Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Гаврилов, В. Н. Мельников, Интегрирование D -мерных космологических моделей с двумя фактор-пространствами сведением к обобщенному уравнению Эмдена–Фаулера, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 3, 454–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 08:35:02

© 1998 г.

В. Р. Гаврилов*, В. Н. Мельников*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ D -МЕРНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДВУМЯ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВАМИ СВЕДЕНИЕМ К ОБОБЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ЭМДЕНА–ФАУЛЛЕРА

Изучена D -мерная космологическая модель на многообразии $M = R \times M_1 \times \dots \times M_n$, описывающая эволюцию эйнштейновских фактор-пространств M_i для источника, представленного многокомпонентной идеальной жидкостью. Предполагается, что плотность массы-энергии и давления каждой компоненты в любом из фактор-пространств связаны баротропным уравнением состояния. Когда сумма числа фактор-пространств с ненулевым тензором Риччи и числа компонент идеальной жидкости равна 2, уравнения Эйнштейна модели с двумя фактор-пространствами ($n = 2$) сведены к обобщенному (обыкновенному дифференциальному 2-го порядка) уравнению Эмдена–Фаулера, недавно исследованному Зайцевым и Поляниным в рамках дискретно-группового анализа. Известные интегрируемые семейства этого уравнения позволяют генерировать соответствующие интегрируемые космологические модели, их метрика выписана в явном виде. Описанный метод генерирования точных решений в многомерной космологии применен к специальной модели с риччи-плоскими пространствами M_1 , M_2 и 2-компонентной идеальной жидкостью в качестве источника.

1. ВВЕДЕНИЕ

В рамках исследования ранней стадии эволюции Вселенной мы развиваем многомерное обобщение [1–14] стандартной космологической модели Фридмана–Робертсона–Уокера. Если дополнительные размерности физического пространства-времени действительно существуют, то возможна только одна область физической реальности, где они могли бы быть динамически существенны. Это ранняя стадия эволюции Вселенной. Обычно в многомерной космологии [1–30] предполагается, что квантовые процессы в начале этой стадии приводят к топологическому разделению многомерного пространства-времени на внешнее 3-мерное пространство и дополнительные (одно или несколько) так называемые внутренние пространства. В соответствии с указанным разделением

*Центр гравитации и фундаментальной метрологии, ВНИИМС, Москва, Россия. E-mail: melnikov@rgs.phys.msu.su

пространство-время M приобретает топологию $R \times M_1 \times \dots \times M_n$, где R есть ось времени, одна часть многообразий $M_1, \dots, M_n$ интерпретируется как внешнее 3-мерное пространство, а другая часть представляет собой внутренние пространства. Обычно внутренние пространства предполагаются компактными, однако рассматриваются также и модели некомпактных пространств [11, 31–33]. Последующая эволюция многомерной Вселенной предполагается классической, допускающей описание в терминах многомерных уравнений Эйнштейна. Интегрирование этих уравнений является главной целью данного исследования. Наблюдаемая 4-мерность современного мира достигается в многомерной космологии за счет сжатия внутренних пространств до чрезвычайно малых размеров, которые недостижимы экспериментально. Указанное сжатие, сопровождаемое расширением внешнего пространства, описывается некоторыми из моделей этого типа (первая из них была получена в работе [18]) и в контексте многомерной космологии называется динамической компактификацией.

В качестве источника гравитационного поля в многомерных уравнениях Эйнштейна мы рассматриваем смесь нескольких идеальных жидкостей. Подобные многокомпонентные системы обычно используются в 4-мерной космологии и во многих случаях представляют собой подходящий тип материи для описания ранних эпох эволюции Вселенной [34].

Данная работа построена следующим образом. В разделе 2 описана многомерная космологическая модель общего вида и получены уравнения Эйнштейна в форме уравнений Лагранжа–Эйлера, вытекающих из некоторого лагранжиана. Здесь же для интегрирования уравнений движения развит n -мерный векторный формализм. В конце раздела 2 мы приводим обзор всех известных интегрируемых моделей этого типа. В разделе 3 предложен метод получения нового класса интегрируемых моделей на многообразии $M = R \times M_1 \times M_2$. Метод основан на сведении уравнений Эйнштейна к обобщенному уравнению Эмдена–Фаулера (обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка). Метод применим для произвольной 2-компонентной модели на многообразии $M = R \times M_1 \times M_2$, за исключением случаев, когда интегрирование достигается более простым методом. Полное число компонент модели вычисляется суммированием числа фактор-пространств с ненулевым тензором Риччи и числа компонент идеальной жидкости. Интегрируемые семейства обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера, недавно полученные Зайцевым и Поляниным, позволяют строить новые интегрируемые космологические модели. Их метрики явно выписаны. В разделе 3 метод использован для интегрирования моделей с риччи-плоскими пространствами M_1, M_2 и 2-компонентной идеальной жидкостью.

2. МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В рамках космологической модели с n фактор-пространствами D -мерное пространственно-временное многообразие M раскладывается на прямое произведение оси времени R и n многообразий $M_1, \dots, M_n$, т.е.

$$M = R \times M_1 \times \dots \times M_n. \quad (2.1)$$

Произведение одной части этих многообразий образует внешнее 3-мерное пространство, а оставшаяся часть представляет собой так называемые внутренние пространства, которые предполагаются компактными. Далее в целях общности рассмотрения предполагается, что размерности $N_i = \dim M_i$ для $i = 1, \dots, n$ являются произвольными.

На многообразии M определена метрика

$$g = -e^{2\gamma(t)} dt \otimes dt + \sum_{i=1}^n \exp[2x^i(t)] g^{(i)}, \quad (2.2)$$

где $\gamma(t)$ – произвольная функция, определяющая калибровку времени t , и $g^{(i)}$ – метрика на многообразии M_i . Предполагается, что многообразия $M_1, \dots, M_n$ являются пространствами Эйнштейна, т.е.

$$R_{k_i l_i} [g^{(i)}] = \lambda_i g_{k_i l_i}^{(i)}, \quad k_i, l_i = 1, \dots, N_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

где λ_i – постоянная. В частном случае, когда M_i является пространством постоянной римановой кривизны K_i , постоянная λ_i имеет вид $\lambda_i = K_i(N_i - 1)$ (здесь $N_i > 1$).

Используя предположения (2.3), можно найти (см. [10]) следующие ненулевые компоненты тензора Риччи для метрики (2.2):

$$R_0^0 = e^{-2\gamma} \left(\sum_{i=1}^n N_i (\dot{x}^i)^2 + \ddot{\gamma}_0 - \dot{\gamma} \dot{\gamma}_0 \right), \quad (2.4)$$

$$R_{n_i}^{m_i} = \left\{ \lambda_i \exp[-2x^i] + [\ddot{x}^i + \dot{x}^i (\dot{\gamma}_0 - \dot{\gamma})] e^{-2\gamma} \right\} \delta_{n_i}^{m_i}, \quad (2.5)$$

где

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^n N_i x^i. \quad (2.6)$$

Индексы m_i и n_i в (2.4), (2.5) для $i = 1, \dots, n$ пробегает все значения от $(D - \sum_{j=i}^n N_j)$ до $(D - \sum_{j=i}^n N_j + N_i)$, при этом $D = 1 + \sum_{i=1}^n N_i = \dim M$.

В качестве источника гравитационного поля мы рассматриваем многокомпонентную идеальную жидкость. Тензор энергии-импульса этого источника в системе отсчета, сопутствующей наблюдателю, имеет вид

$$T_N^M = \sum_{\mu=1}^{\overline{m}} T_N^{M(\mu)}, \quad (2.7)$$

$$(T_N^{M(\mu)}) = \text{diag}(-\rho^{(\mu)}(t), p_1^{(\mu)}(t) \delta_{l_1}^{k_1}, \dots, p_n^{(\mu)}(t) \delta_{l_n}^{k_n}). \quad (2.8)$$

Далее предполагается, что для любой μ -й компоненты идеальной жидкости справедливо баротропное уравнение состояния

$$p_i^{(\mu)}(t) = (1 - h_i^{(\mu)}) \rho^{(\mu)}(t), \quad \mu = 1, \dots, \overline{m}, \quad (2.9)$$

где $h_i^{(\mu)} = \text{const}$. Заметим, что каждая μ -я компонента может иметь различные баротропные уравнения состояния в пространствах $M_1, \dots, M_n$. С физической точки зрения это вытекает из выделенности внутренних пространств по отношению к внешнему пространству и по отношению друг к другу.

Нетрудно показать, что уравнение движения $\nabla_M T_0^{M(\mu)} = 0$ для μ -й компоненты идеальной жидкости с тензором энергии-импульса (2.8) имеет вид

$$\dot{\rho}^{(\mu)} + \sum_{i=1}^n N_i \dot{x}^i (\rho^{(\mu)} + p_i^{(\mu)}) = 0. \quad (2.10)$$

Используя уравнения состояния (2.9), мы получаем из (2.10) следующие интегралы движения:

$$A^{(\mu)} = \rho^{(\mu)} \exp \left[2\gamma_0 - \sum_{i=1}^n N_i h_i^{(\mu)} x^i \right] = \text{const}. \quad (2.11)$$

Уравнения Эйнштейна $R_N^M - R\delta_N^M/2 = \kappa^2 T_N^M$ (κ^2 – гравитационная постоянная) могут быть записаны как $R_N^M = \kappa^2 [T_N^M - T\delta_N^M/(D-2)]$. Далее использованы уравнения $R_0^0 - R/2 = \kappa^2 T_0^0$ и $R_{n_i}^{m_i} = \kappa^2 [T_{n_i}^{m_i} - T\delta_{n_i}^{m_i}/(D-2)]$. Применяя формулы (2.4)–(2.9), мы получаем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + V = 0, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \lambda^i e^{-2x^i} + [\ddot{x}^i + \dot{x}^i(\dot{\gamma}_0 - \dot{\gamma})] e^{-2\gamma} = \\ = -\kappa^2 \sum_{\mu=1}^{\overline{m}} A^{(\mu)} \left(h_i^{(\mu)} - \frac{\sum_{k=1}^n N_k h_k^{(\mu)}}{D-2} \right) \exp \left[\sum_{i=1}^n N_i h_i^{(\mu)} x^i - 2\gamma_0 \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь

$$G_{ij} = N_i \delta_{ij} - N_i N_j \quad (2.14)$$

являются компонентами минисуперпространственной метрики,

$$V = e^{2\gamma} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda^i N_i e^{-2x^i} + \kappa^2 \sum_{\mu=1}^{\overline{m}} A^{(\mu)} \exp \left[\sum_{i=1}^n N_i h_i^{(\mu)} x^i - 2\gamma_0 \right] \right). \quad (2.15)$$

Плотности массы-энергии $\rho^{(\mu)}$ в (2.12), (2.13) исключены с помощью (2.11).

Нетрудно убедиться, что после фиксации калибровки времени $\gamma = F(x^1, \dots, x^n)$ уравнения движения (2.13) можно рассматривать как уравнения Лагранжа–Эйлера, полученные из лагранжиана

$$L = e^{\gamma_0 - \gamma} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V \right) \quad (2.16)$$

при условии нулевой энергии (2.12).

Введем в рассмотрение n -мерное вещественное векторное пространство R^n . Обозначим через $e_1, \dots, e_n$ канонический базис в R^n ($e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ и т.д.). Далее используются следующие векторы:

а) вектор, который требуется найти,

$$x = x^1(t)e_1 + \dots + x^n(t)e_n; \quad (2.17)$$

б) вектор, соответствующий пространству M_k с ненулевым тензором Риччи, называемый далее вектором, индуцированным кривизной пространства M_k ,

$$v_k = -\frac{2}{N_k}e_k = \sum_{i=1}^n \frac{-2}{N_k} \delta_k^i e_i; \quad (2.18)$$

в) вектор, индуцированный μ -й компонентой идеальной жидкости,

$$u_\mu = \sum_{i=1}^n \left(h_i^{(\mu)} - \frac{\sum_{k=1}^n N_k h_k^{(\mu)}}{D-2} \right) e_i. \quad (2.19)$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – симметричная билинейная форма на R^n такая, что

$$\langle e_i, e_j \rangle = G_{ij}. \quad (2.20)$$

Форма является невырожденной, обратная матрица к (G_{ij}) имеет компоненты

$$G^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{N_i} + \frac{1}{2-D}. \quad (2.21)$$

Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ наделяет пространство R^n метрикой с сигнатурой $(-, +, \dots, +)$ [8, 9]. Обычным образом можно ввести ковариантные компоненты векторов. Для векторов v_k, u_μ получаем

$$v_{(k)}^i = -2 \frac{\delta_k^i}{N_k}, \quad v_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n G_{ij} v_{(k)}^j = 2(N_i - \delta_i^k), \quad (2.22)$$

$$u_{(\mu)}^i = h_i^{(\mu)} - \frac{\sum_{k=1}^n N_k h_k^{(\mu)}}{D-2}, \quad u_i^{(\mu)} = \sum_{j=1}^n G_{ij} u_{(\mu)}^j = N_i h_i^{(\mu)}. \quad (2.23)$$

Значения $\langle v_k, v_i \rangle$, $\langle v_k, u_\mu \rangle$ и $\langle u_\mu, u_\nu \rangle$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

	v_j	u_ν
v_i	$4 \left(\frac{\delta_{ij}}{N_i} - 1 \right)$	$-2h_i^{(\nu)}$
u_μ	$-2h_j^{(\mu)}$	$\sum_{i=1}^n h_i^{(\mu)} h_i^{(\nu)} N_i + \frac{1}{2-D} \left[\sum_{i=1}^n h_i^{(\mu)} N_i \right] \left[\sum_{j=1}^n h_j^{(\nu)} N_j \right]$

Вектор $y \in R^n$ называется времениподобным, пространственноподобным или изотропным, если $\langle y, y \rangle$ имеет отрицательное, положительное или нулевое значения, соответственно. Векторы y и z называются ортогональными, если $\langle y, z \rangle = 0$. Заметим, что индуцированный кривизной вектор v_i всегда является времениподобным, в то время как индуцированный идеальной жидкостью вектор u_μ допускает произвольное значение $\langle u_\mu, u_\mu \rangle$ (см. табл. 1).

Используя определение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и векторы (2.17)–(2.19), условие нулевой энергии (2.12) и лагранжиан (2.16) мы можем записать в виде

$$E = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + V = 0, \quad (2.24)$$

$$L = e^{\gamma_0 - \gamma} \left(\frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - V \right), \quad (2.25)$$

где

$$V = e^{2(\gamma - \gamma_0)} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda^i N_i e^{\langle v_i, x \rangle} + \kappa^2 \sum_{\mu=1}^{\overline{m}} A^{(\mu)} e^{\langle u_\mu, x \rangle} \right]. \quad (2.26)$$

Из (2.26) видно, что пространство M_i с отличным от нуля тензором Риччи и μ -я компонента идеальной жидкости индуцируют в потенциале сходные слагаемые. Это обстоятельство позволяет использовать название “компонента” также для слагаемого, индуцированного кривизной многообразия M_i . Всюду далее мы используем понятие компоненты в указанном обобщенном смысле.

Далее мы используем так называемую гармоническую калибровку времени

$$\gamma(t) = \gamma_0 = \sum_{i=1}^n N_i x^i. \quad (2.27)$$

С математической точки зрения проблема заключается в интегрировании системы с $n \geq 2$ степенями свободы, описываемой лагранжианом вида

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \sum_{\mu=1}^m a^{(\mu)} e^{\langle b_\mu, x \rangle}, \quad (2.28)$$

где $x, b_\mu \in R^n$. В (2.28) m обозначает полное число компонент, включая кривизны и компоненты идеальной жидкости. Заметим, что кинетическое слагаемое $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$ не является положительно-определенной квадратичной формой, как это обычно имеет место в классической механике. Учитывая псевдоевклидову сигнатуру $(-, +, \dots, +)$ формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, такие системы можно назвать псевдоевклидовыми системами типа цепочек Тоды, поскольку потенциал, подобный потенциалу в (2.28), определяет хорошо известные в классической механике цепочки Тоды [28]. В [1, 10, 11] найдены следующие интегрируемые классы псевдоевклидовых систем типа цепочек Тоды:

1) $m = 0$, этот класс соответствует вакуумной многомерной космологической модели на многообразии $M = R \times M_1 \times \dots \times M_n$ в случае, когда все пространства M_i являются

риччи-плоскими. Соответствующая метрика [10] – многомерное обобщение известной метрики Казнера;

2) $m = 1$, вектор b_1 произвольный. Метрика соответствующих 1-компонентных моделей была получена в [11]. Этот интегрируемый класс может быть расширен путем добавления новых компонент, индуцирующих векторы, коллинеарные вектору b_1 ;

3) $m \geq 2$, $n = 2$, $b_\mu = b + C_\mu b_0$, где b – произвольный вектор, b_0 – произвольный изотропный вектор, $C_\mu = \text{const}$. Этот класс моделей проинтегрирован в [11] при условии нулевой энергии;

4) $m \geq 2$, векторы $b_1, \dots, b_m$ линейно независимы и удовлетворяют условиям $\langle b_\mu, b_\nu \rangle = 0$ для $\mu \neq \nu$. Этот интегрируемый класс может быть расширен добавлением новых компонент, индуцирующих векторы, коллинеарные одному из векторов ортогонального набора $b_1, \dots, b_m$. Соответствующие космологические модели изучены в [1];

5) $m \geq 2$, векторы $b_1, \dots, b_m$ являются пространственноподобными и могут быть интерпретированы как набор допустимых корней [35] простой алгебры Ли G . В этом случае псевдоевклидова система типа цепочки Тоды сводится тривиальным образом к цепочке Тоды, ассоциированной с алгеброй Ли G [28]. Для $G = A_2 \equiv \text{sl}(3, C)$ метрика соответствующей космологической модели явно записана в [1].

В данной работе рассматриваются только 2-компонентные ($m = 2$) псевдоевклидовы системы типа цепочек Тоды с двумя степенями свободы ($n = 2$) при условии нулевой энергии. Соответствующая космологическая модель содержит два фактор-пространства, т.е.

$$M = R \times M_1 \times M_2, \quad (2.29)$$

и допускает следующие комбинации компонент: кривизна M_1 и кривизна M_2 (вакуумная модель); кривизна M_1 или M_2 и 1-компонентная идеальная жидкость; 2-компонентная идеальная жидкость в риччи-плоских пространствах M_1 и M_2 . В нашей предыдущей работе [3] была проинтегрирована вакуумная модель вида (2.29) с двумя кривизнами для размерностей $(\dim M_1, \dim M_2) = (6, 3), (8, 2), (5, 5)$. В данной работе мы развиваем более общую процедуру интегрирования, справедливую для любой комбинации двух компонент.

3. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА К ОБОБЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

Рассмотрим уравнения движения, вытекающие из лагранжиана (2.28) для $n = m = 2$ при условии нулевой энергии. Если векторы b_1, b_2 удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) b_1 и b_2 линейно зависимы;
- 2) $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, т.е. векторы b_1 и b_2 взаимно ортогональны;
- 3) $\langle b_1 - b_2, b_1 - b_2 \rangle = 0$, т.е. вектор $b_1 - b_2$ является изотропным,

то уравнения движения легко интегрируются. Соответствующие точные решения получены в [1, 11]. В данной работе развивается процедура интегрирования только для

прочих случаев. Таким образом, далее предполагается, что векторы b_1 и b_2 не удовлетворяют какому-либо из условий 1–3.

Введем в R^2 ортогональный базис, образованный следующими двумя векторами:

$$f_1 = (u_{22} - u_{12})b_1 + (u_{11} - u_{12})b_2, \quad f_2 = b_2 - b_1, \quad (3.1)$$

где обозначено

$$u_{\mu\nu} = \langle b_\mu, b_\nu \rangle, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (3.2)$$

В соответствии со сделанными предположениями f_2 не является изотропным вектором, т. е.

$$\langle f_2, f_2 \rangle = u_{11} + u_{22} - 2u_{12} \neq 0. \quad (3.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что $u_{12}^2 - u_{11}u_{22} \geq 0$ для произвольных векторов $b_1, b_2 \in R^2$, причем $u_{12}^2 - u_{11}u_{22} = 0$, если и только если b_1 и b_2 линейно зависимы. Значит, в рассматриваемом случае

$$\langle f_1, f_1 \rangle = -(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})(u_{11} + u_{22} - 2u_{12}) \neq 0, \quad (3.4)$$

$$\langle f_1, f_1 \rangle \langle f_2, f_2 \rangle^{-1} = -(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) < 0, \quad (3.5)$$

т. е. один из взаимно ортогональных векторов f_1 и f_2 является пространственноподобным, а другой – времениподобным.

Вектор $x(t)$, который требуется найти, имеет следующее разложение:

$$x = \frac{\langle x, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 + \frac{\langle x, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2. \quad (3.6)$$

Для новых конфигурационных переменных

$$z(t) = \frac{\langle x, f_2 \rangle}{2} + \ln \sqrt{\left| \frac{a^{(2)}}{a^{(1)}} \right|}, \quad (3.7)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\langle f_2, f_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle}} \langle x, f_1 \rangle \quad (3.8)$$

лагранжиан (2.28) и соответствующее условие нулевой энергии принимают следующий вид:

$$L = 2\beta(\dot{z}^2 - \dot{y}^2) - V(z, y), \quad (3.9)$$

$$E = 2\beta(\dot{z}^2 - \dot{y}^2) + V(z, y) = 0, \quad (3.10)$$

где

$$V(z, y) = V_0 e^{2\alpha\beta y} (\operatorname{sgn}[a^{(1)}] e^{2\beta_1 z} + \operatorname{sgn}[a^{(2)}] e^{2\beta_2 z}). \quad (3.11)$$

В (3.9)–(3.11) использованы постоянные

$$\alpha = \sqrt{u_{12}^2 - u_{11}u_{22}}, \quad \beta = (u_{11} + u_{22} - 2u_{12})^{-1}, \quad (3.12)$$

$$\beta_1 = -(u_{11} - u_{12})\beta, \quad \beta_2 = \beta_1 + 1 = (u_{22} - u_{12})\beta, \quad (3.13)$$

$$V_0 = |a^{(1)}|^{\beta_2} |a^{(2)}|^{-\beta_1}. \quad (3.14)$$

Заметим, что применение базиса вида (3.1) приводит к факторизации потенциала (3.11) по отношению к координатам вектора $x(t)$ (дополнительное линейное преобразование (3.7), (3.8) здесь не имеет значения). Подобная факторизация потенциала существенна при выполнении следующей процедуры, впервые предложенной в [15]. Используя уравнения движения, определяемые лагранжианом (3.9),

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2\beta} V_0 e^{2\alpha\beta y} \left(\beta_1 \operatorname{sgn}[a^{(1)}] e^{2\beta_1 z} + \beta_2 \operatorname{sgn}[a^{(2)}] e^{2\beta_2 z} \right), \quad (3.15)$$

$$\ddot{y} = \frac{\alpha}{4} V(z, y), \quad (3.16)$$

условие нулевой энергии (3.10), записанное в форме

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{2\beta} \frac{V(z, y)}{(\dot{y}/\dot{z})^2 - 1} = \frac{1}{2\beta} \frac{V(z, y)}{(dy/dz)^2 - 1}, \quad (3.17)$$

и соотношение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{\ddot{y} - \dot{z} \frac{dy}{dz}}{\dot{z}^2}, \quad (3.18)$$

мы получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \left[\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 - 1 \right] \left\{ \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \beta_2 + \frac{e^{2z} - \varepsilon}{e^{2z} + \varepsilon} \right) \frac{dy}{dz} + \alpha\beta \right\}, \quad (3.19)$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}[a^{(1)} a^{(2)}]. \quad (3.20)$$

Заметим, что благодаря факторизации потенциала в правой части уравнения (3.19) не содержится y , так что в действительности уравнение имеет первый порядок по отношению к dy/dz .

Прделанная процедура справедлива для решений, у которых $\dot{z} \not\equiv 0$. На уровне энергии, равном нулю, особое решение системы уравнений (3.15), (3.16) с $\dot{z} \equiv 0$ дает следующий вектор $x(t)$:

$$x(t) = p \ln |t - t_0| + q, \quad (3.21)$$

где постоянные векторы $p, q \in R^2$ таковы, что

$$p = \frac{2}{\alpha^2} f_1, \quad (3.22)$$

$$e^{\langle q, b_1 \rangle} = \frac{\beta_2}{a^{(1)} \alpha^2 \beta} > 0, \quad e^{\langle q, b_2 \rangle} = -\frac{\beta_1}{a^{(2)} \alpha^2 \beta} > 0. \quad (3.23)$$

Следует подчеркнуть, что особое решение (3.21) существует только при выполнении неравенств (3.23). Заметим, что система уравнений (3.10), (3.15), (3.16) не имеет статических решений $\dot{z} = \dot{y} \equiv 0$ в силу условия (3.3). Решения с $\dot{z} = \pm \dot{y}$ также невозможны, поэтому, используя соотношение (3.17), мы не теряем каких-либо решений системы (3.10), (3.15), (3.16), за исключением, возможно, решения (3.21).

Предположим, что общее решение уравнения (3.19) можно получить в параметрической форме $z = z(\tau)$, $y = y(\tau)$, где τ – параметр. Тогда, используя (3.6)–(3.8), мы находим вектор x как функцию параметра τ :

$$x(\tau) = \frac{2y(\tau)}{\alpha}(-\beta_2 b_1 + \beta_1 b_2) + 2\beta \left[z(\tau) - \ln \sqrt{\left| \frac{a^{(2)}}{a^{(1)}} \right|} \right] (b_2 - b_1). \quad (3.24)$$

Напомним, что координаты вектора $x(\tau)$ в каноническом базисе являются логарифмами масштабных факторов пространств M_1 , M_2 . Связь гармонического времени t и параметра τ может быть найдена в любом случае путем интегрирования условия нулевой энергии, записанного в виде следующего уравнения с разделяющимися переменными:

$$dt^2 = 2\beta \frac{\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}{V(z(\tau), y(\tau))} d\tau^2. \quad (3.25)$$

Таким образом, проблема интегрируемости в квадратурах псевдоевклидовых систем типа цепочки Тоды с двумя степенями свободы и двумя компонентами при условии нулевой энергии сведена к проблеме интегрируемости уравнения (3.19).

Относительно dy/dz уравнение (3.19) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Его правая часть является полиномом третьего порядка (с переменными коэффициентами, зависящими от z) относительно dy/dz . Уравнение такого вида называется уравнением Абеля (см., например, [36, 37]). Не существует методов интегрирования произвольного уравнения Абеля, однако уравнение (3.19) может быть проинтегрировано для некоторых значений параметров $\alpha\beta$ и $\beta_1 + \beta_2$. Прежде всего отметим, что уравнение (3.19) имеет частные интегралы $y \pm z = \text{const}$, которые дают особенность в соотношении (3.17) и, как уже было отмечено, не являются частными интегралами системы уравнений (3.10), (3.15), (3.16). Существование этого частного решения уравнения Абеля (3.19) позволяет найти преобразование

$$e^{2z} = -\varepsilon \frac{X}{Y} \frac{dY}{dX}, \quad (3.26)$$

$$y = \delta \left[z + \ln \left| \frac{Y}{X} \right| + \ln C \right], \quad \delta = \pm 1, \quad C > 0, \quad (3.27)$$

с помощью которого уравнение Абеля (3.19) сводится к так называемому обобщенному уравнению Эмдена–Фаулера

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = X^n Y^m \left(\frac{dY}{dX} \right)^l, \quad (3.28)$$

где постоянные параметры n , m и l имеют вид

$$n = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 - 2\delta\alpha\beta - 3) = \frac{-2u_{11} - u_{22} + 3u_{12} - \delta\sqrt{u_{12}^2 - u_{11}u_{22}}}{u_{11} + u_{22} - 2u_{12}}, \quad (3.29)$$

$$m = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 - 2\delta\alpha\beta + 3) = \frac{-u_{11} - 2u_{22} + 3u_{12} + \delta\sqrt{u_{12}^2 - u_{11}u_{22}}}{u_{11} + u_{22} - 2u_{12}}, \quad (3.30)$$

$$l = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + 2\delta\alpha\beta - 3) = \frac{2u_{11} + u_{22} - 3u_{12} - \delta\sqrt{u_{12}^2 - u_{11}u_{22}}}{u_{11} + u_{22} - 2u_{12}}. \quad (3.31)$$

Заметим, что в полученном для рассматриваемой модели обобщенном уравнении Эмдена–Фаулера параметры не являются независимыми. Из (3.29), (3.30) вытекает, что

$$n + m = -3. \quad (3.32)$$

В частном случае $l = 0$ уравнение (3.28) известно как уравнение Эмдена–Фаулера.

Если параметры l и m , определенные в (3.31), (3.30) таковы, что $l = 0$, $m \neq 1$, существует еще одно преобразование

$$1 + \varepsilon e^{2z} = -\frac{2}{m-1} \frac{X}{Y} \frac{dY}{dX}, \quad (3.33)$$

$$y = \delta \left[z - \frac{1}{m-1} \ln Y^2 + C \right], \quad \delta = \pm 1, \quad C \in R, \quad (3.34)$$

которое сводит уравнение Абеля (3.19) к следующему интегрируемому уравнению Эмдена–Фаулера:

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = Y^{\frac{m+3}{m-1}}. \quad (3.35)$$

Не существует методов интегрирования обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера с произвольными независимыми параметрами n , m и l . Однако методы дискретно-группового анализа, недавно развитые в [37], позволяют проинтегрировать три двухпараметрических семейства, 11 однопараметрических семейств и около 90 изолированных точек в пространстве параметров (n, m, l) обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера. Например, двухпараметрические интегрируемые семейства возникают при $n = 0$ и произвольных m и l или при $m = 0$ и произвольных n и l . Однопараметрическое семейство, возникающее при $l = 0$ и $n + m = -3$, также интегрируется в квадратурах.

Предположим, что две компоненты рассматриваемой космологической модели с двумя фактор-пространствами индуцируют такие векторы b_1 и b_2 , что соответствующее модели обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера (3.28) с параметрами, определенными в (3.2), (3.29)–(3.31), интегрируемо в параметрическом виде $X = X(\tau)$, $Y = Y(\tau)$, где τ – параметр. Тогда, используя параметр τ как новую временную координату, с помощью формул (3.26), (3.27), (3.24), (3.25) мы получаем следующий результат для метрики (2.2):

$$g = -f^2(\tau) [a_1(\tau)]^{2N_1} [a_2(\tau)]^{2N_2} d\tau \otimes d\tau + [a_1(\tau)]^2 g^{(1)} + [a_2(\tau)]^2 g^{(2)}, \quad (3.36)$$

где использованы обозначения

$$f(\tau) = \sqrt{\frac{2|\beta|}{V_0}} C^{n+l} \left[\frac{Y'(\tau)}{X'(\tau)} \right]^l \frac{[X'(\tau)]^2}{X(\tau)Y(\tau)Y'(\tau)}, \quad (3.37)$$

$$a_i(\tau) \equiv e^{x^i(\tau)} = e^{\gamma^i} \left\{ \left| \frac{Y'(\tau)}{X'(\tau)} \right|^{(2-l)b_{(1)}^i - (1-l)b_{(2)}^i} \left| \frac{Y(\tau)}{X(\tau)} \right|^{(2+n)b_{(1)}^i - (1+n)b_{(2)}^i} \right\}^{\frac{2\beta}{l+n}}. \quad (3.38)$$

Посредством γ^i для $i = 1, 2$ обозначены следующие постоянные:

$$\gamma^i = 2\beta \left\{ \frac{\ln C}{n+l} [(n-l+4)b_{(1)}^i - (n-l+2)b_{(2)}^i] - \ln \sqrt{\left| \frac{a^{(2)}(1)}{a^{(1)}} \right|} [b_{(2)}^i - b_{(1)}^i] \right\}. \quad (3.39)$$

Напомним, что $b_{(\mu)}^i$ — координаты вектора b_μ в каноническом базисе. В частном случае $l = 0$ для получения метрики можно использовать подобным образом также преобразование (3.33), (3.34) и результат интегрирования уравнения (3.35). Это преобразование применялось в [3] для интегрирования моделей с двумя кривизнами.

Таким образом, описанный метод позволяет проинтегрировать космологическую модель, если соответствующее ей обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера интегрируемо. Заметим, что если модель с некоторыми векторами b_1 и b_2 интегрируема указанным методом, то любая модель с векторами αb_1 и αb_2 (α — произвольная ненулевая постоянная) также интегрируема, поскольку параметры n , m и l не изменяются при таком преобразовании векторов. Принимая во внимание классы 1–4 (класс 5 не возникает для $n = 2$), описанные в разделе 2, и дополнительный к ним класс, который может быть проинтегрирован описанным методом, мы получаем довольно богатое множество интегрируемых космологических моделей с двумя фактор-пространствами и двумя компонентами.

4. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим предложенный в разделе 3 метод в применении к космологической модели на многообразии (2.29) в случае риччи-плоских пространств M_1 , M_2 и источника в виде 2-компонентной идеальной жидкости (табл. 2).

Таблица 2

Компонента идеальной жидкости	Внешнее пространство $M_1^{N_1}$	Внутреннее пространство $M_2^{N_2}$
1-я	$h_1^{(1)}$	$h_2^{(1)}$
2-я	$h_1^{(2)}$	$h_2^{(2)}$

Напомним, что $N_i = \dim M_i$ и $h_i^{(\mu)}$ являются постоянными параметрами в баротропном уравнении состояния (2.9). Модель полностью определяется заданием этих шести параметров. Нетрудно показать [5], что условие энергодоминантности для тензора

энергии-импульса (2.8) означает, что $0 \leq h_i^{(\mu)} \leq 2$. Обычно в космологии используются рациональные значения параметров $h_i^{(\mu)}$; например, $h_i^{(\mu)} = (N_i - 1)/N_i$ соответствует излучению, $h_i^{(\mu)} = 1$ – пыли, $h_i^{(\mu)} = 0$ – материи Зельдовича, $h_i^{(\mu)} = 2$ – “ложному” вакууму (Λ -члену), $h_i^{(\mu)} = (D - 1)/D$ – суперизлучению и т.д. С другой стороны, интегрируемые семейства обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера возникают, как правило, для рациональных значений параметров n , m и l [36]. Если потребовать, чтобы параметры n , m , l в уравнении (3.28), соответствующем модели, и параметры $h_i^{(\mu)}$ были рациональными числами, то в силу соотношения

$$\alpha^2 = u_{12}^2 - u_{11}u_{22} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2 - 1} (h_1^{(1)} h_2^{(2)} - h_2^{(1)} h_1^{(2)})^2 \quad (4.1)$$

выделяются размерности N_1 , N_2 , для которых выражение $R \equiv \sqrt{N_1 N_2 (N_1 + N_2 - 1)}$ имеет целое значение. Например, выражение R является целым для следующих размерностей: $(N_1, N_2) = (3, 6), (2, 8), (5, 5), (7, 8), (3, 25), (N_1, 1)$. С точки зрения физики интерес представляют размерности $(2, 1), (3, 1), (3, 6), (3, 25)$.

Рассмотрим те частные модели, изображенные в табл. 2, которые приводят к уравнению Эмдена–Фаулера (3.28) с

$$l = 0. \quad (4.2)$$

В силу соотношения (3.32) уравнение (3.28) интегрируемо для произвольного параметра m , его точное решение выписано в [36]. Заметим, что два других интегрируемых двухпараметрических семейства обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера, которые

возникают при $n = 0$ или $m = 0$, описывают те же самые космологические модели. Действительно, из (3.29), (3.31) вытекает, что если в модели получается $l = 0$ для $\delta = 1$ (или $\delta = -1$), то в этой же модели $n = 0$ для $\delta = -1$ (соответственно, $\delta = 1$). Нетрудно видеть также из (3.30), (3.31), что условие $l = 0$ преобразуется в условие $m = 0$ при обратной нумерации компонент. Таким образом, из трех интегрируемых семейств обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера, возникающих при $n = 0$, $m = 0$ и $l = 0$, соответственно, для рассматриваемых моделей достаточно взять одно из них. Пусть это будет семейство с $l = 0$. В этом случае уравнение (3.28) имеет вид

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = X^{-m-3} Y^m, \quad m = -\beta_1 - \beta_2. \quad (4.3)$$

Преобразованием

$$Y = \frac{\tau}{\xi}, \quad X = \frac{1}{\xi} \quad (4.4)$$

оно сводится к уравнению

$$\frac{d^2 \tau}{d\xi^2} = \tau^m, \quad (4.5)$$

которое легко интегрируется. Тогда общее решение уравнения (4.3) есть

$$Y = \pm \frac{\tau}{F(\tau)}, \quad X = \pm \frac{1}{F(\tau)}, \quad (4.6)$$

где

$$F(\tau) = \int \left[\frac{2}{m+1} \tau^{m+1} + C_1 \right]^{-1/2} d\tau + C_2, \quad m \neq -1, \quad (4.7)$$

$$F(\tau) = \int [2 \ln |\tau| + C_1]^{-1/2} d\tau + C_2, \quad m = -1. \quad (4.8)$$

Мы полагаем, что обе компоненты идеальной жидкости имеют положительные плотности массы-энергии (2.11), т.е. $a^{(\mu)} = \kappa^2 A^{(\mu)} > 0$ для $\mu = 1, 2$, отсюда $\varepsilon = \text{sgn}[a^{(1)}a^{(2)}] = 1$. Тогда с учетом формулы (3.26) общее решение (4.6) определено на интервале значений переменной τ , где

$$G(\tau) \equiv -\frac{X(\tau)Y'(\tau)}{Y(\tau)X'(\tau)} = \frac{F(\tau)}{\tau F'(\tau)} - 1 > 0. \quad (4.9)$$

В итоге, используя результаты раздела 3, мы получаем следующее точное решение для космологической модели, изображенной в табл. 2, в частном случае $l = 0$: метрика представлена формулой (3.36), где

$$f^2(\tau) = \frac{2|\beta|C^{-2\delta\alpha\beta}}{[A^{(1)}]^{\beta_2}[A^{(2)}]^{-\beta_1}} \left[\frac{F'(\tau)}{G(\tau)\tau^2} \right]^2; \quad (4.10)$$

масштабные факторы пространств M_1, M_2 имеют вид

$$a_i(\tau) = \left[\frac{A^{(1)}}{A^{(2)}} \right]^{\beta} \left[u_{(2)}^i - u_{(1)}^i \right] \left\{ [G(\tau)]^{u_{(2)}^i - 2u_{(1)}^i} [C^2 \tau^2]^{\beta_1 u_{(2)}^i - \beta_2 u_{(1)}^i} \right\}^{\delta/\alpha}; \quad (4.11)$$

плотности массы-энергии записываются следующим образом:

$$\rho^{(1)}(\tau) = \frac{[A^{(1)}]^{\beta_2}[A^{(2)}]^{-\beta_1}}{[a_1(\tau)]^{2N_1}[a_2(\tau)]^{2N_2}} \left\{ [G(\tau)]^{u_{12}-2u_{11}} [C^2 \tau^2]^{\alpha^2 \beta} \right\}^{\delta/\alpha}, \quad (4.12)$$

$$\rho^{(2)}(\tau) = \frac{[A^{(1)}]^{\beta_2}[A^{(2)}]^{-\beta_1}}{[a_1(\tau)]^{2N_1}[a_2(\tau)]^{2N_2}} \left\{ [G(\tau)]^{u_{22}-2u_{12}} [C^2 \tau^2]^{\alpha^2 \beta} \right\}^{\delta/\alpha}. \quad (4.13)$$

Функции $F(\tau)$ и $G(\tau)$ определены в (4.7)–(4.9); компоненты $u_{(\mu)}^i$ векторов в каноническом базисе записаны в (2.23); параметры $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2$ определены в (3.12), (3.13); значения $u_{\mu\nu} = \langle u_\mu, u_\nu \rangle$ для $\mu, \nu = 1, 2$ могут быть вычислены из параметров $N_i, h_i^{(\mu)}$ с использованием табл. 2.

Заметим, что для плотностей (4.12), (4.13) справедливо соотношение

$$\rho^{(2)}(\tau)/\rho^{(1)}(\tau) = G(\tau). \quad (4.14)$$

Напомним, что модель может также иметь особое решение (3.21).

В заключение мы представляем в табл. 3 некоторые интересные с нашей точки зрения модели с $l = 0$ для размерностей $N_1 = 3$ и $N_2 = 6$. Нетрудно показать, что для этих

размерностей и параметров $h_i^{(\mu)}$, указанных в табл. 3, параметр l , определенный в (3.31), равен нулю, т.е. частная модель описывается точным решением (4.10)–(4.13).

Таблица 3

Компонента идеальной жидкости	Внешнее пространство M_1^3	Внутреннее пространство M_2^6
1-я	излучение $h_1^{(1)} = \frac{2}{3}$	излучение $h_2^{(1)} = \frac{5}{6}$
2-я	излучение $h_1^{(2)} = \frac{2}{3}$	материя Зельдовича $h_2^{(2)} = 0$
1-я	пыль $h_1^{(1)} = 1$	излучение $h_2^{(1)} = \frac{5}{6}$
2-я	излучение $h_1^{(2)} = \frac{2}{3}$	пыль $h_2^{(2)} = 1$
1-я	излучение $h_1^{(1)} = \frac{2}{3}$	излучение $h_2^{(1)} = \frac{5}{6}$
2-я	пыль $h_1^{(2)} = 1$	излучение $h_2^{(2)} = \frac{5}{6}$
1-я	излучение $h_1^{(1)} = \frac{2}{3}$	излучение $h_2^{(1)} = \frac{5}{6}$
2-я	“ложный” вакуум $h_1^{(2)} = 2$	“ложный” вакуум $h_2^{(2)} = 2$
1-я	“ложный” вакуум $h_1^{(1)} = 2$	“ложный” вакуум $h_2^{(1)} = 2$
2-я	материя Зельдовича $h_1^{(2)} = 0$	“ложный” вакуум $h_2^{(2)} = 2$

Из (2.22), (2.23) вытекает, что для этих размерностей 2-компонентная идеальная жидкость с параметрами $h_1^{(1)} = 4/3$, $h_2^{(1)} = 2$, $h_1^{(2)} = 2$, $h_2^{(1)} = 5/3$ индуцирует векторы b_1 и b_2 , которые совпадают с векторами, индуцированными кривизнами пространств M_1^3 и M_2^6 , соответственно. Тогда добавление таких двух компонент в интегрируемую вакуумную модель на $R \times M_1^3 \times M_2^6$ с двумя кривизнами (исследование этой модели см. в [3]) дает интегрируемую модель с двумя кривизнами и источником в виде 2-компонентной идеальной жидкости.

Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проект № 95-02-05785а).

Список литературы

- [1] V. R. Gavrilov, V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 5829.
- [2] V. R. Gavrilov, V. N. Melnikov, M. Novello. Gravitation and Cosmology. 1995. V. 1. P. 149.
- [3] V. R. Gavrilov, V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. Class. Quantum Gravit. 1996. V. 13. P. 3039.
- [4] V. R. Gavrilov, V. N. Melnikov, M. Novello. Gravitation and Cosmology. 1996. V. 4(8). P. 325.
- [5] V. R. Gavrilov, V. N. Melnikov, R. Triay. Exact solutions in multidimensional cosmology with bulk and shear viscosity. Preprint CPT-96/P.3396. Marseille, France; Class. Quantum Gravit. 1997. V. 14. P. 2203.
- [6] V. R. Gavrilov, V. D. Ivashchuk, U. Kasper, V. N. Melnikov. Gen. Rel. Grav. 1997. V. 29. P. 599.
- [7] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. Nuovo Cimento. B. 1988. V. 102. P. 131.
- [8] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. Phys. Lett. A. 1989. V. 135. P. 465.
- [9] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov, A. I. Zhuk. Nuovo Cimento. B. 1989. V. 104. P. 575.
- [10] V. D. Ivashchuk. Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 16.
- [11] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. Int. J. Mod. Phys. D. 1994. V. 3. P. 795.
- [12] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov. Class. Quantum Gravit. 1995. V. 12. P. 809.
- [13] V. N. Melnikov. Multidimensional Classical and Quantum Cosmology and Gravitation: Exact Solutions and Variations of Constants. In: Cosmology and Gravitation. Ed. M. Novello. Singapore: Editions Frontieres, 1994. P. 147.
- [14] V. N. Melnikov. Multidimensional Cosmology and Gravitation. Preprint CBPF-MO-002/95. Rio de Janeiro, Brasil, 1995.
- [15] U. Bleyer, D.-E. Liebscher, A. G. Polnarev. Class. Quantum Gravit. 1991. V. 8. P. 477.
- [16] U. Bleyer, V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov, A. I. Zhuk. Nucl. Phys. B. 1994. V. 429. P. 177.
- [17] P. Forgacs, Z. Horvath. Gen. Rel. Grav. 1979. V. 11. P. 205.
- [18] A. Chodos, S. Detweiler. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2167.
- [19] M. Demiansky, A. G. Polnarev. Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 3003.
- [20] M. Gleiser, S. Rajpoot, J. G. Teylor. Ann. Phys. (NY). 1985. V. 160. P. 299.
- [21] T. Koikawa, M. Yoshimura. Phys. Lett. B. 1985. V. 155. P. 137.
- [22] D. Lorenz-Petzold. Phys. Lett. B. 1984. V. 149. P. 79.
- [23] D. Lorenz-Petzold. Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 110.
- [24] M. Rainer. Gravitation and Cosmology. 1996. V. 1(5). P. 27.
- [25] D. Sahdev. Phys. Rev. D. 1984. V. 30. P. 2495.
- [26] M. Szydlowski. Gen. Rel. Grav. 1988. V. 20. P. 221.
- [27] M. Szydlowski, G. Pajdosz. Class. Quantum Gravit. 1989. V. 6. P. 1391.
- [28] M. Toda. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [29] P. S. Wesson, J. Ponce de Leon. Gen. Rel. Grav. 1994. V. 26. P. 555.
- [30] D. L. Wiltshire. Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1634.
- [31] G. W. Gibbons, D. L. Wiltshire. Nucl. Phys. B. 1987. V. 287. P. 717.
- [32] M. Rainer, A. I. Zhuk. Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 6186.
- [33] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Phys. Lett. B. 1983. V. 125. P. 136.
- [34] G. Börner. The Early Universe. Facts and Fiction. Berlin: Springer, 1992.
- [35] O. I. Bogoyavlensky. Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 201.
- [36] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М.: Наука, 1995.
- [37] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. М.: Наука, 1993.

Поступила в редакцию 24.IX.1997 г.