + uu_x, \quad (18)$$

где $u_{xx} + uu_x$ определяется естественным образом. В силу обратимости оператора $\mathbb{L}$ уравнение (18) равносильно следующему:

$$\frac{du}{dt} = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x),$$

где $\mathbb{G} \equiv \mathbb{L}^{-1}: C[0, l] \rightarrow Z_0^4$ – оператор Грина задачи (14). Это ограниченный линейный оператор с конечной нормой $\|\mathbb{G}\|$ (это следует из существования функции Грина задачи (14), но конкретный вид этой функции нам не понадобится). Из приведенных выше рассуждений вытекает, что всякое решение в смысле определения 1 задачи I является решением задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x), \quad u(0) = u_0(x), \quad u(x)(t) \in Z_0^4 \text{ при всех } t \in [0, T] \quad (19)$$

в пространстве Z_0^4 . Очевидно, верно и обратное: всякое решение задачи Коши (19), где $u_0(x) \in Z_0^4$, является решением задачи I в смысле определения 1, поскольку для $u(x)(t) \in C^1([0, T]; C^4[0, l])$ верно тождество (17).

Итак, мы установили эквивалентность задачи I и задачи (19), которую в дальнейшем будем называть ЗАДАЧЕЙ II.

Введем (нелинейный) оператор

$$A_4: Z_0^4 \rightarrow Z_0^4, \quad A_4(u) = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x).$$

Легко видеть, что $u_{xx} + uu_x \in C^2[0, l] \subset C[0, l]$ при $u(x) \in C^4[0, l]$, тогда в силу свойств оператора Грина $\mathbb{G}$ – разрешающего оператора задачи (14) – в самом деле $A_4(u) \in Z_0^4$. Теперь задача II может быть записана в этих обозначениях:

$$\frac{du}{dt} = A_4(u), \quad u(0) = u_0(x).$$

3.4. Локальная разрешимость задачи II. Докажем, что оператор $A_4(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 для $B = Z_0^4$. Имеем

$$\begin{aligned} \|A_4(\bar{u}) - A_4(\bar{\bar{u}})\|_4 &= \|\mathbb{G}(\bar{u}_{xx} - \bar{\bar{u}}_{xx}) + \mathbb{G}(\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x)\|_4 \leq \\ &\leq \|\mathbb{G}\| \|\bar{u}_{xx} - \bar{\bar{u}}_{xx}\|_0 + \|\mathbb{G}\| \|\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x\|_0 \leq \\ &\leq \|\mathbb{G}\| \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\mathbb{G}\| \|(\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x) + (\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x - \bar{u}\bar{u}_x)\|_0 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\mathbb{G}\|(\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\bar{u}\|_0 \|\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}_x\|_0 + \|\bar{u}_x\|_0 \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_0) \leq \\
&\leq \|\mathbb{G}\|(\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_4 + \|\bar{u}\|_4 \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_4 + \|\bar{\bar{u}}\|_4 \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_4) \leq \\
&\leq \|\mathbb{G}\|(1 + 2 \max\{\|\bar{u}\|_4, \|\bar{\bar{u}}\|_4\}) \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_4,
\end{aligned} \tag{20}$$

что и доказывает неравенство (12), в котором следует положить $\mu(\gamma) = \|\mathbb{G}\|(1 + 2\gamma)$. Поэтому из теоремы 1 с учетом равносильности задач I и II непосредственно следует

ТЕОРЕМА 2. Пусть граничные условия (4) удовлетворяют условию разрешимости (15). Тогда задача (19), а с ней и задача (2)–(4) локально (по времени) разрешимы при любой функции $u_0(x) \in C^4[0, l]$, удовлетворяющей условиям (4).

3.5. Задача II в пространствах Z^2 и Z^1 . Для наших целей необходимо рассмотреть более слабые постановки задачи II. Именно, нам требуется применить теорему 1 к пространству $B = Z^1 \equiv C^1[0, l]$. Для этого мы установим следующие важные факты:

1) оператор $\mathbb{G}$ можно расширить таким образом, что задачу II (т.е. задачу (19)) можно будет рассматривать в пространстве $Z^1 \equiv C^1[0, l]$;

2) всякое решение задачи (19) в пространстве Z^1 при $u_0(x) \in Z_0^4$ является решением из пространства Z_0^4 .

Эту программу мы реализуем в два этапа, последовательно понизив гладкость решения: сначала потребуем его принадлежность пространству $Z^2 \equiv C^2[0, l]$, а затем – только пространству $C^1[0, l]$. Перейдем к точным формулировкам.

Рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt} = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x), \quad u(0) = u_0(x), \quad u(x)(t) \in Z^2 \text{ при всех } t \in [0, T], \tag{21}$$

которую мы назовем ЗАДАЧЕЙ IIa. Легко видеть, что $u_{xx} + uu_x \in C[0, l]$ при $u \in Z^2$ и (в силу свойств оператора $\mathbb{G}$) $\mathbb{G}(u_{xx} + uu_x) \in Z_0^4$, т.е. в задаче (21) оператор $\mathbb{G}$ может пониматься в том же смысле, что и выше. Однако нам необходимо уточнить его свойства.

ЛЕММА 1. Для оператора

$$A_{2 \rightarrow 4}: Z^2 \rightarrow Z_0^4, \quad A_{2 \rightarrow 4}(u) = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x),$$

верна оценка

$$\|A_{2 \rightarrow 4}(\bar{u}) - A_{2 \rightarrow 4}(\bar{\bar{u}})\|_4 \leq \nu(\max\{\|\bar{u}\|_2, \|\bar{\bar{u}}\|_2\}) \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2, \tag{22}$$

где $\nu(\gamma): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – действительная функция, ограниченная на каждом ограниченном подмножестве области определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобно (20) имеем

$$\begin{aligned}
\|A_{2 \rightarrow 4}(\bar{u}) - A_{2 \rightarrow 4}(\bar{\bar{u}})\|_4 &= \|\mathbb{G}(\bar{u}_{xx} - \bar{\bar{u}}_{xx}) + \mathbb{G}(\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x)\|_4 \leq \\
&\leq \|\mathbb{G}\| \|\bar{u}_{xx} - \bar{\bar{u}}_{xx}\|_0 + \|\mathbb{G}\| \|\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x\|_0 \leq \\
&\leq \|\mathbb{G}\| \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\mathbb{G}\| \|(\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x) + (\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x - \bar{u}\bar{u}_x)\|_0 \leq \\
&\leq \|\mathbb{G}\|(\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\bar{u}\|_0 \|\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}_x\|_0 + \|\bar{\bar{u}}_x\|_0 \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_0) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\mathbb{G}\|(\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\bar{u}\|_2\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2 + \|\bar{\bar{u}}\|_2\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2) \leq \\ &\leq \|\mathbb{G}\|(1 + 2\max\{\|\bar{u}\|_2, \|\bar{\bar{u}}\|_2\})\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_2, \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (22), в котором $\nu(\gamma) = \|\mathbb{G}\|(1 + 2\gamma)$. Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Задачи II и Па эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вложения $Z_0^4 \subset Z^2$ и неравенства $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_4$ очевидно, что всякое решение задачи II является решением задачи Па. Докажем обратное утверждение. Заметим, что каждая из задач II, Па эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \mathbb{G}(u_{xx}(\tau) + u(\tau)u_x(\tau)) d\tau, \quad (23)$$

где, однако, в случае задачи II интеграл в (23) понимается в смысле интегрирования по Риману в банаховом пространстве Z_0^4 , а в случае задачи Па – в пространстве Z^2 . Но если функция $u(t)$ дифференцируема в Z^2 при каждом $t \in [0, T)$, то она является функцией со значениями в Z^2 , непрерывной по норме этого пространства. Тогда в силу леммы 1 и свойств оператора $\mathbb{G}$ подынтегральное выражение в (23) представляет собой функцию со значениями в Z_0^4 , непрерывную по норме Z_0^4 , и поэтому Z_0^4 -интегрируемую. Следовательно, если интеграл в (23) существует в смысле Z^2 , то он существует и в смысле Z_0^4 . Поэтому всякое решение задачи Па является решением задачи II.

Перейдем к самой слабой формулировке задачи: в пространстве $Z^1 \equiv C^1[0, l]$. Чтобы рассмотреть задачу Коши типа задач II, Па в пространстве Z^1 , нам следует расширить оператор $\mathbb{G}$, первоначально определенный на $C[0, l]$, так, чтобы удалось определить оператор

$$A_{1 \rightarrow 2}: Z^1 \rightarrow Z^2, \quad A_{1 \rightarrow 2}(u) = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x).$$

Из способа построения функции Грина [7] следует, что для рассматриваемого оператора $\mathbb{L}$ с допустимыми граничными условиями (4) функция Грина, входящая в выражение (16), может быть представлена в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} G_1(x, s), & 0 \leq s < x, \\ G_2(x, s), & x < s \leq l, \end{cases}$$

где $G_1(x, s)$, $G_2(x, s)$ – функции, определенные при всех $x, s \in [0, l]$ и бесконечно дифференцируемые, причем при любом $x \in [0, l]$ верны равенства

$$\begin{aligned} G_1(x, x) &= G_2(x, x), & \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, x) &= \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, x), \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, x) &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, x), & \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^3}(x, x) - \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3}(x, x) &= 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Дифференцируя эти равенства по x в смысле полной производной, получаем в точках (x, x) , $x \in [0, l]$, следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial s} &= \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial s \partial x} &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial s \partial x}, \\ \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 G_1}{\partial s \partial x^2} &= \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 G_2}{\partial s \partial x^2}, \\ \frac{\partial^4 G_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 G_1}{\partial s \partial x^3} &= \frac{\partial^4 G_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 G_2}{\partial s \partial x^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сопоставляя (24) и (25), получаем в точках (x, x) , $x \in [0, l]$, равенства

$$\frac{\partial G_1}{\partial s} = \frac{\partial G_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 G_1}{\partial s \partial x} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial s \partial x}. \quad (26)$$

Рассмотрим $u \in C^2[0, l]$ и проведем следующее интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x) &= \int_0^l G(x, s)(u_{xx} + uu_x)ds = \\ &= \int_0^x G_1(x, s) \left(u_{ss}(s) + \left(\frac{u^2}{2} \right)_s(s) \right) ds + \int_x^l G_2(x, s) \left(u_{ss}(s) + \left(\frac{u^2}{2} \right)_s(s) \right) ds = \\ &= G_1(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) \Big|_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \frac{\partial G_1}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds + \\ &\quad + G_2(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) \Big|_{s=x}^{s=l} - \int_x^l \frac{\partial G_2}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds = \\ &= G_1(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - G_1(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) + \\ &\quad + G_2(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - G_2(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial G_1}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds - \int_x^l \frac{\partial G_2}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства имеет смысл и при $u \in C^1[0, l]$, причем в силу свойств (24) функции Грина для $u \in C^1[0, l]$ подстановки при $s = x$ взаимно уничтожаются, и мы можем записать

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x) &= G_2(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - G_1(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) - \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial G_1}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds - \int_x^l \frac{\partial G_2}{\partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение в правой части имеет смысл при всех $u \in Z^1$, причем при всех $u \in Z^2$ его значение совпадает с ранее определенным. Итак, мы продолжили оператор

$$u \mapsto \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x),$$

определенный первоначально для $u \in Z^2$, на Z^1 . Убедимся, что полученный оператор (назовем его $A_{1 \rightarrow 2}$) переводит функции из Z^1 в функции из Z^2 и является локально липшиц-непрерывным как отображение из Z^1 в Z^2 и, следовательно, как отображение из Z^1 в Z^1 . Для этого продифференцируем правую часть равенства (27) два раза по x , пользуясь свойствами (26) функции Грина:

$$\begin{aligned} (A_{1 \rightarrow 2}(u))_x &= \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) - \\ &\quad - \frac{\partial G_1}{\partial s}(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - \int_0^x \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds + \\ &\quad + \frac{\partial G_2}{\partial s}(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - \int_x^l \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds = \\ &= \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) - \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds - \int_x^l \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} (A_{1 \rightarrow 2}(u))_{xx} &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial s}(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - \int_0^x \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^2 \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds + \\ &\quad + \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial s}(x, x) \left(u_x(x) + \frac{u^2}{2}(x) \right) - \int_x^l \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^2 \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds = \\ &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, l) \left(u_x(l) + \frac{u^2}{2}(l) \right) - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, 0) \left(u_x(0) + \frac{u^2}{2}(0) \right) - \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial^3 G_1}{\partial x^2 \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds - \int_x^l \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^2 \partial s}(x, s) \left(u_s(s) + \frac{u^2}{2}(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Из вида полученных выражений в силу ограниченности входящих в него производных функций $G_1(x, s)$, $G_2(x, s)$ на компактных множествах ясно, что оператор $A_{1 \rightarrow 2}(u)$ является локально липшиц-непрерывным как отображение из Z^1 в Z^2 и тем более как отображение из Z^1 в Z^1 . Это позволяет рассмотреть ЗАДАЧУ Пб:

$$\frac{du}{dt} = \mathbb{G}(u_{xx} + uu_x), \quad u(0) = u_0(x), \quad u(x)(t) \in Z^1 \text{ при всех } t \in [0, T]. \quad (28)$$

Аналогично случаю теоремы 3 можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Задачи Па и Пб эквивалентны.*

С другой стороны, в силу локальной липшиц-непрерывности оператора $A_{1 \rightarrow 2}(u)$ как отображения из Z^1 в Z^1 можно применить к задаче Пб теорему 1.

Подытожим результаты, полученные в этом разделе. Мы установили, что задачи П, Па, Пб эквивалентны друг другу и удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому непродолжаемые решения каждой из этих задач существуют, единственны и совпадают друг с другом. Конечно, здесь было существенно условие $u_0(x) \in C^4[0, l]$. Необходимые для дальнейшего следствия из этого факта оформим в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Задача Пб однозначно разрешима на некотором максимальном промежутке $[0, T)$.*
2. *Если $T < +\infty$, то справедливо соотношение*

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \|u(x)(t)\|_1 = +\infty.$$

3. *Задача II, а с ней и исходная задача I разрешимы на том же самом промежутке $[0, T)$.*

3.6. Разрушение решений. Как доказано выше, для решения задачи I выполняется уравнение (18) или, эквивалентно, уравнение

$$(u')_{xxxx} + u' - u_{xx} - uu_x = 0. \quad (29)$$

Рассмотрим сначала граничные условия (6) и (7), а затем – условия (8) и (9).

3.6.1. *Случай граничных условий (6) и (7).* Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть $T = \text{const}$, $0 < T < \infty$, и функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $J(t) \in C[0, T) \cap C^1(0, T)$;
- 2) $J(0) > 0$;
- 3) *найдется $a > 0$ такое, что для всех $t \in (0, T)$ выполнено неравенство*

$$\frac{dJ}{dt} \geq aJ^2.$$

Тогда при всех $t \in [0, T)$

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий 2, 3 леммы имеем $J(t) \geq J(0) > 0$ при всех значениях $t \in [0, T)$. Следовательно,

$$\frac{J'}{J^2} \geq a, \quad -\frac{1}{J} \Big|_{t=0}^{t=t} \geq at, \quad \frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \geq at, \quad \frac{1}{J(t)} \leq \frac{1}{J(0)} - at,$$

таким образом,

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t} \quad \text{при} \quad t \in \left(0, \frac{1}{aJ(0)}\right).$$

Из последнего неравенства и условия 1 леммы следует, что $T \leq 1/aJ(0)$, в результате неравенство (30) выполнено на всем промежутке существования функции $J(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *При выполнении условий леммы с необходимостью получаем следующую оценку: $T \leq 1/aJ(0)$.*

Заметим, что при выполнении граничных условий (6) или (7) верны следующие тождества:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l (l-x)(u')_{xxxx} dx &= (l-x)(u')_{xxx}|_0^l + \int_0^l (u')_{xxx} dx = \\
 &= -l(u')_{xxx}(0) + (u')_{xx}(l) - (u')_{xx}(0) = 0, \\
 \int_0^l (l-x)u_{xx} dx &= (l-x)u_x|_0^l + \int_0^l u_x dx = -lu_x(0) + u(l) - u(0) = 0, \\
 \int_0^l (l-x)uu_x dx &= \frac{1}{2} \int_0^l (l-x)(u^2)_x dx = \frac{1}{2}(l-x)u^2|_0^l + \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx = \\
 &= -\frac{1}{2}lu^2(0) + \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Домножим уравнение (29) при каждом $t \in [0, T)$ на функцию $l-x$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Тогда с учетом тождеств (31), а также тождества

$$\int_0^l (l-x)u' dx = \frac{d}{dt} \int_0^l (l-x)u dx,$$

вытекающего из свойств гладкости функции $u(x)(t)$, заданных в определении 1, получим из (29) дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^l (l-x)u dx = \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx. \tag{32}$$

Применяя теперь неравенство Коши–Буняковского для интегралов, получим

$$\left(\int_0^l (l-x)u dx \right)^2 \leq \int_0^l (l-x)^2 dx \cdot \int_0^l u^2 dx = \frac{l^3}{3} \int_0^l u^2 dx$$

или, если положить $J(t) = \int_0^l (l-x)u dx$,

$$\frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx \geq \frac{3}{2l^3} J^2.$$

С учетом этого неравенства из (32) получаем

$$\frac{d}{dt} J(t) \geq \frac{3}{2l^3} J^2.$$

Таким образом, если потребовать

$$\int_0^l (l-x)u_0(x) dx > 0, \tag{33}$$

функция $J(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2, в которой следует взять $a = 3/2l^3$. Из следствия 1 вытекает, что при условии (33) решение задачи I может существовать лишь на ограниченном промежутке времени t .

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 6. При выполнении условия (33) решение задачи (2)–(4) может существовать лишь на ограниченном промежутке времени $[0, T)$, где

$$T \leq \frac{2l^3}{3J(0)}, \quad J(0) = \int_0^l (l-x)u_0(x) dx. \quad (34)$$

3.6.2. Случай граничных условий (8) и (9). Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 3. Пусть функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $J(t) \in C[0, T) \cap C^1(0, T)$;
- 2) найдутся $k > 0$ и $m > 0$ такие, что при всех $t \in (0, T)$, где $0 < T \leq +\infty$, имеет место неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J^2 - m^2; \quad (35)$$

- 3) справедливо неравенство $J(0) > m/k$.

Тогда при всех $t \in [0, T)$

$$J(t) \geq \frac{m(1 + A_0 e^{2kmt})}{k(1 - A_0 e^{2kmt})}, \quad \text{где } A_0 = \frac{kJ(0) - m}{kJ(0) + m}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что при всех $t \in [0, T)$ выполняется неравенство $J(t) > m/k$. В самом деле, если оно нарушается на некотором множестве значений T^* , положим $t^* = \inf T^*$. В силу условий 1, 3 леммы в этом случае $t^* > 0$ и $J(t^*) = m/k$. В силу задачи о среднем существует такое $t^{**} \in (0, t^*)$, что $J'(t^{**}) < 0$. Но по определению t^* имеем $J(t) > m/k$ при всех $t \in [0, t^*)$, и это в силу условия 2 леммы гарантирует, что $J'(t^{**}) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $J(t) > m/k$ при всех $t \in [0, T)$.

Теперь мы можем проинтегрировать неравенство (35), получим

$$\frac{1}{2km} \ln \left. \frac{kJ - m}{kJ + m} \right|_{J(0)}^{J(t)} \geq t,$$

что после преобразований сводится к неравенству (36).

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы с необходимостью выполняется следующая оценка:

$$T \leq \frac{1}{2km} \ln \frac{1}{A_0}.$$

В случае граничных условий (8) или (9) аналогично (31) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l (l-x)^3 (u')_{xxxx} dx &= 0, \\ \int_0^l (l-x)^3 u_{xx} dx &= 6 \int_0^l (l-x) u dx, \\ \int_0^l (l-x)^3 u u_x dx &= \frac{3}{2} \int_0^l (l-x)^2 u^2 dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Домножим уравнение (29) при каждом $t \in [0, T)$ на функцию $(l - x)^3$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Тогда с учетом тождеств (37), а также тождества

$$\int_0^l (l - x)^3 u' dx = \frac{d}{dt} \int_0^l (l - x)^3 u dx,$$

вытекающего из свойств гладкости функции $u(x)(t)$, заданных в определении 1, получаем дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^l (l - x)^3 u dx = 6 \int_0^l (l - x) u dx + \frac{3}{2} \int_0^l (l - x)^2 u^2 dx. \quad (38)$$

Добавив в левую часть под знак производной по времени не зависящее от времени выражение, определим функцию $J(t)$ выражением

$$J(t) = \int_0^l (l - x)^2 [(l - x)u + 2] dx. \quad (39)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского для интегралов, получим

$$\begin{aligned} J^2(t) &\leq \int_0^l (l - x)^4 dx \left[\int_0^l (l - x)^2 u^2 dx + 4 \int_0^l (l - x) u dx + 4 \int_0^l dx \right] = \\ &= \frac{l^5}{5} \left[\int_0^l (l - x)^2 u^2 dx + 4 \int_0^l (l - x) u dx + 4l \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть последней формулы с правой частью равенства (38), получаем следствие из соотношения (38):

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{15}{2l^5} J^2 - 6l,$$

что совпадает с неравенством (35) при $k^2 = 15/2l^5$ и $m^2 = 6l$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 7. *При условии*

$$J(0) \equiv \int_0^l (l - x)^2 [(l - x)u_0(x) + 2] dx > \frac{m}{k}, \quad \text{где } m = \sqrt{6l}, \quad k = \sqrt{\frac{15}{2l^5}}, \quad (40)$$

решение $u(x)(t)$ задачи I существует только на ограниченном промежутке $[0, T)$, где

$$T \leq \frac{1}{2km} \ln \frac{1}{A_0}, \quad (41)$$

а константа A_0 (зависящая от m , k и $J(0)$) определена в (36).

3.6.3. Разрушение решения по норме пространства $C^1[0, l]$. В данном пункте (независимо от решения проблемы существования решения) мы построим достаточные условия разрушения решения задачи I для различных граничных условий. Как было показано выше (см. теорему 5), задачи I, II и IIб однозначно разрешимы на некотором (конечном или бесконечном) промежутке времени t ненулевой длины и решение любой из них (независимо от способа его построения) является решением всех

других на том же самом промежутке. Следовательно, если решение задачи I (или, что то же самое, задачи II) не существует глобально по времени, то не существует глобально по времени и решение “ослабленной” задачи IIб. Но для задачи IIб, как установлено выше, выполняются все условия теоремы 1. Следовательно, из глобальной неразрешимости этой задачи следует согласно соотношению (13), что

$$\lim_{t \uparrow T} \|u(x)(t)\|_{C^1[0,l]} = +\infty, \quad (42)$$

как только выполнены условия глобальной неразрешимости задачи I (т.е. условие (33) в случае граничных условий (6), (7) и условие (40) в случае граничных условий (8), (9)).

Основные результаты работы сформулируем в итоговой теореме.

ТЕОРЕМА 8. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Задача (2)–(4) однозначно разрешима (по крайней мере локально по времени) при любых граничных условиях (4) вида (5), удовлетворяющих требованию (15).
2. В случае выбора граничных условий (4) в виде (6) или (7) при выполнении условия (33), а в случае выбора граничных условий в виде (8) или (9) при выполнении условия (40) решение задачи (2)–(4) существует лишь на ограниченном промежутке времени (оценки времени разрушения T даются формулами (34) или (41) соответственно), причем имеет место предельное соотношение (42).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из приведенных выше рассуждений видно, что, помимо условий (6)–(9), результаты сохраняют силу для любых граничных условий, допустимых в смысле требования (15) и позволяющих получить тождества (31) или (37).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Напомним, что мы ищем решение абстрактной задачи Коши

$$y'(t) = A(y), \quad y(0) = y_0 \quad (43)$$

в банаховом пространстве B при $y_0 \in B$ в классе $C^1([0, T_0]; B)$. При этом мы считаем, что для оператора A выполнено условие локальной липшиц-непрерывности:

$$\|A(z_1) - A(z_2)\| \leq \mu(\max(\|z_1\|, \|z_2\|))\|z_1 - z_2\|, \quad z_1, z_2 \in B. \quad (44)$$

Мы докажем, что при этих условиях существует и единственно решение, для которого либо $T_0 = +\infty$, либо

$$T_0 < +\infty, \quad \lim_{t \uparrow T_0} \|y(t)\| = +\infty \quad (45)$$

(такое решение мы называем непродолжаемым).

1. Прежде всего докажем локальную разрешимость задачи Коши (43). Заметим, что следствием (43) является интегральное уравнение

$$y(t) = y_0 + \int_0^t A(y(\tau)) d\tau, \quad (46)$$

или $y = \mathbb{A}(y)$, где $\mathbb{A}(z) \equiv y_0 + \int_0^t A(z(\tau)) d\tau$ – оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathbb{B} = C([0, T]; B)$, а величина $T > 0$ будет определена ниже. Интеграл в правой части равенства (46) имеет смысл для всех $y(t) \in \mathbb{B}$, поскольку подынтегральное выражение непрерывно как композиция непрерывных отображений. Положим также

$$\|z\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \in [0, T]} \|z(t)\|.$$

Мы докажем локальную разрешимость уравнения (46) в классе $C([0, T_0]; B)$ и после этого покажем, что каждое такое решение является решением задачи (43), принадлежащим пространству $C^1([0, T_0]; B)$.

Зафиксируем произвольное $R > 0$ и рассмотрим замкнутое подмножество

$$\mathbb{B}_R = \{y(t) \in \mathbb{B} : \|y - y_0\|_{\mathbb{B}} \leq R\}. \quad (47)$$

В силу общих свойств метрических пространств множество $\mathbb{B}_R$ является полным метрическим пространством относительно расстояния, порожденного нормой пространства $\mathbb{B}$. Теперь укажем, как выбрать $T > 0$ так, чтобы оператор $\mathbb{A}$:

- 1) не выводил из множества $\mathbb{B}_R$,
- 2) являлся на этом множестве сжимающим.

Заметим, что в силу условия (44) верна оценка

$$\|A(z)\| \leq \mu(\max\{\|z\|, 0\})\|z - 0\| = \mu(\|z\|)\|z\|, \quad (48)$$

а тогда для всех $y(t) \in \mathbb{B}_R$ в силу (47) и (48)

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t A(y(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{B}} &\equiv \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t A(y(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^T \|A(y(\tau))\| d\tau \leq T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \cdot (\|y_0\| + R). \end{aligned}$$

Поскольку функция $\mu(\cdot)$ ограничена на любом ограниченном подмножестве в $\mathbb{R}_+$, можно выбрать такое $T > 0$, что правая часть последнего неравенства будет меньше R , и тем самым требование 1 к оператору $\mathbb{A}$ будет выполнено.

Теперь обеспечим выполнение требования 2. Имеем с учетом (44) и (47) для любых $y_1(t), y_2(t) \in \mathbb{B}_R$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t A(y_1(\tau)) d\tau - \int_0^t A(y_2(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{B}} &\leq \int_0^T \|A(y_1(\tau)) - A(y_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \cdot \sup_{t \in [0, T]} \|y_1(t) - y_2(t)\| = T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \cdot \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Теперь мы уменьшим, если понадобится, T настолько, чтобы выполнялось условие

$$T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \leq \frac{1}{2}.$$

Итак, при выборе T из условий

$$T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \cdot (\|y_0\| + R) \leq R, \quad T \cdot \sup_{r \in [0, \|y_0\| + R]} \mu(r) \leq \frac{1}{2}$$

оператор $\mathbb{A}$ не выводит из множества $\mathbb{B}_R$ и является на этом множестве сжимающим отображением.

По теореме о неподвижной точке при таком выборе T уравнение (46) имеет единственное решение в пространстве $\mathbb{B}_R$. Но тогда подынтегральное выражение в (46) непрерывно как композиция непрерывных отображений и, таким образом, функция $y(t)$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Следовательно, $y(t) \in C^1([0, T]; B)$ и является решением задачи Коши (43) на промежутке $[0, T)$. Локальная разрешимость задачи (43) доказана.

Приведенное рассуждение показывает также единственность решения задачи (43) независимо от способа его получения. В самом деле, рассмотрев интегральное уравнение (46) с началом в точке T_1 , за которой нарушается единственность, и проведя рассуждения, аналогичные приведенным выше (с очевидной заменой $0 \mapsto T_1$ и подходящим выбором R и T), мы сразу же приходим к противоречию с теоремой о неподвижной точке.

2. Теперь докажем, что отсутствие глобального по t решения влечет стремление решения к бесконечности. Докажем сначала, что если решение не существует глобально по времени, то выполнено более слабое, чем (45), предельное соотношение

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|y(t)\| = +\infty. \quad (49)$$

Рассмотрим всевозможные функции $z(t) \in C^1([0, +\infty); B)$. Если среди них существует функция, удовлетворяющая задаче (43) при всех $t \geq 0$, то утверждение теоремы установлено. Если же такой функции не существует, положим

$$T_0 \equiv \sup\{T: \exists \text{ решение задачи (43) из класса } C^1([0, T]; B)\}.$$

В силу предыдущих рассуждений $T_0 > 0$. С учетом установленной выше единственности решения возможны два случая:

- 1) существует решение из класса $C^1([0, T_0]; B)$,
- 2) решение существует лишь в классе $C^1([0, T_0); B)$.

В первом случае, очевидно, все условия теоремы выполняются для задачи Коши, аналогичной (43), с начальными данными в точке $t = T_0$ вместо $t = 0$. Следовательно, в силу п. 1 доказательства решение может быть продолжено по t хотя бы на небольшой отрезок. При этом, очевидно,

$$\lim_{t \uparrow T_0} y'(t) = \lim_{t \downarrow T_0} y'(t) = A(T_0)(y(T_0)),$$

поэтому полученное “составное” решение непрерывно дифференцируемо на всем промежутке существования. Это противоречит определению величины T_0 , следовательно, первый случай исключается.

Во втором случае соотношение (49) может иметь или не иметь место. Если оно выполнено, то остается лишь вывести из него соотношение (45). В противном случае

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|y\| = M < +\infty,$$

откуда с учетом оценки (48) и свойств функции μ имеем

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|A(y)\| = \mathcal{L} < +\infty,$$

т.е. действительная функция $\|A(y(t))\|$, а с нею и $\|y'(t)\|$ (в силу уравнения (43)) ограничены. Но тогда абстрактная функция $y(t)$ липшиц-непрерывна в левой полуокрестности точки T_0 с константой $\mathcal{L}$ и, следовательно, эту функцию можно продолжить по непрерывности в точку T_0 в силу выполнения критерия Коши существования предела функции. Рассуждая аналогично предыдущему, устанавливаем из интегрального уравнения (46), что производная $y'(t)$ существует и непрерывна вплоть до значения T_0 включительно. Таким образом, мы продолжили решение до $y(t) \in C^1([0, T_0]; B)$ и пришли к случаю 1, невозможность которого установлена ранее. Итак, в случае отсутствия глобального по времени решения возможен лишь случай 2 и при этом должно выполняться предельное соотношение (49).

Выведем теперь из этого факта соотношение (45). Предположим, что оно не имеет места, или, другими словами,

$$\exists M_1 > 0: \forall \delta > 0 \quad \exists t \in (T_0 - \delta, T_0), \quad \text{при котором} \quad \|y(t)\| \leq M_1. \quad (50)$$

Заметим, что в силу оценки (48) и свойств функции μ существует $E > 0$ такое, что при всех $z \in B$, $\|z\| \leq 2M_1$, верно неравенство

$$\|A(z)\| \leq E. \quad (51)$$

Выберем теперь произвольное $\delta \in (0, M_1/E)$. Пусть $t_1 \in (T_0 - \delta, T_0)$ выбрано из условия (50), т.е. выполнено условие

$$\|y(t_1)\| \leq M_1. \quad (52)$$

В силу соотношения (49) и непрерывности $\|y(t)\|$ как функции аргумента t существует $t_2 \in (t_1, T)$ такое, что

$$\|y(t_2)\| = 2M_1, \quad \|y(t)\| \leq 2M_1 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (53)$$

Из последнего неравенства, неравенства (51) и уравнения задачи Коши (43) следует, что $\|y'(t)\| \leq E$ при всех $t \in [t_1, t_2]$. Однако отсюда и из соотношений

$$\|y(t_1)\| \leq M_1, \quad \|y(t_2)\| = 2M_1, \quad t_2 - t_1 < \delta < \frac{M_1}{E}.$$

получаем противоречие: с одной стороны, $\|y(t_2)\| - \|y(t_1)\| < (M_1/E)E = M_1$, а с другой – $\|y(t_2)\| - \|y(t_1)\| \geq 2M_1 - M_1 = M_1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность М. О. Корпусову за постановку задачи и А. Шеню за консультацию, касающуюся теоремы 1.

Список литературы

- [1] М. О. Корпусов, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 342–349.
- [2] М. О. Korpusov, *Nonlin. Anal.*, **75**:4 (2012), 1737–1743.
- [3] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.
- [4] Н. А. Levine, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:3 (1973), 371–386.
- [5] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [6] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
- [7] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

Поступила в редакцию 29.01.2013