Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Е. В. Юшков, Разрушение решений систем уравнений мелкой воды, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 264–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:18:25

© 2013 г.

М. О. Корпусов*, Е. В. Юшков*

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Рассмотрены начально-краевые задачи для систем уравнений мелкой воды. С помощью метода пробных функций, предложенного в работах Похожаева и Митидиери, исследуется влияние граничных и начальных условий на появление, время и скорость разрушения решений этих задач. При естественных граничных условиях доказано разрушение в одномерных и двумерных задачах, в ограниченных и неограниченных областях, с диссипацией и дисперсией.

Ключевые слова: начально-краевая задача, разрушение за конечное время, приближение мелкой воды.

DOI: 1010.4231/tmf8509

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших вопросов теории нелинейных дифференциальных уравнений является вопрос о разрушении их решений. Связано это с тем, что при наличии локальной во времени разрешимости гладкое решение может не существовать на всей временной оси, а разрушаться за конечное время. В общем случае ограниченность времени существования решения говорит о некорректности модели описания длительных процессов из-за неучета важных факторов. Если же модель составлена хорошо, то разрушение может описывать реальные физические явления, например образование ударных волн или появление волн аномальной амплитуды.

Теоретическими исследованиями явления разрушения в задачах Коши для моделей гидродинамики занимались с прошлого века [1], [2]. Однако с практической точки зрения постановка задачи в неограниченной области является делом простым, и при численном счете приходится рассматривать начально-краевые задачи, добавляя граничные условия [3].

В настоящей работе мы не поднимаем вопрос о локальной разрешимости, который обычно требует тонкого анализа для каждой конкретной проблемы, например с помощью метода характеристик [4], а лишь демонстрируем возможность применения

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: korpusov@gmail.com, yushkov.msu@mail.ru

метода С. И. Похожаева для получения достаточных условий глобальной неразрешимости задач вида

$$\eta_t + (\eta u)_x = 0, \quad (1)$$

$$(\eta u)_t + (\eta u^2)_x + (\eta^2)_x = 0, \quad (2)$$

где $x \in [0, l]$, с начальными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \eta(x, t)|_{t=0} = \eta_0(x), \quad x \in [0, l],$$

и условиями на границе.

Системы такого типа возникают при описании движения несжимаемой жидкости в поле тяжести в случае, когда уровень жидкости над дном канала является малой величиной по сравнению с характерными размерами течения, и поэтому называются системами “мелкой воды” [4], [5]. В безразмерных системах (1), (2) функция u обычно характеризует скорость жидких частиц, а функция η – уровень жидкости над горизонтальным плоским дном.

Теория “мелкой воды” тесно связана с невязкими газодинамическими течениями в баротропном приближении [3]. В этом случае уровень жидкости η соответствует плотности газа ρ с давлением $p = \rho^2$. Поэтому наряду с задачей (1), (2) мы рассматриваем систему уравнений вида

$$\rho_t + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u}) + \nabla p = 0,$$

при этом мы не ограничиваемся одномерным случаем, а разбираем также и двумерный. Именно возможность исследования явления разрушения для многомерных случаев отличает предлагаемый метод от классического метода преобразования годографа. О линеаризации системы “мелкой воды” с помощью нелинейной замены переменных и получении обрывающихся решений можно прочесть, например, в работе [6]. Кроме того, мы рассматриваем проблему глобальной неразрешимости задач при наличии дополнительных вязких или дисперсионных слагаемых u_{xx} или u_{xxx} в правой части уравнения (2).

Для исследования разрушения решения мы используем метод, развитый в работах С. И. Похожаева, Э. Митидиери и В. А. Галактионова и получивший название метода пробных функций, или метода нелинейной емкости. Для подробного ознакомления с возможностями этого метода следует смотреть работы [7]–[13]. В частности, применению пробных функций специального вида в задачах гидродинамики посвящены работы [14]–[17].

2. РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМАХ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Рассмотрим общую идею метода на примере начально-краевой задачи (1), (2). Предположим, что при некотором $T_0 > 0$ решение уравнений (1), (2) существует и принадлежит классу функций

$$u(x, t), \eta(x, t) \in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]).$$

Кроме того, предположим, что граничные условия гарантируют выполнение закона сохранения массы в области $x \in [0, l]$:

$$\int_0^l \eta(x, t) dx = \int_0^l \eta_0(x) dx = m_0. \quad (3)$$

Умножим уравнение (2) на функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем по всей области, налагая на $\varphi(x)$ необходимые для этого условия. Тогда после интегрирования по частям уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \varphi \eta u dx = \int_0^l [\eta u^2 + \eta^2] \varphi_x dx + \text{Gr}(t), \quad (4)$$

где функция $\text{Gr}(t)$ определяется граничными условиями задачи:

$$\text{Gr}(t) = [\eta^2 + \eta u^2] \varphi|_{x=0} - [\eta^2 + \eta u^2] \varphi|_{x=l}.$$

Если мы потребуем, чтобы при всех $x \in [0, l]$ были выполнены неравенства $\varphi_x \geq 0$ и $\varphi^2/\varphi_x \leq C$, тогда, пользуясь неравенством Гёльдера [12], можно убедиться в справедливости оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l \varphi \eta u dx \right|^2 &= \left| \int_0^l \sqrt{\eta u^2 \varphi_x} \sqrt{\frac{\eta \varphi^2}{\varphi_x}} dx \right|^2 \leq \\ &\leq \int_0^l \varphi_x \eta u^2 dx \int_0^l \eta \frac{\varphi^2}{\varphi_x} dx \leq C m_0 \int_0^l \varphi_x \eta u^2 dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь предположим, что $\text{Gr}(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, \infty)$, тогда, подставляя оценку (5) в уравнение (4), можно прийти к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{J^2}{C m_0}, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_0^l \varphi \eta u dx, \quad (6)$$

интегрируя которое в предположении $J(0) > 0$, легко получить оценку снизу для функции $J(t)$:

$$J(t) \geq \frac{J(0) C m_0}{C m_0 - J(0) t}, \quad (7)$$

разрушающуюся за конечное время

$$T_\infty = C m_0 \left| \int_0^l \varphi(x) \eta_0(x) u_0(x) dx \right|^{-1}.$$

Сделаем несколько замечаний.

Конечно, возможность выбора пробной функции $\varphi(x)$ зависит от конкретных граничных условий. При этом многие требования, сделанные выше, можно существенно ослабить. Действительно, разрушение будет иметь место и при отсутствии закона сохранения массы: достаточным условием, как нетрудно убедиться, является следующее:

$$\int_0^l \eta(x, t) dx \leq m(t) \quad \text{и} \quad \int_0^t \frac{1}{m(t)} dt \geq t^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Кроме того, функция $\text{Gr}(t)$ может быть ограничена снизу и отрицательной константой, при этом лишь изменится оценка (7).

Важной проблемой метода является выбор из возможных функций $\varphi(t)$ оптимальной, дающей наилучшую оценку времени разрушения. Для этого необходимо в каждом конкретном случае решать вариационную задачу на минимум T_∞ (см., например, работу [9]), однако для общего случая этот вопрос остается пока открытым.

Наконец, заметим, что данный подход можно использовать и для доказательства разрушения слабого решения, поскольку он определяет не так называемую “градиентную катастрофу”, а разрушение некоторой интегральной характеристики $J(t)$. При этом наиболее важным его отличием с практической точки зрения является возможность установить глобальную неразрешимость начально-краевой задачи без построения характеристик соответствующих квазилинейных гиперболических уравнений.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим модельную задачу на отрезке $x \in [0, l]$:

$$\eta_t + (\eta u)_x = 0, \quad (8)$$

$$(\eta u)_t + (\eta u^2)_x + (\eta^2)_x = 0 \quad (9)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \eta(x, t)|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \eta(x, t)|_{x=0} = \eta(x, t)|_{x=l} = 0.$$

В силу граничных условий из уравнения (8) следует закон сохранения (3). Умножим уравнение (9) на $\varphi(x) = x$ и проинтегрируем по частям:

$$\frac{dJ}{dt} = -[x\eta u^2 + x\eta^2]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l [\eta u^2 + \eta^2] dx, \quad J(t) = \int_0^l x\eta u dx.$$

Отсюда сразу следует неравенство (6) и оценка снизу для функции $J(t)$:

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - J(0)t/l^2 m_0}.$$

Таким образом, мы доказали глобальную неразрешимость задачи на интервалах, больших, чем $[0, T_\infty]$, где

$$T_\infty = l^2 \left| \int_0^l \eta_0(x) dx \right| \left| \int_0^l x u_0(x) \eta_0(x) dx \right|^{-1},$$

при условии $J(0) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Требование сохранения массы является весьма жестким, так как обязывает задавать граничные условия на обоих концах области. Этого можно избежать, если перейти к более мягкому дифференциальному неравенству. Действительно, рассмотрим вновь задачу (8), (9), но на этот раз с граничным условием только на правой границе:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \eta(x, t)|_{t=0} = \eta_0(x), \quad x \in [0, l], \quad \eta(x, t)|_{x=l} = 0.$$

Выберем пробную функцию $\varphi(x) = x^\lambda$, $\lambda > 1$. Умножим уравнение (9) на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x^\lambda \eta u \, dx \geq \lambda \int_0^l x^{\lambda-1} [\eta u^2 + \eta^2] \, dx. \quad (10)$$

Воспользуемся оценкой Гёльдера [12]:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l x^\lambda \eta u \, dx \right|^2 &\leq \int_0^l x^{\lambda-1} \eta u^2 \, dx \int_0^l x^{\lambda+1} \eta \, dx, \\ \left| \int_0^l x^{\lambda+1} \eta \, dx \right|^2 &\leq \int_0^l x^{\lambda-1} \eta^2 \, dx \int_0^l x^{\lambda+3} \, dx. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (8) на $x^{\lambda+1}$, тогда после интегрирования по частям оно примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^l x^{\lambda+1} \eta(x, t) \, dx = (\lambda + 1) \int_0^l x^\lambda \eta(x, t) u(x, t) \, dx.$$

Проинтегрируем это уравнение по времени и введем новую функцию

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv \int_0^l x^{\lambda+1} \eta(x, t) \, dx = \\ &= \int_0^l x^{\lambda+1} \eta_0(x) u_0(x) \, dx + (\lambda + 1) \int_0^t \int_0^l x^\lambda \eta(x, s) u(x, s) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (10) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda + 1} \Phi'' \geq \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} \frac{(\Phi')^2}{\Phi} + \frac{\lambda(\lambda + 4)}{l^{\lambda+4}} \Phi^2. \quad (11)$$

Предположим, что $\Phi(0) > 0$, тогда на достаточно малом интервале времени $[0, t^*]$ выполнено неравенство $\Phi(t) > 0$. Умножим неравенство (11) на $\Phi(t)$ и получим

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 \geq \beta \Phi^3, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad \beta = \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 4)}{l^{\lambda+4}}. \quad (12)$$

Введем замену $Y = \Phi^{1-\alpha}$, тогда из неравенства (12) следует, что

$$Y'' \geq (1 - \alpha) \beta Y^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}. \quad (13)$$

Теперь предположим, что $Y'(0) > 0$ и проинтегрируем неравенство (13), получим

$$Y' \geq \sqrt{2\beta \frac{(1-\alpha)^2}{3-2\alpha}} Y^{(3-2\alpha)/(2-2\alpha)}.$$

Еще раз интегрируя по времени, получаем

$$\frac{2-2\alpha}{Y^{1/(2-2\alpha)}(0)} - \frac{2-2\alpha}{Y^{1/(2-2\alpha)}(t)} \geq \sqrt{2\beta \frac{(1-\alpha)^2}{3-2\alpha}} t.$$

Возвращаясь к $\Phi(t)$, имеем оценку снизу:

$$\Phi^{1/2}(t) \geq \frac{\Phi^{1/2}(0)}{1-\gamma t}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\beta\Phi(0)}{2(3-2\alpha)}}.$$

Теперь очевидно, что эту оценку можно распространить с интервала $[0, t^*]$ на всю область разрешимости. Таким образом, при выполнении условий

$$\int_0^l x^{\lambda+1} \eta_0 dx > 0, \quad \int_0^l x^\lambda \eta_0 u_0 dx > 0$$

задача неразрешима на интервалах, больших $[0, T_\infty]$, где

$$T_\infty = \sqrt{\frac{2(\lambda+3)l^{\lambda+4}}{\lambda(\lambda+1)^2(\lambda+4)}} \left| \int_0^l x^{\lambda+1} \eta_0 dx \right|^{-1/2}.$$

Важно обратить внимание, что задача с граничным условием $\eta = 0$ не совсем “корректна” с физической точки зрения, хотя, как было указано выше, многие численные расчеты задач Коши проводятся именно на отрезке с условиями $\eta = 0$ на краях, и время разрушения решения дает “время корректности” рассчитываемых задач. В приведенном примере и далее такое условие на границе берется скорее для удобства, так как, используя предложенный метод, внимательный исследователь не должен иметь проблемы с доказательством разрушения и при физически корректных условиях. Например, при условиях непротекания $u = 0$ и ограниченности высоты жидкости $\eta \leq \text{const}$ также можно прийти к неравенству (13) и, следовательно, к разрушению за конечное время.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим начально-краевую задачу на полупрямой $x \in [0, +\infty)$:

$$\eta_t + (\eta u)_x = 0, \quad (\eta u)_t + (\eta u^2)_x + (\eta^2)_x = 0 \quad (14)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \eta(x, t)|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \eta(x, t)|_{x=0} = 0.$$

В качестве дополнительного, разумного с физической точки зрения требования на бесконечности возьмем $u\eta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Как и выше, не составляет труда убедиться в выполнении закона сохранения массы.

Выберем пробную функцию $\varphi(x) = -e^{-x}$ и повторим все проведенные выше выкладки:

$$\frac{dJ}{dt} = e^{-x}[\eta u^2 + \eta^2]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-x} \eta u^2 dx + \int_0^\infty e^{-x} \eta^2 dx, \quad (15)$$

где

$$J(t) = - \int_0^\infty e^{-x} \eta u dx.$$

Неравенство Гёльдера [12] дает оценку для второго слагаемого в правой части (15):

$$J^2 = \left| \int_0^\infty e^{-x} \eta u dx \right|^2 \leq \int_0^\infty e^{-x} \eta u^2 dx \int_0^\infty e^{-x} \eta dx \leq m_0 \int_0^\infty e^{-x} \eta u^2 dx.$$

Подставляя ее в (15), получаем обыкновенное дифференциальное неравенство, интегрируя которое, убеждаемся в справедливости оценки

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - J(0)t/m_0}.$$

Следовательно, задача (14) неразрешима на интервалах, больших $[0, T_\infty]$, где

$$T_\infty = \left| \int_0^\infty \eta_0(x) dx \right| \left| \int_0^\infty e^{-x} \eta_0(x) u_0(x) dx \right|^{-1}.$$

ПРИМЕР 3. В этом примере мы покажем, что при оценке времени разрушения можно обойтись без требования положительности функции η . Действительно, рассмотрим начально-краевую задачу для знакопеременных функций $h(x, t)$ и $u(x, t)$:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (hu)_t + (hu^2)_x + (h^2)_x = 0,$$

где $x \in [0, l]$, с начальными и граничными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad h(x, t)|_{t=0} = h_0(x), \quad u(x, t)|_{x=0} = h(x, t)|_{x=l} = 0.$$

Представим функцию h в виде $h = h_+ - h_-$ для некоторых знакопостоянных функций h_+ и h_- , удовлетворяющих уравнениям

$$(h_+)_t + (h_+ u)_x = 0, \quad (h_-)_t + (h_- u)_x = 0, \quad (16)$$

$$(h_+ u)_t + (h_+ u^2)_x + (h^2)_x = 0, \quad (h_- u)_t + (h_- u^2)_x + 2(h^2)_x = 0, \quad (17)$$

где $x \in [0, l]$, и условиям

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= u_0(x), & h_\pm(x, t)|_{t=0} &= h_{\pm,0}(x), \\ u(x, t)|_{x=0} &= h_+(x, t)|_{x=l} = h_-(x, t)|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что выбрать такие функции h_+ и h_- можно всегда. Тогда из уравнений (16) в силу граничных условий следуют законы сохранения:

$$\int_0^l h_\pm(x, t) dx = \int_0^l h_{\pm,0}(x) dx = m_{\pm,0}.$$

Умножая оба уравнения (17) на $\varphi(x) = x$ и интегрируя по частям, мы получаем обыкновенные дифференциальные неравенства типа (6) для функций

$$J_{\pm}(t) = \int_0^l x h_{\pm}(x, t) u(x, t) dx.$$

Если мы предположим, что, например, функция h_+ в момент времени $t = 0$ не равна тождественно нулю, то интегрирование дифференциального неравенства дает разрушающуюся оценку снизу:

$$J_+(t) \geq \frac{J_+(0)}{1 - J_+(0)t/l^2 m_{+,0}}.$$

Разумеется, идея разделения знакопеременной функции на две произвольные знакопостоянные удобна только для оценки времени разрушения, так как произвол разделения сильно усложнит решение вариационной задачи на поиск оптимальной функции $\varphi(x)$.

3. РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМАХ С ВЯЗКОСТЬЮ

Одним из важнейших достоинств метода пробной функции является возможность исследования глобальной неразрешимости дифференциальных уравнений старших порядков. При подходящих граничных условиях интегрирование по частям позволяет переносить производные ∂_x с неизвестной функции $u(x, t)$ на пробную функцию. С этим связана широкая распространенность этого метода для уравнений Кортвега–де Фриза, Кадомцева–Петвиашвили, Розенау–Бюргерса и многих других, содержащих слагаемые вида $u_{xx} \dots x$ [8], [9], [14], [18].

ПРИМЕР 4. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы “мелкой воды с вязкостью”:

$$\eta_t + (\eta u)_x = 0, \quad (18)$$

$$(\eta u)_t + (\eta u^2)_x + (\eta^2)_x = \nu u_{xx}. \quad (19)$$

Предположим, что для некоторого $T_0 > 0$ существует решение системы, принадлежащее классу функций

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]), \\ u(x, t) &\in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]) \cap C([0, T_0]; C^{(2)}[0, l]). \end{aligned}$$

Умножим уравнение (19) на пробную функцию $\varphi(x) = x$ и проинтегрируем по частям, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^l x \eta u dx = \int_0^l (\eta u^2 + \eta^2) dx + \text{Gr}(t), \quad (20)$$

где

$$\text{Gr}(t) = \nu u|_{x=0} - [l\eta u^2 + l\eta^2 - \nu l u_x + \nu u]_{x=l}.$$

Для удобства предположим, что граничные условия обеспечивают закон сохранения массы:

$$\int_0^l \eta(x, t) dx = \int_0^l \eta_0(x) dx = m_0 \quad \text{и} \quad \text{Gr}(t) \equiv 0.$$

Теперь стандартным методом с помощью неравенства Гёльдера мы сведем уравнение (20) к обыкновенному дифференциальному неравенству (6) и получим ту же оценку времени разрушения, что и в примере 1.

Очевидно, что если в правой части уравнения (19) стоит не вторая, а третья производная, то, взяв в качестве пробной функции $\varphi(x) = x^2$, мы легко придем к оценке типа (7):

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - J(0)8t/(l^4 m_0)}, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_0^l x^2 \eta u \, dx.$$

Откуда сразу получим, что при выполнении условий $J(0) > 0$ и

$$\int_0^l \eta(x, t) \, dx = m_0, \quad 2\nu u|_{x=0} - [l^2 \eta u^2 + l^2 \eta^2 - \nu l^2 u_{xx} + 2\nu l u_x - 2\nu u]|_{x=l} \equiv 0$$

задача будет глобально неразрешима на интервалах, больших $[0, T_\infty]$, где

$$T_\infty = \frac{l^4}{8} \left| \int_0^l \eta_0 \, dx \right| \left| \int_0^l x^2 \eta_0 u_0 \, dx \right|^{-1}.$$

4. РАЗРУШЕНИЕ В БАРОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Невязкие газодинамические течения в потоковом представлении описываются системой уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ (\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u}) + \nabla p &= 0, \\ E_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}(E + p)) &= 0, \end{aligned}$$

неизвестными величинами в которой являются плотность газа ρ , скорость $\mathbf{u}$ и удельная полная энергия E , а давление p связано с E через уравнение состояния.

Баротропное приближение представляет собой упрощение, в котором предполагается, что давление зависит только от плотности: $p = p(\rho)$. В этом случае можно отбросить третье уравнение системы и провести аналогию с системой “мелкой воды”. Покажем, что при определенных граничных условиях метод пробных функций позволяет установить глобальную неразрешимость соответствующих начально-краевых задач.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим одномерную задачу на отрезке $x \in [0, l]$:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{21}$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + p_x = 0 \tag{22}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= u_0(x), & \eta(x, t)|_{t=0} &= \eta_0(x), \\ u(x, t)|_{x=0} &= u(x, t)|_{x=l} = 0, & p(x, t)|_{x=l} &\leq p_0 \equiv \text{const.} \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого T_0 существует решение из класса

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &\in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]), \\ u(x, t) &\in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]), \\ p(x, t) &\in C^{(1)}([0, T_0] \times [0, l]).\end{aligned}$$

Умножим уравнение (22) на пробную функцию $\varphi(x) = x$ и проинтегрируем по частям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x \rho u \, dx \geq \int_0^l [\rho u^2 + p] \, dx - p_0 l. \quad (23)$$

Тогда, если $p \geq 0$, а граничные условия обеспечивают закон сохранения массы,

$$\int_0^l \rho \, dx = m_0 = \text{const}, \quad J(0) = \int_0^l x \rho_0 u_0 \, dx \geq \sqrt{p_0 m_0 l^3},$$

то с помощью неравенства Гёльдера неравенство (23) можно переписать в виде

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{1}{m_0 l^2} J^2 - p_0 l, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_0^l x \rho u \, dx.$$

Интегрируя, получаем оценку снизу

$$J(t) \geq a \frac{1 + b e^{ct}}{1 - b e^{ct}},$$

где

$$a = \sqrt{p_0 m_0 l^3}, \quad b = \frac{J(0) - a}{J(0) + a}, \quad c = 2 \sqrt{\frac{p_0}{m_0 l}}.$$

Таким образом, решение задачи (21), (22) не существует на промежутке времени, большем, чем $[0, -(\ln b)/c]$.

ПРИМЕР 6. Теперь рассмотрим двумерную начально-краевую задачу в квадрате $(x, y) \in [0, l] \times [0, l]$:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad (24)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + p_x = 0, \quad (25)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2)_y + p_y = 0, \quad t \in [0, T_0], \quad (26)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}u(x, y, t)|_{x=0} &= u(x, y, t)|_{x=l} = 0, \\ v(x, y, t)|_{y=0} &= v(x, y, t)|_{y=l} = 0, \\ p(x, y, t)|_{x=l} &= p(x, y, t)|_{y=l} = 0\end{aligned} \quad (27)$$

и начальными условиями

$$u(x, y, t)|_{t=0} = u_0(x, y), \quad v(x, y, t)|_{t=0} = v_0(x, y), \quad \rho(x, y, t)|_{t=0} = \rho_0(x, y). \quad (28)$$

Решение, как обычно, понимается в классическом смысле. Кроме того, в силу граничных условий имеет место закон сохранения массы:

$$\int_0^l \int_0^l \rho \, dx \, dy = \int_0^l \int_0^l \rho_0 \, dx \, dy = m_0.$$

Умножим уравнения (25) и (26) на пробную функцию $\varphi(x, y) = xy$, проинтегрируем по частям и сложим, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \int_0^l xy \rho (u + v) \, dx \, dy = \int_0^l \int_0^l [y \rho u^2 + x \rho uv + y \rho uv + x \rho v^2 + py + px] \, dx \, dy. \quad (29)$$

Предположим, что давление $u, v, p(x, y) \geq 0$, тогда уравнение (29) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \int_0^l xy \rho (u + v) \, dx \, dy \geq \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l xy [\rho u^2 + 2\rho uv + \rho v^2] \, dx \, dy.$$

Используя неравенство Гёльдера, запишем обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{1}{l^3 m_0} J^2, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_0^l \int_0^l xy \rho (u + v) \, dx \, dy.$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим, что решение задачи (24)–(28) не существует на промежутках времени, больших $[0, T_\infty]$, где

$$T_\infty = m_0 l^3 \left| \int_0^l \int_0^l xy \rho_0 (u_0 + v_0) \, dx \, dy \right|^{-1}.$$

Приведенные примеры демонстрируют возможность исследования глобальной неразрешимости начально-краевых задач, возникающих в теории “мелкой воды” и в газовой динамике. Несмотря на то что вопрос выбора оптимальной пробной функции остается открытым, метод, предложенный в настоящей работе, позволяет получать на качественном уровне оценку сверху для времени разрушения решения и ограничение снизу для скорости разрушения.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011) и Министерства образования и науки РФ (соглашение 8215).

Список литературы

- [1] A. Constantin, J. Escher, *Acta Math.*, **181**:2 (1998), 229–243.
- [2] Y. Zhou, *Nonlinear Anal.*, **57**:1 (2004), 137–152.
- [3] О. В. Булатов, Т. Г. Елизарова, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 170–184.
- [4] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1968.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [6] С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков, *Матем. заметки*, **93**:5 (2013), 716–727.

- [7] С. И. Похожаев, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 111–132.
- [8] С. И. Похожаев, *Матем. заметки*, **89**:3 (2011), 393–409.
- [9] С. И. Похожаев, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **39**, РУДН, М., 2011, 141–150.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.
- [11] V. A. Galaktionov, E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, *Nonlinear Anal.*, **70**:8 (1009), 2930–2952.
- [12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, М., 2006.
- [13] С. И. Похожаев, *Дифференц. уравнения*, **47**:4 (2011), 493–498.
- [14] Е. В. Юшков, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 197–206.
- [15] С. Ю. Доброхотов, А. И. Шафаревич, *Механика жидкости и газа*, **31**:4 (1996), 38–42.
- [16] Е. В. Юшков, *Дифференц. уравнения*, **48**:9 (2012), 1234–1239.
- [17] S. Lai, Y. Wu, *J. Differ. Equ.*, **249**:3 (2010), 693–706.
- [18] М. О. Корпусов, *ТМФ*, **174**:3 (2013), 355–363.

Поступила в редакцию 2.02.2013