Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Рябов, Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 2, 205–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 07:39:37

© 2013 г.

П. Е. Рябов*

ФАЗОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ОДНОЙ НЕПРИВОДИМОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается интегрируемая система с тремя степенями свободы, для которой В.В. Соколовым и А.В. Цыгановым указано представление Лакса. Представление Лакса обобщает L - A -пару для гиростата Ковалевской в двойном поле, найденную А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым-Тян-Шанским. Приводятся явные формулы для (независимых почти всюду) дополнительных первых интегралов K и G , которые функционально связаны с коэффициентами спектральной кривой L - A -пары Соколова–Цыганова. Благодаря такой форме дополнительных интегралов K , G и параметрической редукции Харламова выделены аналитически два инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая Богоявленского – вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном полях. Для описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем. Для каждой подсистемы построены бифуркационные диаграммы и указаны бифуркации торов Лиувилля как внутри подсистем, так и во всей системе в целом.

Ключевые слова: вполне интегрируемые гамильтоновы системы, спектральная кривая, отображение момента, бифуркационная диаграмма, бифуркации торов Лиувилля.

DOI: 10.4213/tmf8515

1. ВВЕДЕНИЕ

Прошло одиннадцать лет с тех пор, как в работе [1] была доказана интегрируемость системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}},\end{aligned}\tag{1.1}$$

* Финансовый университет, Москва, Россия. E-mail: orelryabov@mail.ru

которая описывает динамику твердого тела при наличии двух силовых полей с деформированным гамильтонианом

$$H_1 = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2(\alpha_1 + \beta_2) + 2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \quad (1.2)$$

Здесь трехмерные векторы $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом, λ – параметр гиросtatического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии, ε_1 – параметр деформации. Если параметр деформации обращается в нуль, то функция (1.2) совпадает с гамильтонианом в задаче о движении гиростата Ковалевской в системе двух полей (см. формулу (3) в работе [2]). Системы с такими гамильтонианами, существенно зависящими от $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, не допускают непрерывной группы симметрии и поэтому неприводимы глобально к семейству систем с двумя степенями свободы.

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= \varepsilon_{ijk} \alpha_k, & \{M_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, & \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, & \{\beta_i, \beta_j\} &= 0, \\ \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), & 1 \leq i, j, k \leq 3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функциями Казимира являются выражения $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}^2$.

Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (1.3), систему (1.1) можно представить в гамильтоновом виде:

$$\dot{x} = \{H_1, x\},$$

где через x обозначена любая из координат.

В работе [1] указана соответствующая L -А-пара для гамильтониана (1.2). Хорошо известно, что коэффициенты спектральной кривой $\mathcal{E}_1(z, \zeta) = 0$ для L -А-пары всегда являются первыми интегралами. Оказывается, необходимый дополнительный интеграл (коэффициент при z^4 в алгебраической кривой $\mathcal{E}_1(z, \zeta) = 0$) можно выразить через другие (независимые почти всюду) дополнительные интегралы той же системы (см. ниже (1.5)). Деформации интегрируемых гамильтонианов [1] упоминаются в книгах [3] (глава 2, формула (4.18)) и [4] (глава 3, § 4, замечание 2). При отсутствии второго силового поля ($\boldsymbol{\beta} = 0$) и наличии ненулевого параметра λ (параметра гиросtatического момента) интегрируемость доказана Соколовым [5]. Явное выражение дополнительного интеграла (на алгебре $\epsilon(3)$) содержится в работе [5]. В [6] дополнительный интеграл Соколова представлен в виде, удобном для исследования фазовой топологии в системе с двумя степенями свободы.

Для гамильтониана (1.2) дополнительные интегралы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1 = & \left[\frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \alpha_1 - \beta_2 + \varepsilon_1(M_3\alpha_2 - M_2\alpha_3 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2) \right]^2 + \\ & + [M_1M_2 + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon_1(M_1\alpha_3 - M_3\alpha_1 + M_3\beta_2 - M_2\beta_3)]^2 - \\ & - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2(\alpha_3M_1 + \beta_3M_2)] + \lambda\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)M_3 + \\ & + 2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2M_1^2 - \beta_1M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2\omega_\gamma - \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 & -2\varepsilon_1^2(\alpha \cdot \beta)[\alpha_2 + \beta_1 + M_1M_2 + \varepsilon_1(\alpha_3M_1 - \alpha_1M_3 + \beta_2M_3 - \beta_3M_2)], \\
 G_1 = & \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\alpha^2\beta_2 - 2\beta^2\alpha_1 + \\
 & + 2\varepsilon_1[\alpha^2(M_3\beta_1 - M_1\beta_3) + \beta^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2)] + \\
 & + 2(\alpha \cdot \beta)[\alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon_1(\alpha_3M_1 - \alpha_1M_3 + \beta_2M_3 - \beta_3M_2)],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega_\alpha &= M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3, \\
 \omega_\beta &= M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3, \\
 \omega_\gamma &= M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).
 \end{aligned}$$

Функции K_1 и G_1 записаны таким образом, чтобы их можно было сравнить с интегралами I_1 и I_2 из работ [2] или [7]. А именно, если положить значение параметра деформации ε_1 равным нулю, то получаются выражения для I_1 и I_2 (формула (5) в работе [2]).

Укажем явное выражение алгебраической кривой $\mathcal{E}_1(z, \zeta)$:

$$\mathcal{E}_1(z, \zeta): d_4^1\zeta^4 + d_2^1\zeta^2 + d_0^1 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 d_4^1 &= -z^4 - \varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)z^2 - \varepsilon_1^4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\
 d_2^1 &= 2z^6 + [\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2) - h_1 - \lambda^2]z^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon_1^2g_1)z^2 + 2\varepsilon_1^2[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\
 d_0^1 &= -z^8 + h_1z^6 + d_{04}^1z^4 + g_1z^2 - [\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2].
 \end{aligned}$$

Коэффициент d_{04}^1 при z^4 , как отмечалось выше, всегда является первым интегралом. Нам удалось выразить коэффициент d_{04}^1 через функции Казимира α^2 , β^2 и другие (независимые почти всюду) дополнительные интегралы (1.4) той же системы:

$$d_{04}^1 = \varepsilon_1^2g_1 + k_1 - \frac{1}{4}[h_1^2 + 2\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)h_1 + \varepsilon_1^4(\alpha^2 - \beta^2)^2] - \alpha^2 - \beta^2, \quad (1.5)$$

где h_1 , g_1 и k_1 – постоянные первых интегралов (1.2) и (1.4).

Для полноты приведем формулы для другой деформации гамильтониана H_2 , интегрируемость которой также доказана в работе [1]:

$$H_2 = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) + 2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3), \quad (1.6)$$

где ε_2 – параметр деформации.

Дополнительные интегралы K_2 и G_2 для гамильтониана (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_2 = & \left[\frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) + M_3\alpha_2 - M_2\alpha_3 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3 - \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \right]^2 + \\
 & + [M_1M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + M_1\alpha_3 - M_3\alpha_1 + M_3\beta_2 - M_2\beta_3]^2 - \\
 & - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3M_1 + \beta_3M_2)] + \lambda(\alpha^2 + \beta^2)M_3 + \\
 & + 2\lambda[\alpha_2M_1^2 - \beta_1M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1M_2] - 2\lambda\omega_\gamma -
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
& -2(\alpha \cdot \beta)[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + M_1 M_2 + \alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2], \\
G_2 = & \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\alpha^2 \beta_2 + \beta^2 \alpha_1) + \\
& + 2[\alpha^2(M_3 \beta_1 - M_1 \beta_3) + \beta^2(M_2 \alpha_3 - M_3 \alpha_2)] + \\
& + 2(\alpha \cdot \beta)[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2].
\end{aligned}$$

Алгебраическая кривая $\mathcal{E}_2(z, \zeta)$ задается выражением

$$\mathcal{E}_2(z, \zeta): d_4^2 \zeta^4 + d_2^2 \zeta^2 + d_0^2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
d_4^2 = & -z^4 - (\alpha^2 + \beta^2)z^2 - [\alpha^2 \beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\
d_2^2 = & 2z^6 + (\alpha^2 + \beta^2 - h_2 - \lambda^2)z^4 + [\varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2) - g_2]z^2 + 2\varepsilon_2^2[\alpha^2 \beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\
d_0^2 = & -z^8 + h_2 z^6 + [g_2 + k_2 - \frac{1}{4}[h_2^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)h_2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2] - \varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2)]z^4 + \\
& + \varepsilon_2^2 g_2 z^2 - \varepsilon_2^4 [\alpha^2 \beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2].
\end{aligned}$$

Здесь через h_2, k_2, g_2 обозначены постоянные первых интегралов (1.6) и (1.7).

Как показано в [8]–[10], без ограничения общности можно считать векторы α и β взаимно ортогональными, причем $|\alpha| > |\beta|$. Тогда геометрические интегралы, порождаемые функциями Казимира, запишутся в виде

$$|\alpha|^2 = a^2, \quad |\beta|^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \quad a > b > 0. \quad (1.8)$$

Цель настоящей работы – предъявить новые инвариантные четырехмерные подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Мы также приводим атлас бифуркационных диаграмм и сами диаграммы таких систем. Мы предъявляем новый сетевой инвариант на изоэнергетической поверхности, которого нет в списке сетевых инвариантов в задаче о движении волчка Ковалевской в двух однородных полях.

2. ПЕРВАЯ СИСТЕМА – ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ БОГОЯВЛЕНСКОГО В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим фазовое пространство $\mathcal{P}^6$, задаваемое уравнениями (1.8). При отсутствии постоянного гиросtatического момента (параметр λ равен нулю) дополнительные интегралы (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned}
K = & Z_1^2 + Z_2^2, \\
G = & \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2M_3 \omega_\gamma - 2\alpha^2 \beta_2 - 2\beta^2 \alpha_1 + \\
& + 2\varepsilon[\alpha^2(M_3 \beta_1 - M_1 \beta_3) + \beta^2(M_2 \alpha_3 - M_3 \alpha_2)],
\end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}
Z_1 = & \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \alpha_1 - \beta_2 + \varepsilon(M_3 \alpha_2 - M_2 \alpha_3 + M_3 \beta_1 - M_1 \beta_3) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(\alpha^2 - \beta^2), \\
Z_2 = & M_1 M_2 + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon(M_1 \alpha_3 - M_3 \alpha_1 + M_3 \beta_2 - M_2 \beta_3).
\end{aligned}$$

Здесь и далее для краткости обозначено $\varepsilon = \varepsilon_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система соотношений

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0 \quad (2.2)$$

определяет инвариантное четырехмерное подмногообразие $\mathcal{M}_1$ фазового пространства $\mathcal{P}^6$ уравнений (1.1) с гамильтонианом

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - 2(\alpha_1 + \beta_2) + 2\varepsilon(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с учетом (1.8) и (2.2) имеем

$$\dot{Z}_1 = \{H, Z_1\} = 4M_3Z_2 = 0, \quad \dot{Z}_2 = \{H, Z_2\} = -4M_3Z_1 = 0. \quad \blacksquare$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функция

$$\begin{aligned} F_0 = \{Z_1, Z_2\} = & [M_1^2 + M_2^2 + 2\varepsilon^2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - \varepsilon^2(a^2 + b^2)]M_3 + \\ & + 2(M_1\alpha_3 + M_2\beta_3) + 2\varepsilon^2[M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - M_2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)] + \\ & + 2\varepsilon[M_1M_2(\alpha_1 - \beta_2) - M_1^2\alpha_2 + M_2^2\beta_1] \end{aligned}$$

является первым интегралом на подмногообразии $\mathcal{M}_1$, заданном уравнениями (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу тождества Якоби, правила Лейбница и уравнений (2.2) находим

$$\dot{F}_0 = \{H, F_0\} = \{H, \{Z_1, Z_2\}\} = 4Z_1\{M_3, Z_1\} + 4Z_2\{M_3, Z_2\} = 0. \quad \blacksquare$$

Отметим, что система уравнений (2.2) является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая Богоявленского в динамике твердого тела (формула (6.6) в работе [11]).

В точках подмногообразия $\mathcal{M}_1$ непосредственно проверяется справедливость следующего тождества, которое является обобщением соответствующей формулы работы [12]:

$$\{2 + \varepsilon^2[\varepsilon^2(\alpha^2 + \beta^2) + H]\}[(\alpha^2 + \beta^2)H - 2G + \varepsilon^2(\alpha^2 - \beta^2)^2] - F_0^2 = 0.$$

Перечислим формально (без условия существования) все положения равновесия $c_i(\mathbf{M}, \alpha, \beta)$ и их образы P_i в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$. Положения равновесия являются особенностями ранга 0 отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$, порождаемого первыми интегралами (2.1), (2.3). Особенности ранга 0 образуют нульмерный остов Σ_0 бифуркационной диаграммы Σ (образа множества критических значений отображения момента):

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \left(0, \mp \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, 0, b, 0\right), \\ P_{1,2} &= \left(-\frac{1 + a^2\varepsilon^4 + 2b\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(b\varepsilon^2 - 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{b(b + a^2b\varepsilon^4 + 2a^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right), \\ c_{3,4} &= \left(0, \mp \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, 0, -b, 0\right), \\ P_{3,4} &= \left(-\frac{1 + a^2\varepsilon^4 - 2b\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(b\varepsilon^2 + 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{b(b + a^2b\varepsilon^4 - 2a^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{5,6} &= \left(\pm \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, 0, a, 0, 0, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2} \right), \\
P_{5,6} &= \left(-\frac{1 + b^2 \varepsilon^4 + 2a\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(a\varepsilon^2 - 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{a(a + ab^2 \varepsilon^4 + 2b^2 \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right), \\
c_{7,8} &= \left(\pm \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, 0, -a, 0, 0, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2} \right), \\
P_{7,8} &= \left(-\frac{1 + b^2 \varepsilon^4 - 2a\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(a\varepsilon^2 + 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{a(a + ab^2 \varepsilon^4 - 2b^2 \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right), \\
c_{9,10,11,12} &= \left(0, \pm a, 0, 0, 0, \pm b, 0 \right), \\
P_{9,10,11,12} &= \left(\mp 2(a \pm b), \frac{1}{4}(a \mp b)^2[\varepsilon^2(a \pm b) - 2]^2, \mp 2ab(a \pm b) \right), \\
c_{13,14,15,16} &= \left(0, \mp \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}, \mp \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \mp \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2 \varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0 \right), \\
P_{13,14,15,16} &= \left(-\frac{\varepsilon^4(a^2 + b^2) + 2}{\varepsilon^2}, 0, -\frac{a^2 + b^2 + 2a^2 b^2 \varepsilon^4}{\varepsilon^2} \right), \\
c_{17,18} &= \left(0, 0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4}}{2\varepsilon}, \frac{2a}{\varepsilon^2(a+b)}, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4}a}{(a+b)\varepsilon^2}, 0, \right. \\
&\quad \left. \mp \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4}b}{(a+b)\varepsilon^2}, \frac{2b}{\varepsilon^2(a+b)}, 0 \right), \\
P_{17,18} &= \left(-\frac{\varepsilon^4(a+b)^2 + 4}{2\varepsilon^2}, 0, -\frac{[\varepsilon^4(a+b)^2 + 4]ab}{2\varepsilon^2} \right), \\
c_{19,20} &= \left(0, 0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4}}{2\varepsilon}, \frac{2a}{\varepsilon^2(a-b)}, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4}a}{(a-b)\varepsilon^2}, 0, \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4}b}{(a-b)\varepsilon^2}, -\frac{2b}{\varepsilon^2(a-b)}, 0 \right), \\
P_{19,20} &= \left(-\frac{\varepsilon^4(a-b)^2 + 4}{2\varepsilon^2}, 0, \frac{[\varepsilon^4(a-b)^2 + 4]ab}{2\varepsilon^2} \right).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon > \max\{1/\sqrt{b}, \sqrt{2/(a-b)}\}$ подмногообразие $\mathcal{M}_1$ содержит положения равновесия $c_{13}-c_{20}$. Наличие особенностей ранга 0 в системе $\mathcal{M}_1$ и их аналитическая классификация по типу позволяют применить метод круговых молекул для анализа бифуркаций торов Лиувилля и построения инварианта Фоменко–Цишанга [13], [14]. Соответствующая бифуркационная диаграмма Σ_1 отображения момента $\mathcal{F}_1 = H \times F_0$ изображена на рис. 1. Здесь же указаны бифуркации торов Лиувилля, которым соответствуют атомы А (рождение тора) и В (перестройка одного тора в два).

 Рис. 1. Бифуркационная диаграмма Σ_1 отображения момента $\mathcal{F}_1 = H \times F_0$.

При указанных значениях параметра деформации ε параметризацию бифуркационной диаграммы Σ_1 можно явно описать следующим образом:

$$\delta_1: \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} - t^2] - t^4\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}} \times \\ \times (\sqrt{a^2 - t^2} + \sqrt{b^2 - t^2}), \quad t \in \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}, 0\right), \end{cases}$$

$$\delta_2: \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) + \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} + t^2] + t^4\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}} \times \\ \times (\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{b^2 - t^2}), \quad t \in \left[-b, -\frac{1}{\varepsilon^2}\right], \end{cases}$$

$$\delta_3: \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[t^2 - \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}] + t^4\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}} \times \\ \times (\sqrt{t^2 - a^2} - \sqrt{t^2 - b^2}), \quad t \in [t_0, -a], \end{cases}$$

$$\delta_4: \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2 t) + \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} + t^2] + t^4\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}} \times \\ \quad \times (\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{b^2 - t^2}), \quad t \in (0; b], \end{cases}$$

$$\delta_5: \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2 t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{\varepsilon^2[t^2 - \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}] + t^4\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}} \times \\ \quad \times (\sqrt{t^2 - b^2} - \sqrt{t^2 - a^2}), \quad t \in [a, +\infty). \end{cases}$$

Здесь через t_0 обозначено выражение

$$t_0 = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[4 + \varepsilon^4(a + b)^2 + \sqrt{16 + 8(a^2 + b^2 - 6ab)\varepsilon^4 + (a + b)^4\varepsilon^8}].$$

3. ВТОРАЯ СИСТЕМА

По-прежнему предполагаем, что $\lambda = 0$. Рассмотрим функциональное равенство, которое выполняется тождественно в точках фазового пространства $\mathcal{P}^6$:

$$[2 + \varepsilon^4(\alpha^2 + \beta^2) + \varepsilon^2 H]^2 - 4\varepsilon^4 K = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\varepsilon[(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\varepsilon^3 + (\alpha_2M_1 + \beta_2M_2 + \beta_3M_3)\varepsilon^2 - (M_1M_3 + \alpha_3)\varepsilon - M_2], \\ Q_2 &= 2\varepsilon[(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\varepsilon^3 + (\alpha_1M_1 + \beta_1M_2 + \alpha_3M_3)\varepsilon^2 + (M_2M_3 + \beta_3)\varepsilon - M_1], \\ Q_3 &= 2[(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\varepsilon^4 + \varepsilon^3(\beta_1 - \alpha_2)M_3 + (M_3^2 - \alpha_1 - \beta_2)\varepsilon^2 + 1]. \end{aligned}$$

Выберем постоянные первых интегралов, удовлетворяющих соотношению

$$k = \frac{1}{4\varepsilon^4}[2 + \varepsilon^4(a^2 + b^2) + \varepsilon^2 h]^2.$$

Тогда соотношение (3.1) приводит к системе уравнений

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

которая равносильна одной из двух систем:

$$Q_1 = 0, \quad Q_3 = 0 \quad (3.3)$$

либо

$$Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0. \quad (3.4)$$

Ограничимся выбором параметра деформации $\varepsilon > \max\{1/\sqrt{b}, \sqrt{2/(a-b)}\}$. В этом случае системам (3.2)–(3.4) удовлетворяют положения равновесия c_{1-8} и c_{13-16} . Исключим из рассмотрения указанные положения равновесия. Тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Система (3.3) определяет инвариантное четырехмерное подмногообразие $\mathcal{M}_2$ фазового пространства $\mathcal{P}^6$ уравнений (1.1) с гамильтонианом (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \{H, Q_1\} = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_3, \\ \dot{Q}_3 &= \{H, Q_3\} = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{2}{\varepsilon(\alpha_2\varepsilon - M_3)}[\alpha_1(\alpha_2 - \beta_1)\varepsilon^3 - \varepsilon^2 M_3\alpha_1 + \varepsilon(\beta_1 - \alpha_2) + M_3], \\ a_{12} &= \frac{2}{\alpha_2\varepsilon - M_3}[\varepsilon^2\alpha_3\beta_1 + \varepsilon(\beta_1 - \alpha_2)M_2 + M_2M_3], \\ a_{21} &= -\frac{2}{\alpha_2\varepsilon - M_3}[(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_3)\varepsilon^2 - \varepsilon\alpha_3M_3 + \beta_3], \\ a_{22} &= -\frac{2\varepsilon\beta_3(M_2 + \varepsilon\alpha_3)}{\alpha_2\varepsilon - M_3}.\end{aligned}$$

В силу (3.3) имеем $\dot{Q}_1 = 0$, $\dot{Q}_3 = 0$. ■

В точках подмногообразия $\mathcal{M}_2$ фазового пространства $\mathcal{P}^6$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\varepsilon^2[\varepsilon^4(G + 2\varepsilon^2\alpha^2\beta^2) - H] - 2 &= \varepsilon^4F_1^2, \\ \dot{F}_1 &= \{H, F_1\} = 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где выражение для F_1 определено формулой

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{\sqrt{(\beta_2\varepsilon^2 - 1)^2 + \varepsilon^2(M_3 - \varepsilon\alpha_2)^2} \cdot A}{(\varepsilon^2\beta_2 - 1)(\alpha_2\varepsilon - M_3)(\alpha_1 - \beta_2)\varepsilon^2}, \\ A &= (\alpha_2^2\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_2^2\alpha_2 - \alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2 + \alpha_3\beta_3^2\alpha_2 + \beta_3\beta_2\alpha_1^2)\varepsilon^5 + \\ &+ (-2\alpha_2M_3\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_3\alpha_2M_1 - \alpha_3\beta_3^2M_3 + \alpha_3M_3\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_2^2M_3 - \\ &- \beta_2^2\alpha_1M_1 - \alpha_2^2\alpha_1M_1)\varepsilon^4 + (\alpha_3\beta_3M_3M_1 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1 + M_3^2\alpha_1\beta_3 - \beta_3\alpha_1^2 + \\ &+ 2\alpha_2M_3\alpha_1M_1 - \alpha_1\beta_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\alpha_2)\varepsilon^3 + (-\alpha_3M_3\alpha_1 - M_3^2\alpha_1M_1 + \alpha_3\beta_2M_3 + \\ &+ \beta_2^2M_1 + \alpha_1\beta_2M_1)\varepsilon^2 + \alpha_1\varepsilon\beta_3 - \beta_2M_1.\end{aligned}$$

Заметим, что $a_{11} + a_{22} \neq 0$, поэтому скобка $\{Q_1, Q_3\}$ не является интегралом. В качестве второго дополнительного интеграла можно взять функцию G из (2.1) или, в силу (3.5), функцию F_1 . На рис. 2 изображены бифуркационная диаграмма Σ_2 отображения момента $\mathcal{F}_2 = H \times G$ и бифуркации торov Лиувилля.

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма Σ_2 отображения момента $\mathcal{F}_2 = H \times G$.

Параметризация бифуркационной диаграммы Σ_2 описывается следующими кривыми:

$$\begin{aligned} h &= \frac{g}{b^2} + \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 b^2} \right) (a^2 - b^2), \quad g \geq -\varepsilon^2 b^2 (a^2 + b^2) - \frac{2a^2}{\varepsilon^2}, \\ g &= \frac{h}{\varepsilon^4} + \frac{2}{\varepsilon^6} - 2\varepsilon^2 a^2 b^2, \quad h \geq -\frac{1}{\varepsilon^2} [\varepsilon^4 (a^2 + b^2) + 2], \\ \Sigma_2: \quad h &= \frac{g}{a^2} - \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2} \right) (a^2 - b^2), \quad g \geq -\frac{1}{\varepsilon^2} (a^2 + b^2 + 2\varepsilon^4 a^2 b^2), \\ \begin{cases} h = 2t - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2 a^2 b^2}{t^2}, \\ g = -\varepsilon^2 a^2 b^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2a^2 b^2}{t}, \end{cases} & t \in [-\varepsilon^2 ab, -b] \cup [b, \varepsilon^2 ab]. \end{aligned}$$

4. ТРЕТЬЯ И ЧЕТВЕРТАЯ СИСТЕМЫ

Заметим, что первые две подсистемы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ удовлетворяют соотношениям

$$L_i(K, H, G) = 0, \quad dL_i(K, H, G) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

если положить $L_1 = K$ и $L_2 = [2 + \varepsilon^4(\alpha^2 + \beta^2) + \varepsilon^2 H]^2 - 4\varepsilon^4 K$ соответственно. Поэтому последние две подсистемы $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$ определим уравнениями

$$L_i(K, H, G) = 0, \quad dL_i(K, H, G) = 0, \quad i = 3, 4. \quad (4.2)$$

Систему $\mathcal{M}_3$ определим выбором функции

$$L_3 = [(a^2 + b^2)H - 2G - \varepsilon^2(a^2 - b^2)^2]^2 - 4(a^2 - b^2)^2 K,$$

а функцию L_4 для $\mathcal{M}_4$ можно явно записать, исключив из системы

$$\Phi(t) = 0, \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

параметр t и подставив в полученное выражение вместо постоянных первых интегралов h, k, g функции H, K и G . Здесь через $\Phi(t)$ обозначен многочлен

$$\Phi(t) = t^4 - ht^3 + \left(\frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon^4(a^2 - b^2)^2] + a^2 + b^2 - k - \varepsilon^2 g \right) t - gt + a^2 b^2.$$

Параметр t в результате исключения из системы (4.3) как функция $t = t(H, K, G)$ на самом деле является частным интегралом для системы $\mathcal{M}_4$.

Отметим, что уравнению $L_4(h, k, g) = 0$ принадлежат две прямые

$$g = abh, \quad k = \frac{1}{4}(a - b)^2[\varepsilon^4(a + b)^2 + 2\varepsilon^2 h + 4]$$

и

$$g = -abh, \quad k = \frac{1}{4}(a + b)^2[\varepsilon^4(a - b)^2 + 2\varepsilon^2 h + 4].$$

Систему (4.3) (поверхность кратных корней многочлена $\Phi(t)$) можно записать в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} k &= 3t^2 - 2th + a^2 + b^2 + \frac{1}{4}h^2 - \frac{a^2 b^2}{t^2} + \\ &+ \left[2t^3 - ht^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h - \frac{2a^2 b^2}{t} \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)^4 \varepsilon^4, \\ g &= -2t^3 + ht^2 + \frac{2a^2 b^2}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus 0. \end{aligned}$$

Если в приводимых выше формулах положить параметр деформации ε равным нулю, то получим формулы для аналогов систем $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$ в задаче обобщения волчка Ковалевской на случай двойного поля [8], [15], [16].

При $\varepsilon > \max\{1/\sqrt{b}, \sqrt{2/(a-b)}\}$ бифуркационные диаграммы Σ_3, Σ_4 отображений моментов $\mathcal{F}_3 = G \times H$ и $\mathcal{F}_4 = T \times H$ для систем $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$ изображены на рис. 3 и рис. 4 соответственно. На этих же рисунках указаны и бифуркации торов Лиувилля. В основе анализа бифуркаций торов Лиувилля лежат аналитические работы [17]–[21]. Закрашенным областям соответствуют устойчивые двухчастотные периодические решения, или, в другой терминологии, невырожденные особенности ранга 2 эллиптического типа полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$, а остальным частям рисунка – двухчастотные периодические решения (двумерные торы) гиперболического типа. На рис. 4 бифуркации двух торов в два тора соответствует атом C_2 . Построения проведены для следующих значений параметров: $a = 1, b = 2/5, \varepsilon = 3$.

Рис. 5. Атлас бифуркационных диаграмм полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ и его фрагмент.

где через t_k обозначены выражения

$$t_{0,1} = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[\varepsilon^4(a+b)^2 + 4 \pm \sqrt{16 + \varepsilon^8(a+b)^4 + 8(a^2 + b^2 - 6ab)\varepsilon^4}],$$

$$t_{2,3} = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[\varepsilon^4(a-b)^2 + 4 \mp \sqrt{16 + \varepsilon^8(a-b)^4 + 8(a^2 + b^2 + 6ab)\varepsilon^4}].$$

Закрашенная область на рис. 4 ограничена кривыми

$$t = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad h \geq h_{\min} = -\frac{\varepsilon^4(a^2 + b^2) + 2}{\varepsilon^2},$$

$$h = \begin{cases} 2t + \frac{a^2 + b^2}{t}, & t \in \left[-\varepsilon^2 b^2, -\frac{1}{\varepsilon^2}\right] \cup (0, +\infty), \\ 3t + \frac{a^2 b^2}{t^3}, & t \in \left[-\sqrt[3]{\varepsilon^2 a^2 b^2}, t_4\right] \cup (0, t_5], \end{cases}$$

где $t_{4,5}$ – единственные корни уравнений

$$t^3(a^2 + b^2 - 2t^2)\varepsilon^2 - t^4 + a^2 b^2 = 2t^2(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \quad t \in [-b, 0),$$

$$t^4 - t^3(a^2 + b^2 - 2t^2)\varepsilon^2 - a^2 b^2 = 2t^2(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \quad t \in [a, +\infty).$$

5. АТЛАС БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ И ПРИМЕР СЕТЕВОЙ ДИАГРАММЫ

В этом разделе приведем атлас бифуркационных диаграмм полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ и его фрагмент. Под атласом мы понимаем набор разделяющих кривых на плоскости параметров. На рис. 5 по оси абсцисс отложен уровень энергии h , по оси ординат – отношение b/a . Атлас построен для значений параметров $a = 1$, $\varepsilon = 2$. Все кривые, которые формируют атлас, аналитически определяются по бифуркационным диаграммам Σ_k , $k = 1, \dots, 4$.

Для построения бифуркационной диаграммы Σ_{h_0} множества Σ полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ на уровне $h = h_0$ необходимо зафиксировать значения

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} для значений параметров $a = 1$, $b = 2/5$, $\varepsilon = 3$, $h_0 = -0.25$.

параметров a , ε . Тем самым определяется сечение атласа с камерами. Для определенной камеры выбираем значения параметров b и h_0 (сечение изоэнергетической поверхности). На бифуркационных диаграммах Σ_k , $k = 1, \dots, 4$ (рис. 1–4) это сечение отмечено пунктирной линией. На указанных диаграммах для выбранного сечения h_0 аналитически вычисляются границы, по которым и строится бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} .

На рис. 6 бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} построена для следующих значений параметров: $a = 1$, $b = 2/5$, $\varepsilon = 3$, $h_0 = -0.25$. На стенках камер указаны как количество компонент (двумерных торов), так и соответствующие бифуркации в системе с тремя степенями свободы. Для промежутка (f, q) , который отвечает системе $\mathcal{M}_1$, количество двумерных торов необходимо удвоить. Пример сетевой диаграммы для выбранного изоэнергетического сечения (аналога многомерной сети Фоменко [14], [22]) указан на рис. 7. Такой сетевой диаграммы нет среди сетевых диаграмм в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле, полный список которых представлен в работе [23], поэтому никакими заменами переменных рассматриваемую систему нельзя преобразовать в известные.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен возможный подход к описанию фазовой топологии новой интегрируемой системы с тремя степенями свободы, использующий метод критических подсистем. Понятие критической подсистемы сформировалось в работах Харламова [24], [8], [9] в задаче исследования фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы. Результаты, представленные в настоящей работе, получены на основе результатов и методов, изложенных в публикациях [8]–[10], [15]–[21], [23]. Отметим, что в новой системе обнаружена перестройка pitch-fork (вырожденная особенность ранга 2), как ориентируемая (неустойчивая к малым возмущениям), так и неориентируемая (наоборот, устойчивая). На рис. 6 перестройке типа pitch-fork отвечают точки q и e . Для систем с двумя степенями свободы модельные перестройки такого типа описаны в книге [25] (т. 1, пример 2, с. 24).

Рис. 7. Сетевая диаграмма.

Другое наблюдение связано с круговыми молекулами на изоэнергетических уровнях. Например, особым точкам d , l , $c(m)$, b на рис. 6, в прообразе которых имеются одна или две компоненты, соответствуют невырожденные особенности ранга 1 типа седло–седло. Им отвечают круговые молекулы особенностей ранга 0 того же типа после умножения на топологическую окружность [13]. Можно надеяться на получение классификационных теорем о строении круговых молекул невырожденных особенностей ранга 1 типа седло–седло с одной или двумя компонентами на слое на изоэнергетическом уровне в системах с тремя степенями свободы.

Исследования фазовой топологии были проведены и для квадратичного гамильтониана, интегрируемость которого доказана в работе [1]. В частности, система M_4 распадается на три подсистемы, и, таким образом, в системе с тремя степенями свободы с квадратичным гамильтонианом выделяются уже шесть подсистем. Аналитические результаты таких исследований будут опубликованы в отдельной работе.

К сожалению, на сегодняшний день так и не удалось получить разделения переменных ни в одной из систем M_k , $k = 1, \dots, 4$. В первую очередь это связано с необходимостью представления систем (4.1) и (4.2) в удобном для этого виде. В задаче о движении волчка Ковалевской в двух однородных полях для аналогов систем M_3 и M_4 найдено алгебраическое разделение переменных и исследована фазовая топология [15], [18]–[20]. Опираясь, прежде всего, на работы М. П. Харламова, мы надеемся и в нашем случае на возможность явного алгебраического разделения переменных в системах M_3 и M_4 .

Работа носит далеко не законченный характер, тем не менее ясна вся картина бифуркаций двумерных и трехмерных торов как внутри подсистем, так и во всей системе. Мы предполагаем написать компьютерную программу с использованием среды Mathematica, которая бы детально моделировала атлас бифуркационных

диаграмм, а также бифуркационные диаграммы как самих подсистем, так и всей системы в целом.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору М. П. Харламову за стимулирование и обсуждение результатов, за настойчивое требование понимания топологических эффектов, которые обнаружены в новой системе. Автор также благодарен профессору В. В. Соколову, чьи работы дали новый импульс к исследованию фазовой топологии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-97025).

Список литературы

- [1] В. В. Соколов, А. В. Цыганов, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 118–125.
- [2] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Lett. Math. Phys.*, **14**:1 (1987), 55–61.
- [3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем. Бигамильтоново описание, представление Лакса, разделение переменных*, ИКИ, М., Ижевск, 2003.
- [4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, ИКИ, М., Ижевск, 2005.
- [5] V. V. Sokolov, “A generalized Kowalewski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ ”, *The Kowalevski Property* (Leeds, 2000), CRM Proceedings and Lecture Notes, **32**, ed. V. B. Kuznetsov, AMS, Providence, RI, 2002, 307–315, arXiv: nlin/0110022.
- [6] П. Е. Рябов, *МТТ*, **37** (2007), 97–111.
- [7] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **122**:2 (1989), 321–354.
- [8] М. П. Харламов, *МТТ*, **34** (2004), 47–58.
- [9] М. П. Харламов, *Нелинейная динам.*, **3**:3 (2007), 331–348.
- [10] М. Р. Kharlamov, *Hiroshima Math. J.*, **39**:3 (2009), 327–350.
- [11] О. И. Богоявленский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 883–938.
- [12] D. B. Zotev, *Regul. Chaotic Dyn.*, **5**:4 (2000), 437–457.
- [13] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”, *Topological Classification of Integrable Systems*, Advances in Soviet Mathematics, **6**, ed. A. T. Fomenko, AMS, Providence, RI, 1991, 147–183.
- [14] A. T. Fomenko, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological Classification of Integrable Systems*, v. 6, Advances in Soviet Mathematics, ed. A. T. Fomenko, AMS, Providence, RI, 1991, 1–35.
- [15] М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин, *Укр. матем. вестн.*, **1**:4 (2004), 564–582.
- [16] М. Р. Kharlamov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:4 (2005), 381–398.
- [17] М. П. Харламов, *МТТ*, **36** (2006), 13–22.
- [18] М. Р. Kharlamov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**:3 (2007), 267–280, arXiv: 0803.1024.
- [19] М. Р. Kharlamov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:6 (2009), 621–634.
- [20] М. П. Харламов, *Нелинейная динам.*, **7**:1 (2011), 25–51.
- [21] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 111–142.
- [22] А. Т. Фоменко, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 747–779.
- [23] М. П. Харламов, П. Е. Рябов, *Докл. РАН*, **447**:5 (2012), 499–502.
- [24] М. П. Харламов, *МТТ*, **32** (2002), 32–38.
- [25] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999.