Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Чудхури, Х. С. Мондал, Заметка о почти-причинности и отражающем пространстве-времени, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 366–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:06:43

© 2013 г.

Б. С. Чудхури*, Х. С. Мондал†

ЗАМЕТКА О ПОЧТИ-ПРИЧИННОСТИ И ОТРАЖАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Приведен краткий обзор концепций почти-причинности и условий, при которых пространство-время является отражающим и различающим. Предложены некоторые соотношения между этими условиями, а также доказаны предложения с использованием конструктивного подхода.

Ключевые слова: лоренцева геометрия, пространство-время, причинность, почти-причинность, отражающее пространство-время, различающее пространство-время.

DOI: 1010.4231/tmf8520

1. ВВЕДЕНИЕ

Тот факт, что пространство-время может быть отражающим, является важным допущением, предложенным для ослабления сильного варианта гипотезы космической цензуры. Такая структура обладает некоторыми характерными свойствами, описанными в ряде работ (см., например, [1], [2]). В частности, такое пространство-время активно рассматривалось в работе [1]. Теория причинности представляет собой основную составляющую лоренцевой геометрии, которая способствует успешному взаимодействию между релятивистскими мотивировками и геометрическими построениями. С точки зрения физика, теория причинности является воплощением эволюции во времени, а также конечной скорости распространения сигнала и доступных средств связи. Более того, концепции причинности играют ведущую роль при получении многих важных результатов гравитационных теорий, таких как теоремы о сингулярностях, асимптотические свойства пространства-времени и т. д. Всестороннее обсуждение причинной, или каузальной структуры пространства-времени можно найти в работах [3]–[5]. Почти-причинность представляет собой более слабый вариант принципа причинности. Полное описание почти-причинности приведено в работе [6]. Отношение между механикой и геометрией пространства-времени следует, что почти-причинность имеет несколько важных следствий.

*Department of Mathematics, Bengal Engineering and Science University, Howrah, India.
E-mail: binayak12@yahoo.co.in

†Department of Mathematics, Midnapore College, Midnapore, India.
E-mail: himaichand@yahoo.com

В настоящей заметке получены некоторые результаты, касающиеся почти-причинности, в контексте отражающего пространства-времени. Работа выполнена в рамках исследований, в которых концепции причинности комбинируются с геометрией. Мы предлагаем некоторые соотношения между ними, а затем доказываем предложения, используя конструктивный подход.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЧИННОСТИ

Фундаментальная пространственно-временная арена представляет собой паракомпактное, связное, ориентированное, хаусдорфово четырехмерное C^k -многообразие M ($k \geq 2$), снабженное лоренцевой метрикой g с сигнатурой $(-, +, +, +)$. Касательное пространство $T_p M$ в каждой точке $p \in M$ имеет типичную структуру пространства Минковского с двухполостным световым конусом, который позволяет классифицировать все ненулевые векторы $v \in T_p M$ как пространственноподобные, времениподобные или нулевые (также называемые светоподобными) в зависимости от того, является ли $g_p(v, v)$ положительной, отрицательной или равной нулю. Далее выбирается произвольный времениподобный вектор t в качестве указателя направления в будущее или в прошлое в зависимости от того, отрицательна или положительна величина $g_p(t, v)$. Если такой выбор можно проделать непрерывно для всего пространственно-временного многообразия, то пространство-время называется темпорально ориентируемым. Таковым являются не каждое пространство-время, однако лоренцево многообразие является темпорально ориентируемым, если и только если оно допускает гладкое времениподобное векторное поле v .

Введем стандартные каузальные соотношения $\ll$ и $<$ на пространственно-временном многообразии M . Будем говорить, что времениподобная (каузальная) кривая $\gamma: I \rightarrow M$, где I – интервал в $\mathbb{R}$, направлена в будущее (соответственно в прошлое), если каждый касательный вектор $\gamma'(t)$, $t \in I$, направлен в будущее (соответственно в прошлое).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $p, q \in M$.

1. Будем писать $p \ll q$, если и только если существует направленная в будущее времениподобная кривая в M из p в q ; при этом будем говорить, что q лежит в *хронологическом будущем* точки p .

2. Будем писать $p < q$, если и только если существует направленная в будущее каузальная кривая в M из p в q ; при этом будем говорить, что q лежит в *каузальном будущем* точки p .

Запись $p \leq q$ означает, что $p = q$ или $p < q$. Каузальные соотношения с очевидностью являются транзитивными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для любой точки $p \in M$ *хронологическое будущее* $I^+(p)$ и *каузальное будущее* $J^+(p)$ точки p определяются как

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}, \quad J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}.$$

Хронологическое прошлое $I^-(p)$ и *каузальное прошлое* $J^-(p)$ точки p определяются дуальным по времени способом.

Если $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ (при $p \neq q$), то существует направленная в будущее нулевая геодезическая из p в q . Если p – точка в пространстве-времени Минковского, то множество $I^+(p)$ открыто, множество $J^+(p)$ замкнуто, а $\partial I^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ представляет собой в точности нулевой конус будущего в точке p . Однако, вообще говоря, кривизна и топология могут существенным образом изменять структуру нулевых конусов в пространстве-времени. Для любой точки p в данном пространстве-времени нулевой конус будущего $\partial I^+(p)$ в точке p является компактным и состоит из двух сегментов направленной в будущее нулевой геодезической, выходящих из точки p и встречающихся в будущем в точке q . Если мы продолжим эти геодезические за точку q , то они попадут в $I^+(p)$. Поэтому в некоторых случаях удобно ограничить каузальные соотношения $\ll$ и $<$ на открытые подмножества O пространства-времени M . Например, $I^+(p, O)$ есть хронологическое будущее точки p внутри O , т. е. $I^+(p, O) = \{q \in O : p \ll q\}$. Заметим, что, вообще говоря, $I^+(p, O) \neq I^+(p) \cap O$. Аналогично, $J^+(p, O) = \{q \in O : p \leq q\}$. Особый интерес представляет причинность выпуклых открытых окрестностей. Если O – выпуклая открытая окрестность в пространстве-времени M , то для каждой точки $p \in M$ множество $I^+(p, O)$ открыто в O , а потому открыто в M . Как следствие, $I^+(p)$ открыто в M . Множество $J^+(p, O)$ является замыканием множества $I^+(p, O)$ в O . Однако, вообще говоря, $J^+(p)$ не обязательно должно быть замкнутым.

Для любого $S \subseteq M$ определим времениподобное будущее $I^+(S)$ и каузальное будущее $J^+(S)$ для S как

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p), \quad J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p).$$

Поскольку любое объединение открытых множеств является открытым, $I^+(S)$ – открытое множество в M . Множества $I^-(S)$ и $J^-(S)$ определяются дуальным по времени способом. Хотя $J^+(S) \neq I^+(S)$, мы всегда имеем $\text{Int } J^+(S) = I^+(S)$ и $J^+(S) \subseteq \bar{I^+(S)}$.

Очень важную роль в каузальной теории пространства-времени играют ахронные множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что подмножество $S \subseteq M$ является *ахронным*, если не существует точек $p, q \in S$ таких, что $q \in I^+(p)$, т. е. если $I^+(S) \cap S = \emptyset$.

Если M – темпорально ориентируемое пространство-время и $S \subseteq M$, то множество $\partial I^+(S)$ (если оно не пусто) является ахронным, трехмерным, вложенным C^0 -подмногообразием пространства-времени M [5].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Следующее определение дано в работе [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Хронологическое общее будущее* открытого подмножества U пространства-времени M определяется как

$$\uparrow U = \{p \in M : u \ll p \text{ при всех } u \in U\} = \text{Int} \left(\bigcap_{u \in U} I^+(u) \right).$$

Хронологическое общее прошлое $\downarrow U$ определяется дуальным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $p, q \in M$. Будем говорить, что точка p *почти каузально предшествует* q и писать pAq , если $I^+(q) \subseteq I^+(x)$ для всех $x \in I^-(p)$, или, эквивалентно, если $I^-(p) \subseteq I^-(y)$ для всех $x \in I^+(q)$.

Таким образом, pAq , если и только если каждая окрестность точки p содержит точку, которая хронологически предшествует некоторым точкам в любой окрестности точки q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Почти-будущее* $A^+(p)$ и *почти-прошлое* $A^-(p)$ точки $p \in M$ определяются как

$$A^+(p) = \{y \in M : pAy\}, \quad A^-(p) = \{x \in M : xAp\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пространство-время M является *различающим будущее* (различающим прошлое), если равенство $I^+(x) = I^+(y)$ (соответственно $I^-(x) = I^-(y)$) влечет $x = y$.

Эквивалентным образом для любой точки $p \in M$ и любой окрестности U_p точки p найдется окрестность V_p точки p , причем $V_p \subseteq U_p$, такая, что никакая направленная в будущее (в прошлое) кривая, не являющаяся пространственноподобной, проходящая через точку p и покидающая V_p , не возвращается в нее.

Пространство-время (M, g) является различающим, если и только если оно является различающим будущее и прошлое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пространство-время (M, g) является *отражающим будущее*, если $I^-(p) \subseteq I^-(q)$ влечет $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ для всех $p, q \in M$; оно является *отражающим прошлое*, если $I^+(p) \subseteq I^+(q)$ влечет $I^-(q) \subseteq I^-(p)$ для всех $p, q \in M$. Пространство-время (M, g) является *отражающим*, если оно является отражающим как прошлое, так и будущее.

Поскольку из квантового принципа неопределенности следует, что измерения являются неточными, невозможно измерить точные значения метрики в любой точке, поэтому следует учитывать возмущения метрики. Чтобы достичь этого, Зайферт ввел следующее множество:

$$J_S^+(x) = \bigcap_{\bar{g} > g} J^+(x, \bar{g}).$$

Здесь $\bar{g} > g$ означает, что нулевой конус для $\bar{g}$ шире, чем конус для g , т.е. каждый вектор, не являющийся пространственноподобным по отношению к g , становится времениподобным по отношению к $\bar{g}$. Будем называть множество $J_S^+(x)$ будущим Зайферта для точки x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что пространство-время *каузально непрерывно*, если оно является различающим и отражающим.

Имеют место следующие результаты. Пусть M – пространство-время.

ЛЕММА 1. Для всех $x \in M$ имеем $\text{Int}(A^+(x)) = \uparrow I^-(x)$.

ЛЕММА 2. Для всех $x \in M$ имеем $\uparrow I^-(x) = I^+(x)$ и $\downarrow I^+(x) = I^-(x)$.

ЛЕММА 3. Почти-будущее $A^+(x)$ является замкнутым в топологии многообразия для любого $x \in M$.

ЛЕММА 4. Пусть M – различающее пространство-время. Тогда M является отражающим, если и только если $J_S^\pm(x) = \overline{J^\pm(x)}$ для всех $x \in M$. Таким образом, $\overline{J^\pm(x)}$ является замкнутым для всех $x \in M$.

Докажем несколько утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M – пространство-время. Для любого $x \in M$ имеем $A^+(x) \subseteq J_S^+(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $J_S^+(x)$ имеем $I^+(x) \subseteq J_S^+(x)$. Тогда $J_S^+(x)$ замкнуто в M . Поэтому $\overline{I^+(x)} \subseteq \overline{J_S^+(x)} = J_S^+(x)$. Пусть точка $p \in A^+(x)$. Тогда $I^+(p) \subseteq I^+(z)$ для всех $z \in I^-(x)$. Рассмотрим последовательность $\{p_n\}$ в $I^-(x)$, сходящуюся к x . Тогда $\bigcap J_S^+(p_n) \subseteq J_S^+(x)$. Теперь из того что $I^+(p) \subseteq I^+(z)$ для всех $z \in I^-(x)$, следует, что $p \in \overline{I^+(z)}$ для всех $z \in I^-(x)$. Тогда $p \in J_S^+(z)$ для любого $z \in I^-(x)$ и $p \in \bigcap J_S^+(p_n)$, поскольку $p \in I^-(x)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $p \in J_S^+(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Говорят [6], что пространство-время M является почти каузальным, если $A^+(x) = J_S^+(x)$ для всех $x \in M$.

Следующее предложение было доказано в работе [6]. Мы докажем его с помощью альтернативного подхода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если M – отражающее пространство-время, то мы имеем $A^+(x) = \overline{I^+(x)}$ для всех $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 имеем $\text{Int}(A^+(x)) = \uparrow I^-(x)$. Согласно лемме 2 имеем $\uparrow I^-(x) = I^+(x)$. Поскольку $A^+(x)$ является замкнутым в топологии многообразия, $A^+(x) = \overline{A^+(x)} = \overline{\text{Int}(A^+(x))} = \overline{\uparrow I^-(x)} = \overline{I^+(x)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если M – каузально непрерывное пространство-время, то M удовлетворяет условию почти-причинности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следующих соотношений:

$$J_S^+(x) = \bigcap_{\bar{g} > g} J^+(x, \bar{g}) = \overline{J^+(x)} = \overline{I^+(x)} = A^+(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть M – отражающее пространство-время. Если M является почти каузальным, то $\overline{J^+(x)} = J_S^+(x)$ для любого $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $A^+(x) = \overline{I^+(x)} = \overline{J^+(x)}$. Поскольку M является почти каузальным, $A^+(x) = J_S^+(x)$. Из этих двух равенств следует, что $\overline{J^+(x)} = J_S^+(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть пространство-время M удовлетворяет следующему условию: множества $J^+(p)$ и $J^-(p)$ замкнуты в M для каждой точки $p \in M$. Тогда M является отражающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению пространство-время M является отражающим, если и только если условие $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ равносильно $I^-(p) \subseteq I^-(q)$. Это равносильно тому, что $q \in I^+(p)$ тогда и только тогда, когда $p \in I^-(q)$. Пусть $q \in I^+(p) = \overline{J^+(p)} = J^+(p)$, тогда $p \in J^-(q) = \overline{J^-(q)} = I^-(q)$. Аналогично, если $p \in I^-(q)$, то $q \in I^+(p)$. Таким образом, M является отражающим.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Почти каузальное предшествование было предложено в работе [7]. В настоящей работе приведен краткий обзор концепции условия почти-причинности. Установлены некоторые соотношения между почти-причинностью и отражающим пространством-временем. Кроме того, показано, что ряд условий причинности можно охарактеризовать, используя условия почти-причинности. Мы надеемся, что эти характеристики окажутся в конечном счете полезными при исследовании свойств сингулярностей пространства-времени.

Благодарности. Мы благодарим Bengal Engineering and Science University за поддержку.

Список литературы

- [1] C. J. S. Clarke, P. S. Joshi, *Class. Quantum Grav.*, **5**:1 (1988), 19–25.
- [2] U. D. Vyas, *Gen. Relat. Grav.*, **40**:11 (2008), 2461–2465.
- [3] S. W. Hawking, G. F. Rellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [4] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **7**, SIAM, Philadelphia, PA, 1972.
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.
- [6] G. M. Akolia, P. S. Joshi, U. D. Vyas, *J. Math. Phys.*, **22**:6 (1981), 1243–1247.
- [7] N. M. J. Woodhouse, *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 495–501.

Поступила в редакцию 21.02.2013