Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Мухамедов, Х. Акин, О p -адической модели Поттса на дереве Кэли порядка три, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 513–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 04:17:38

© 2013 г.

Ф. Мухамедов*, Х. Акин†

О p -АДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Исследована проблема фазового перехода в p -адической модели Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка три. Найдены некоторые условия существования p -адических мер Гиббса и установлено существование фазового перехода.

Ключевые слова: p -адические числа, модель Поттса, p -адическая квазигиббсова мера, фазовый переход.

DOI: 1010.4231/tmf8522

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно (см., например, работу [1]), что модель Поттса с q состояниями является одной из наиболее изученных моделей в статистической механике. Она привлекает большой теоретический интерес и имеет практические приложения. Исходно модель Поттса была введена как обобщение модели Изинга на случай более чем двух компонент спина. Модель обладает весьма богатой структурой, позволяющей прояснить почти все возможные нюансы статистической механики. В работах [2], [3] изучались фазовые диаграммы модели на решетках Бете (деревьях Кэли в нашей терминологии) и были найдены чистые фазы ферромагнитной модели Поттса. Заметим, что решетки Бете с успехом использовались для более глубокого понимания поведения моделей Поттса. Следует также отметить, что одна из основных задач теории мер Гиббса для решеточных систем состоит в описании мер Гиббса в бесконечном объеме (или предельных мер Гиббса), соответствующих заданному гамильтониану (см., например, монографию [4]).

С другой стороны, начиная с 1980-х гг. различные физические модели исследовались с помощью p -адического анализа [5]–[10], многочисленные применения этого аппарата в математической физике рассматривались в работах [8], [11]–[15]. В этих

*Department of Computational and Theoretical Sciences, Faculty of Science, International Islamic University Malaysia, Pahang, Malaysia.

E-mail: far75m@yandex.ru, farrukh_m@iiium.edu.my

†Faculty of Education, Zirve University, Gaziantep, Turkey. E-mail: hasan.akin@zirve.edu.tr

исследованиях возникали необычные вероятностные меры. Это означает, что некоторые p -адические модели в физике нельзя описать, используя обыкновенную колмогоровскую теорию вероятностей. Новые, а именно p -адические, вероятностные модели изучались в работах [16]–[20]. Отметим, что стохастические процессы над полем $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел со значениями в поле вещественных чисел исследовались многими авторами, например в работах [21]–[26]. В этих работах были построены и изучены широкие классы марковских процессов над полем $\mathbb{Q}_p$. В нашем случае ситуация иная, поскольку вероятностные меры принимают значения в $\mathbb{Q}_p$. Это усложняет анализ. Например, нет данных о компактности p -адически-значных вероятностных мер. Полный обзор p -адической математической физики приведен в работе [27].

В работах [28], [29] введено понятие ультраметрической марковости, описывающей независимость вкладов различных ультраметрических шаров в случайное поле, и показано, что гауссовы случайные поля на общем ультраметрическом пространстве (связанным с иерархическими деревьями), определяемые как решение псевдодифференциального стохастического уравнения [30], [31], удовлетворяют условию марковости. Кроме того, ковариация заданного случайного поля была вычислена с помощью вейвлет-анализа на ультраметрическом пространстве (см. также работы [30], [32]). В статье [33] были рассмотрены некоторые применения полученных результатов к матрицам реплик, связанным с общим ультраметрическим пространством.

В работах [34]–[36] мы разработали подходы p -адической теории вероятностей к исследованию p -адических моделей Поттса на дереве Кэли порядка два. Нас особенно интересовало построение p -адических мер Гиббса для упомянутой модели. Было доказано, что если q делится на p , то для модели Поттса с q состояниями имеют место фазовые переходы. В работе [37] мы ввели новый тип p -адических мер, связанных с моделью Поттса с $q + 1$ состояниями. Такие меры называются *p -адическими квазигиббсовыми мерами* и кардинально отличаются от p -адической меры Гиббса. Заметим, что такие меры дают более естественные конкретные примеры p -адических марковских процессов. Было установлено существование p -адических квазигиббсовых мер для упомянутой модели на дереве Кэли порядка два. Более того, было доказано, что если q делится на p , то возникает сильный фазовый переход. Если q и p являются взаимно простыми, то существует квазифазовый переход. Эти результаты радикально отличаются от результатов работ [35], [36]. Естественно задать вопрос, получим ли мы те же фазовые переходы, если повысим порядок дерева?

Цель настоящей работы – исследовать задачу о фазовом переходе для p -адической модели Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка три. Мы доказываем, что существуют две p -адические меры Гиббса, из которых одна ограничена, а вторая неограничена. Это приводит к возникновению фазового перехода. Заметим, что в работе [38] были исследованы p -адические меры Гиббса модели твердых сфер на дереве Кэли произвольного порядка.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. p -Адиические числа. Далее p – фиксированное простое число, а $\mathbb{Q}_p$ обозначает поле p -адиических чисел, которое представляет собой пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по норме $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемой как

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x = p^r \frac{m}{n}, \quad r, m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь наибольший общий делитель $(m, p) = (n, p) = 1$, т.е. числа m и n не делятся на p . Число r называется p -порядком числа x и обозначается как $\text{ord}_p(x)$. Норма $|\cdot|_p$ является неархимедовой: она удовлетворяет ультраметрическому неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Любое p -адиическое число $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, можно единственным образом представить в виде

$$x = p^{\text{ord}_p(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots),$$

где числа x_j целые, $0 \leq x_j \leq p - 1$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ и $x_0 > 0$. При этом $|x|_p = p^{-\text{ord}_p(x)}$. Обозначим множество всех p -адиических целых чисел и единиц из поля $\mathbb{Q}_p$ как

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p: |x|_p \leq 1\}, \quad \mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p: |x|_p = 1\}$$

соответственно. Любое ненулевое p -адиическое число $x \in \mathbb{Q}_p$ можно единственным образом представить как $x = x^*/|x|_p$, где $x^* \in \mathbb{Z}_p^*$.

Теперь приведем критерий существования решения кубического уравнения

$$x^3 + ax = b \tag{1}$$

на множестве $\mathbb{Z}_p^*$ при $p > 3$, где a, b – два ненулевых p -адиических числа,

$$a = \frac{a^*}{|a|_p}, \quad b = \frac{b^*}{|b|_p}, \quad a^*, b^* \in \mathbb{Z}_p^*,$$

$$a^* = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots, \quad b^* = b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots.$$

Положим $D_0 = -4a_0^3 - 27b_0^2$ и $u_{n+3} = b_0u_n - a_0u_{n+1}$, причем $u_1 = 0$, $u_2 = -a_0$ и $u_3 = b_0$ для $n = \overline{1, p-3}$.

Следующие две теоремы доказаны в работе [39].

ТЕОРЕМА 1. Пусть простое число $p > 3$. Тогда уравнение (1) имеет решение на множестве $\mathbb{Z}_p^*$, если и только если выполняется одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} |a|_p < |b|_p = 1 & \quad \text{и} \quad b_0^{(p-1)/(3,p-1)} \equiv 1 \pmod{p}, \\ |b|_p < |a|_p = 1 & \quad \text{и} \quad (-a_0)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}, \\ |a|_p = |b|_p = 1 & \quad \text{и} \quad D_0u_{p-2}^2 \not\equiv 9a_0^2 \pmod{p}, \\ |a|_p = |b|_p > 1. & \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть простое число $p > 3$. Тогда число $\mathbf{N}_{\mathbb{Z}_p^*}(x^3 + ax - b)$ корней уравнения (1) на множестве $\mathbb{Z}_p^*$ определяется следующими равенствами:

$$\mathbf{N}_{\mathbb{Z}_p^*}(x^3 + ax - b) = \begin{cases} 3, & |a|_p < |b|_p = 1, \quad p \equiv 1 \pmod{3}, \quad b_0^{(p-1)/3} \equiv 1 \pmod{p}, \\ 3, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad D = 0, \\ 3, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad 0 < |D|_p < 1, \\ & 2 \mid \log_p |D|_p, \quad d_0^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}, \\ 3, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad |D|_p = 1, \quad u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}, \\ 2, & |b|_p < |a|_p = 1, \quad (-a_0)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}, \\ 1, & |a|_p < |b|_p = 1, \quad p \equiv 2 \pmod{3}, \\ 1, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad 0 < |D|_p < 1, \\ & 2 \mid \text{ord}_p(D), \quad d_0^{(p-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{p}, \\ 1, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad 0 < |D|_p < 1, \quad 2 \nmid \text{ord}_p(D), \\ 1, & |a|_p = |b|_p = 1, \quad D_0 u_{p-2}^2 \not\equiv 0, 9a_0^2 \pmod{p}, \\ 1, & |a|_p = |b|_p > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $2 \mid X$ (и $2 \nmid X$) означает, что X делится (и соответственно не делится) на 2.

Здесь p -адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится для всех $x \in B(1, 1)$, где $B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}$ для $a \in \mathbb{Q}_p$, $r > 0$. Аналогично p -адическая экспонента определяется как ряд

$$\exp_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

который сходится для всех $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

ЛЕММА 1. [14], [15]. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p < 1, \quad |\log_p(1 + x)|_p = |x|_p < p^{-1/(p-1)}$$

и

$$\log_p(\exp_p(x)) = x, \quad \exp_p(\log_p(1 + x)) = 1 + x.$$

Положим

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1, |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Из леммы 1 получаем, что если $x \in \mathcal{E}_p$, то найдется такой элемент $h \in B(0, p^{-1/(p-1)})$, что $x = \exp_p(h)$.

Основы p -адического анализа и p -адической математической физики можно найти в монографиях [14], [15].

2.2. p -АДическая мера. Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств в X . Говорят, что функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ является p -адической мерой, если для любых подмножеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ (при $i \neq j$), имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j);$$

p -адическая мера называется *вероятностной мерой*, если $\mu(X) = 1$. Одним из важных условий (которое было введено уже в первой теории неархимедова интегрирования Монна–Спрингера [40]) является ограниченность: p -адическая вероятностная мера μ называется *ограниченной*, если $\sup\{|\mu(A)|_p: A \in \mathcal{B}\} < \infty$. Следует отметить, что само по себе условие ограниченности приводит к содержательной теории интегрирования (см., например, работу [41]). При этом в общем случае не требуется, чтобы p -адическая вероятностная мера была ограниченной [14], [17], [19]. За более подробной информацией по поводу p -адических мер мы отсылаем читателя к работам [17], [42], [43].

2.3. Дерево Кэли. Пусть $\Gamma_+^k = (V, L)$ – полубесконечное дерево Кэли порядка $k \geq 1$ с корнем x^0 (у которого каждая вершина имеет в точности $k+1$ ребер, кроме вершины, соответствующей корню x^0 , у которой k ребер). Здесь V – множество вершин, а L – множество ребер. Вершины x и y называются *ближайшими соседями*, что обозначается как $l = \langle x, y \rangle$, если существует ребро, которое их соединяет. Набор пар $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x, x_{d-1} \rangle$ называется *путем* из точки x в точку y . Расстояние $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in V$ на дереве Кэли есть длина кратчайшего пути из x в y .

Напомним координатную структуру в Γ_+^k : каждая вершина x из Γ_+^k (кроме вершины, соответствующей корню x^0) имеет координаты $(i_1, \dots, i_n)$, где $i_m \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq m \leq n$, а для вершины x^0 мы зададим координату как (0) . Вершина с координатой (0) составляет нулевой уровень, а вершины с координатами $(i_1, \dots, i_n)$ образуют n -й уровень решетки (т. е. $d(x^0, x) = n$).

Положим

$$W_n = \{x \in V: d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=1}^n W_m, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L: x, y \in V_n\}.$$

Для вершины $x \in \Gamma_+^k$ введем множество

$$S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\},$$

которое называется *множеством прямых потомков* вершины x .

Используя систему координат, можно определить трансляции дерева Γ_+^k как

$$\tau_{(i_1, \dots, i_n)}(j_1, \dots, j_m) = (i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m).$$

2.4. Обобщенная p -адическая квазигиббсова мера. Определим обобщенную p -адическую квазигиббсову меру в общем контексте, т.е. для моделей с произвольными ближайшими соседями (см. работу [44]).

Пусть $\Phi = \{0, 1, \dots, q-1\}$, где $q \geq 1$; множество Φ называется *пространством состояний* и приписывается вершинам дерева $\Gamma_+^k = (V, \Lambda)$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; аналогично определяются конфигурации σ_n и ω на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (на V_n и W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ (соответственно с $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$ и $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Можно показать, что $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$. Используя это соотношение, для заданных конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ и $\omega \in \Omega_{W_n}$ определим их конкатенацию как

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega)(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{если } x \in V_{n-1}, \\ \omega(x), & \text{если } x \in W_n. \end{cases}$$

Ясно, что $\sigma_{n-1} \vee \omega \in \Omega_{V_n}$.

Пусть H_n – гамильтониан вида

$$H_n(\sigma) = \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \Psi_{x, y}(\sigma), \quad \sigma \in \Omega_{V_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Psi_{x, y}(\sigma) : \Omega_{V_n} \rightarrow \mathbb{Z}$ – заданная функция для каждых x и y .

Далее мы построим обобщенную p -адическую квазигиббсову меру, соответствующую данной модели. Предположим, что $\mathbf{h} : V \setminus \{x^{(0)}\} \rightarrow \mathbb{Q}_p^\Phi$ является отображением:

$$\mathbf{h}_x = (h_{0, x}, h_{1, x}, \dots, h_{q-1, x}), \quad h_{i, x} \in \mathbb{Q}_p, \quad i \in \Phi, \quad x \in V \setminus \{x^{(0)}\}.$$

При заданном $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать p -адическую вероятностную меру $\mu_{\mathbf{h}, \rho}^{(n)}$ на множестве Ω_{V_n} , определяемую как

$$\mu_{\mathbf{h}, \rho}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n, \rho}^{(\mathbf{h})}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}. \quad (2)$$

Здесь $\rho \in \mathbb{Q}_p$, $\sigma \in \Omega_{V_n}$, а $Z_{n, \rho}^{(\mathbf{h})}$ – нормировочный множитель, называемый *статистической суммой*,

$$Z_{n, \rho}^{(\mathbf{h})} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $Z_{n, \rho}^{(\mathbf{h})}$ может равняться нулю, однако мы покажем, что в случае модели Поттса статистическая сумма отлична от нуля. В настоящей работе нас интересует построение распределения в бесконечном объеме с заданными конечномерными распределениями. Более точно, мы хотим найти p -адическую вероятностную меру μ на Ω , совместную с заданными $\mu_{\mathbf{h}, \rho}^{(n)}$, т.е.

$$\mu(\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu_{\mathbf{h}, \rho}^{(n)}(\sigma_n) \quad \text{для всех } \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Вообще говоря, априори неизвестно, существует ли мера μ такого типа, поскольку имеется не так много сведений о топологических свойствах (таких, как компактность) множества всех p -адических мер, определенных даже на компактных пространствах. Заметим, что некоторые свойства множества p -адических мер исследовались в работах [45], [46], однако этих свойств недостаточно, чтобы доказать существование предельной меры. Поэтому мы будем использовать так называемую теорему о p -адическом колмогоровском продолжении [19], [47], основанную на *условии совместности* для мер $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{\omega \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega) = \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad (4)$$

для любых $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$. Согласно теореме о p -адическом колмогоровском продолжении из этого условия следует существование единственной p -адической меры $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ на Ω , удовлетворяющей условию (3). Говорят, что такая мера $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ является *обобщенной p -адической квазигиббсовой мерой*. Более общая теория p -адических мер была развита в работе [48].

Рассмотрим множество всех обобщенных p -адических квазигиббсовых мер, ассоциированных с функциями $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_x, x \in V\}$. Если имеются хотя бы две различные обобщенные p -адические квазигиббсовы меры такие, что по крайней мере одна из них является неограниченной, то будем говорить, что имеет место *фазовый переход*. Если найдутся две различные функции $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$, определенные на $\mathbb{N}$, такие, что существуют соответствующие им меры $\mu_{\mathbf{s},\rho}$ и $\mu_{\mathbf{h},\rho}$, которые являются ограниченными, то мы будем говорить, что имеет место *квазифазовый переход*. Если найдутся две различные функции $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$, определенные на $\mathbb{N}$, такие, что существуют соответствующие им меры $\mu_{\rho,\mathbf{s}}$ и $\mu_{\rho,\mathbf{h}}$, одна из которых является ограниченной, а другая – неограниченной, и найдется такая последовательность множеств $\{A_n\} \subset \Omega_{V_n}$, что $|\mu_{\rho,\mathbf{s}}(A_n)|_p \rightarrow 0$ и $|\mu_{\rho,\mathbf{h}}(A_n)|_p \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то будем говорить, что имеет место *сильный фазовый переход* [44].

3. p -АДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА И ЕЕ p -АДИЧЕСКИЕ КВАЗИГИББСОВЫ МЕРЫ

В данном разделе мы рассмотрим p -адическую модель Поттса, в которой спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Далее мы всегда будем предполагать, что $q \geq 3$. В этом случае $\Psi_{x,y}(\sigma) = \delta_{\sigma(x),\sigma(y)}$ для каждого $\sigma \in \Omega_{V_n}$, т. е. гамильтониан модели Поттса с q состояниями имеет вид

$$H_n(\sigma) = \sum_{(x,y) \in L_n} \delta_{\sigma(x),\sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_{V_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где δ – символ Кронекера. Заметим, что при $q = 1$ эта модель сводится к p -адической модели Изинга, которая исследовалась в работах [47], [49].

При заданном $\rho \in \mathbb{Q}_p$ можно построить обобщенные p -адические квазигиббсовы меры, соответствующие модели Поттса с q состояниями. Ниже мы рассмотрим вопрос существования фазового перехода в модели Поттса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\rho = p$, то обобщенная p -адическая квазигиббсова мера сводится к p -адической квазигиббсовой мере [37]. Если $\rho \in \mathcal{E}_p$ и $h_x \in \mathcal{E}_p$, то данная мера сводится к p -адической мере Гиббса [35].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работах [35]–[37], [47], [49] исследовались фазовые переходы в классе p -адических квазигиббсовых мер и p -адических мер Гиббса для моделей Изинга и Поттса на дереве Кэли порядка два. Для счетного числа состояний Φ соответствующие p -адические меры Гиббса исследовались в работах [50], [51], а обобщенные p -адические квазигиббсовы меры – в работе [52].

Используя те же приемы, что и в работах [35], [50], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Меры $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ (см. (2)), ассоциированные с моделью Поттса (5) с q состояниями, удовлетворяют условию совместности (4), если и только если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено уравнение

$$\hat{h}_x = \prod_{y \in S(x)} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{h}}_y; \rho). \quad (6)$$

Здесь и ниже вектор $\hat{\mathbf{h}} = (\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{q-1}) \in \mathbb{Q}_p^{q-1}$ определяется через вектор $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{Q}_p^q$ формулами

$$\hat{h}_i = \frac{h_i}{h_0}, \quad i = 1, \dots, q-1, \quad (7)$$

а отображение $\mathbf{F}: \mathbb{Q}_p^{q-1} \times \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p^{q-1}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}; \rho) &= (F_1(\mathbf{x}; \rho), \dots, F_{q-1}(\mathbf{x}; \rho)), \\ F_i(\mathbf{x}; \rho) &= \frac{(\rho-1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \rho}, \quad \mathbf{x} = \{x_i\} \in \mathbb{Q}_p^{q-1}, \quad i = 1, \dots, q-1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Без потери общности можно полагать, что $h_0 = 1$. В противном случае в уравнении (2) следует умножить и поделить выражение в правой части на $\prod_{x \in W_n} h_{0,x}$, и после замены h_i на h_i/h_0 мы получим требуемое равенство.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ p -АДИЧЕСКИХ КВАЗИГИББСОВЫХ МЕР

В данном разделе мы установим существование обобщенных p -адических квазигиббсовых мер для модели Поттса (5) на дереве Кэли порядка три, т. е. при $k = 3$. Далее будем всегда предполагать, что $p > 3$. Ниже мы также предполагаем, что $\rho \in \mathcal{E}_p$. В соответствии с леммой 1 это означает, что $|\rho|_p = 1$ и $|\rho - 1|_p < 1$.

Напомним, что функция $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_x\}_{x \in V \setminus \{x^0\}}$ называется трансляционно-инвариантной, если $\mathbf{h}_{\tau_x(y)} = \mathbf{h}_y$ для всех $x, y \in V \setminus \{x^0\}$. p -Адическая мера $\mu_{\mathbf{h}}$, соответствующая трансляционно-инвариантной функции $\mathbf{h}$, называется трансляционно-инвариантной обобщенной p -адической квазигиббсовой мерой. Заметим, что из трансляционной инвариантности для $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_x\}_{x \in V \setminus \{x^0\}}$ следует, что $\mathbf{h}_x = \mathbf{h}_y$ для всех $x, y \in V \setminus \{x^0\}$.

Сначала ограничимся описанием трансляционно-инвариантных решений уравнения (6), а именно $\mathbf{h}_x = \mathbf{h}$ (где $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_q)$) для всех $x \in V$. Тогда уравнение (6) можно переписать в виде

$$\hat{h}_i = \left(\frac{(\theta - 1)\hat{h}_i + \sum_{j=1}^q \hat{h}_j + 1}{\sum_{j=1}^q \hat{h}_j + \theta} \right)^3, \quad i = 1, \dots, q. \quad (8)$$

Как можно видеть, $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, 1, \dots, 1)$ представляет собой инвариантную прямую для уравнения (8) (здесь $m = 1, \dots, q - 1$). На такой прямой уравнение (8) сводится к следующей задаче о неподвижной точке:

$$x = f_\rho(x), \quad \text{где} \quad f_\rho(x) = \left(\frac{\rho x + q - 1}{x + \rho + q - 2} \right)^3. \quad (9)$$

Простое вычисление показывает, что это уравнение можно записать как

$$(x - 1)(x^3 - Ax^2 - Bx + C) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \rho^3 - 3\rho - 3q + 5, \\ B &= \rho(\rho - 3)^2 + 9q + 3\rho q(\rho - 2) - 3q^2 - 7, \\ C &= (q - 1)^3. \end{aligned}$$

Видно, что решение $x_0 = 1$ определяет p -адическую меру Гиббса μ_0 .

Теперь нам нужно найти другие решения уравнения (9), т. е. решить уравнение

$$x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0. \quad (10)$$

С помощью стандартной подстановки $x = z + A/3$ данное уравнение сводится к

$$z^3 + \alpha z = \beta, \quad \text{где} \quad \alpha = -\left(B + \frac{A^2}{3}\right), \quad \beta = \frac{2}{3^3}A^3 + \frac{AB}{3} - C. \quad (11)$$

С помощью прямых вычислений получаем

$$A = 3 + 3(1 - \rho) + (\rho^3 - 1) - 3q, \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{(\rho - 1)^2}{3}(-9 + 9q - 9(\rho - 1) + 6q(\rho - 1) - 9(\rho - 1)^2 - 6(\rho - 1)^3 - (\rho - 1)^4), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(\rho - 1)^3}{27}(54 - 81q + 27q^2 + 81(\rho - 1) - 81q(\rho - 1) + 108(\rho - 1)^2 - 81q(\rho - 1)^2 + \\ &\quad + 81(\rho - 1)^3 - 18q(\rho - 1)^3 + 54(\rho - 1)^4 + 18(\rho - 1)^5 + 2(\rho - 1)^6). \end{aligned} \quad (14)$$

В работе [35] мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $|q|_p = 1$ и $\rho \in \mathcal{E}_p$. Тогда существует единственная p -адическая мера Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка $k \geq 1$.

Из этой теоремы следует, что если $|q|_p = 1$, то не существует p -адических мер Гиббса, кроме μ_0 . Однако далее мы покажем, что при заданных условиях можно найти обобщенные p -адические квазигиббсовы меры.

Чтобы найти нетривиальные p -адические меры Гиббса, сначала предположим, что $|q|_p < 1$. При этом условии с помощью сильного неравенства треугольника из формул (13), (14) находим, что $|\alpha|_p = |\rho - 1|_p^2$ и $|\beta|_p = |\rho - 1|_p^3$. Подчеркнем, что существование нетривиальной p -адической меры Гиббса означает, что решение уравнения (10) принадлежит $\mathcal{E}_p$, откуда следует, что можно найти такое $h \in \mathbb{Q}_p$, что $x = \exp_p(h)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho \in \mathcal{E}_p$ и $|q|_p < 1$. Тогда решение x уравнения (10) принадлежит $\mathcal{E}_p$, если и только если соответствующее решение уравнения (11) принадлежит $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала положим $\gamma = 3(1 - \rho) + (\rho^3 - 1) - 3q$. Ясно, что $|\gamma|_p < 1$. Предположим, что $x \in \mathcal{E}_p$ – решение уравнения (10). Тогда для решения уравнения (11) с учетом (12) получаем

$$|z|_p = \left| x - \frac{A}{3} \right|_p = \left| x - 1 + 1 - \frac{3 + \gamma}{3} \right|_p = |x - 1 - \gamma|_p < 1.$$

Это означает, что решение уравнения (11) должно принадлежать $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$.

Теперь предположим, что решение z уравнения (11) принадлежит $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$. Тогда $x = z + A/3$ является решением уравнения (10). Из (12) находим, что $|A|_p = 1$, и получаем $|x|_p = |z + A/3|_p = 1$. Более того, имеем

$$|x - 1|_p = \left| z + \frac{A}{3} - 1 \right|_p = |z + \gamma|_p < 1,$$

и поэтому $x \in \mathcal{E}_p$. Лемма доказана.

Итак, чтобы найти нетривиальные p -адические меры Гиббса, необходимо решить уравнение (11) на множестве $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$. Поэтому предположим, что решение z уравнения (11) имеет вид $z = p^k y$, где $y \in \mathbb{Z}_p^*$ и $k \geq 1$. Подставив последнее выражение в уравнение (11), находим, что y удовлетворяет уравнению

$$y^3 + ay = b, \quad \text{где } a = p^{-2k} \alpha, \quad b = p^{-3k} \beta. \quad (15)$$

Ясно, что $|a|_p = (p^k |\rho - 1|_p)^2$ и $|b|_p = (p^k |\rho - 1|_p)^3$. Теперь выберем k так, чтобы было выполнено равенство $p^k |\rho - 1|_p = 1$. Заметим, что такое число действительно существует. Итак, $|a|_p = |b|_p = 1$.

Теперь перейдем к решению уравнения (15) на множестве $\mathbb{Z}_p^*$. Для этого применим теорему 1. Рассмотрим канонический вид чисел a и b :

$$a = a_0 + a_1 p + \dots, \quad b = b_0 + b_1 p + \dots, \quad a_0, b_0 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

Тогда из формул (13) и (14) следует, что

$$a = p - 3 + (p - 1)p + 3q - 3(\rho - 1) + \eta p^n, \quad b = 2 - 3q + 3(\rho - 1) + \eta_1 p^m, \quad (16)$$

где $n, m \geq 2$ и $\eta, \eta_1 \in \mathbb{Z}_p$. Итак, $a_0 = p - 3$ и $b_0 = 2$. Отсюда $D_0 = -4p(p^2 - 9p + 27)$, где $D_0 = -4a_0^3 - 27b_0^2$. Это означает, что $D_0 \equiv 0 \pmod{p}$. В этом случае с учетом теоремы 2 нам необходимо вычислить $D = -4a^3 - 27b^2$. Предположим, что $|q|_p \leq p^{-3}$ и $|\rho - 1|_p \leq p^{-3}$. Тогда из соотношений (16) находим

$$a^3 \equiv (p - 3)^3 + 3(p - 3)^2(p - 1)p + 3(p - 3)(p - 1)^2p^2 \pmod{p^3}, \quad b^2 \equiv 4 \pmod{p^3}.$$

Отсюда получаем

$$D = -(4p(p^2 - 9p + 27) - 4 \cdot 3^3p + 45p^2 + \varepsilon p^3) = -p^2(9 + \varepsilon p), \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p.$$

Это означает, что $d_0 = 9$ и $\text{ord}_p(D)$ делится на 2. Более того, $d_0^{p^{-2/2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда согласно теореме 2 можно заключить, что уравнение (15) имеет три различных решения на множестве $\mathbb{Z}_p^*$.

Таким образом, уравнение (11) имеет три различных решения, принадлежащих множеству $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$. Поэтому в силу леммы 2 уравнение (10) имеет три решения. Пусть μ_i , $i = 1, 2, 3$, обозначают соответствующие p -адические меры Гиббса. Опираясь на теорему 3, можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > 3$, $|q|_p \leq p^{-3}$ и $\rho \in \mathcal{E}_p$, причем $|\rho - 1|_p \leq p^{-3}$. Тогда для p -адической модели Поттса (5) на дереве Кэли порядка три существуют четыре трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса.

Заметим, что в нашем случае для существования мер Гиббса необходимо дополнительное условие $|q|_p < p^{-3}$, в то время как в работе [35] в случае $|q|_p < 1$ нам не требовались дополнительные условия для существования p -адических мер Гиббса.

Теперь предположим, что $|q|_p = 1$, и покажем, что в этом случае существует обобщенная p -адическая квазигиббсова мера. Далее для простоты наложим на q следующие ограничения:

$$|q - 1|_p = 1, \quad |2q - 1|_p = 1. \quad (17)$$

Тогда из соотношений (12)–(14) немедленно находим, что $|A|_p = 1$, $|\alpha|_p = |\rho - 1|_p^2$ и $|\beta|_p = |\rho - 1|_p^3$. В этом случае уравнение (11) не имеет решения, принадлежащего множеству $\mathbb{Z}_p^*$. Действительно, предполагая, что $z \in \mathbb{Z}_p^*$ является решением, получаем $|\alpha|_p = |z\alpha|_p = |\beta - z^3|_p = 1$, однако это противоречит тому, что $|\alpha|_p < 1$. Следовательно, любое решение уравнения (11) принадлежит $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^*$. Теперь, используя те же аргументы, что и ранее, сведем уравнение (11) к уравнению (15) с учетом того, что $y \in \mathbb{Z}_p^*$, $a = p^{-2k}\alpha$ и $b = p^{-3k}\beta$. Аналогично, выберем k так, чтобы $p^k|\rho - 1|_p = 1$. Тогда $|a|_p = |b|_p = 1$.

Предположим, что $|\rho - 1|_p \leq p^{-3}$. Тогда из формул (13) и (14) получаем

$$a \equiv 3(q - 1) \pmod{p^3}, \quad b \equiv 2(q - 1)(2q - 1) \pmod{p^3}. \quad (18)$$

Вычислим $D = -4a^3 - 27b^2$. Из соотношений (18) находим

$$\begin{aligned} D &= -(4 \cdot 27(q - 1)^3 + 27 \cdot 4(q - 1)^2(2q - 1)^2 + \eta|\rho - 1|) = \\ &= -108q(q - 1)^2(4q - 3) - \eta|\rho - 1|_p \end{aligned}$$

для некоторого $\eta \in \mathbb{Z}_p$. Таким образом, если $|\rho - 1|_p < |4q - 3|_p$, то $|D|_p = |4q - 3|_p$.

Теперь с учетом теоремы 2 можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p > 3$, $\rho \in \mathcal{E}_p$, где

$$|\rho - 1|_p \leq p^{-3}, \quad |\rho - 1|_p < |4q - 3|_p, \quad |q|_p = |q - 1|_p = |2q - 1|_p = 1.$$

Пусть $u_{n+3} = b_0 u_n - a_0 u_{n+1}$ при $u_1 = 0$, $u_2 = -a_0$, $u_3 = -b_0$, где

$$a_0 \equiv 3(q - 1) \pmod{p}, \quad b_0 \equiv 2(q - 1)(2q - 1) \pmod{p}, \quad a_0, b_0 \in \{1, \dots, p - 1\}.$$

Тогда для p -адической модели Поттса (5) с q состояниями на дереве Кэли порядка три существует одна трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса, а также:

1) три трансляционно-инвариантные обобщенные p -адические квазигиббсовы меры, если выполнено одно из следующих условий:

а) $|4q - 3|_p = 1$ и $u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$,

б) $|4q - 3|_p = p^{-2k}$ для некоторого $k \geq 1$ и $-108q(q - 1)^2(4q - 3)p^{-2k}$ является квадратичным вычетом по модулю p ;

2) одна трансляционно-инвариантная обобщенная p -адическая квазигиббсова мера, если выполнено одно из следующих условий:

а) $D_0 u_{p-2}^2 \not\equiv 0, 9a_0^2 \pmod{p}$,

б) $|4q - 3|_p = p^{-(2k+1)}$ при $k \geq 1$,

в) $|4q - 3|_p = p^{-2k}$ и $-108q(q - 1)^2(4q - 3)p^{-2k}$ не является квадратичным вычетом по модулю p .

В других случаях трансляционно-инвариантной обобщенной p -адической квазигиббсовой меры не существует.

Следует отметить, что в работе [35] не исследовался случай $|q|_p = 1$. Из теоремы 6 следует, что в рассматриваемых случаях можно найти новый тип мер Гиббса.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть $p = 5$ и $q = 4$. Ясно, что $|q|_5 = 1$ и равенства (17) выполнены. Из формул (13) и (14) получаем $a_0 = 4$, $b_0 = 2$. Можно проверить, что $D_0 = -4 \cdot 91$ и $u_3 = -2$. Поэтому $D_0 u_3^2 \equiv 9a_0^2 \pmod{5}$, откуда с учетом теоремы 2 следует, что уравнение (11) не имеет решения. В этом случае для модели существует только p -адическая мера Гиббса.

ПРИМЕР 2. Пусть $p = 5$ и $q = 7$. Ясно, что $|q|_5 = 1$ и равенства (17) выполнены при $|4q - 3|_5 = 5^{-2}$. Можно видеть, что $108q(q - 1)^2(4q - 3)5^{-2} \equiv 1 \pmod{5}$. Поскольку 1 является квадратичным вычетом по модулю 5, $108q(q - 1)^2(4q - 3)5^{-2}$ также является квадратичным вычетом по модулю 5. Поэтому в силу теоремы 6 существуют три трансляционно-инвариантные обобщенные p -адические квазигиббсовы меры.

5. ОГРАНИЧЕННОСТЬ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

В предыдущем разделе мы установили существование обобщенных p -адических квазигиббсовых мер. В данном разделе мы исследуем ограниченность мер и, более того, установим наличие фазовых переходов.

Сначала докажем вспомогательный результат. Предположим, что $\mathbf{h}$ – решение уравнения (6). Тогда найдется такая постоянная $a_{\mathbf{h}}(x) \in \mathbb{Q}_p$, что

$$\prod_{y \in S(x)} \sum_{j=0}^{q-1} \rho^{\delta_{ij}} h_{j,y} = a_{\mathbf{h}}(x) h_{i,x}$$

для любого $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Из уравнения (6) следует, что

$$Z_{n+1,\rho}^{(\mathbf{h})} = A_{\mathbf{h},n} Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}. \quad (19)$$

В данном разделе мы в основном исследуем меры, соответствующие решениям уравнения (9). Пусть $\tilde{x}$ – решение уравнения (9), а $\tilde{\mu}$ – соответствующая такому решению p -адическая мера. Тогда согласно (19) статистическая сумма $Z_{\rho,n}^{(\tilde{x})}$, соответствующая мере $\tilde{\mu}$, имеет вид

$$Z_{\rho,n}^{(\tilde{x})} = a_i^{|V_{n-1}|}, \quad \text{где } a = (\tilde{x} + \rho + q - 2)^3. \quad (20)$$

Можно проверить, что $a \neq 0$ при $q \geq 3$.

Для заданной конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ положим $\#\sigma = \{x \in W_n : \sigma(x) = 1\}$. Из соотношений (2), (7) и (20) находим

$$|\tilde{\mu}(\sigma)|_p = \frac{|\rho|_p^{H(\sigma)}}{|Z_{\rho,n}^{(\tilde{x})}|_p} \prod_{x \in W_n} |h_{\sigma(x),x}|_p = \frac{|\tilde{x}|_p^{\#\sigma} |\rho|_p^{H(\sigma)}}{|\tilde{x} + \rho + q - 2|_p^{3|V_{n-1}|}}. \quad (21)$$

Рассмотрим два случая: $|q|_p < 1$ и $|q|_p = 1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $p > 3$, $|q|_p \leq p^{-3}$ и $\rho \in \mathcal{E}_p$, причем $|\rho - 1|_p \leq p^{-3}$. Тогда для p -адической модели Поттса (5) с q состояниями на дереве Кэли порядка три все p -адические меры Гиббса μ_k , $k = 0, 1, 2, 3$, являются неограниченными. Более того, имеет место фазовый переход.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в условиях теоремы существуют четыре p -адические меры Гиббса μ_k , $k = 0, 1, 2, 3$ (см. теорему 5). В этом случае для решений x_k , $k = 0, 1, 2, 3$, уравнения (9) имеем $x_k \in \mathcal{E}_p$. Поэтому

$$|x_k + \rho + q - 2|_p = |x_k - 1 + \rho - 1 + q|_p \leq \frac{1}{p}.$$

Тогда из соотношения (21) находим

$$|\mu_k(\sigma)|_p = \frac{1}{|x_k + \rho + q - 2|_p^{3|V_{n-1}|}} \geq p^{3|V_{n-1}|},$$

откуда следует неограниченность μ_k . Таким образом, имеет место фазовый переход.

Теперь рассмотрим случай $|q|_p = 1$, для которого верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $p > 3$, $\rho \in \mathcal{E}_p$, где

$$|\rho - 1|_p \leq |4q - 3|_p, \quad |q|_p = |q - 1|_p = |2q - 1|_p = 1.$$

Пусть μ_0 – p -адическая мера Гиббса. Предположим, что условия теоремы 6 выполнены, т. е. существует по крайней мере одна трансляционно-инвариантная обобщенная p -адическая квазигиббсова мера $\tilde{\mu}$ для p -адической модели Поттса (5) с q состояниями на дереве Кэли порядка три. Тогда мера μ_0 является ограниченной, а мера $\tilde{\mu}$ – неограниченной. Это означает, что имеет место фазовый переход.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что мера μ_0 соответствует решению $x_0 = 1$. Ясно, что

$$|x_0 + \rho + q - 2|_p = |\rho - 1 + q|_p = 1.$$

Поэтому из равенства (21) находим

$$|\mu_0(\sigma)|_p = \frac{1}{|x_0 + \rho + q - 2|_p^{3|V_{n-1}|}} = 1,$$

что приводит к ограниченности меры μ_0 .

Теперь предположим, что $\tilde{\mu}$ соответствует решению $\tilde{x}$ уравнения (10). Заметим, что $\tilde{x} = \tilde{z} + A/3$, где $\tilde{z}$ есть такое решение уравнения (11), что $|\tilde{z}|_p < 1$. Тогда из формулы (12) имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{x} + \rho + q - 2|_p &= \left| \tilde{z} + \frac{A}{3} + \rho + q - 2 \right|_p = \\ &= \left| \tilde{z} + 1 - (\rho - 1) + \frac{\rho^3 - 1}{3} - q + \rho + q - 2 \right|_p = |3\tilde{z} + (\rho^3 - 1)|_p \leq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

С учетом этого равенства из соотношения (21) получаем $|\tilde{\mu}(\sigma)|_p \geq p^{3|V_{n-1}|}$, следовательно, мера $\tilde{\mu}$ является неограниченной. Таким образом, имеет место фазовый переход.

Благодарности. Ф. Мухамедов выражает благодарность Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) и Ministry of Higher Education of Malaysia (грант ERGS13-024-0057) за поддержку, а также Университету Zirve за гостеприимство.

Список литературы

- [1] F. Y. Wu, *Rev. Modern Phys.*, **54**:1 (1982), 235–268.
- [2] F. Peruggi, F. di Liberto, G. Monroy, *Phys. A*, **141**:1 (1987), 151–186.
- [3] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [4] Н. О. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [5] I. Ya. Areféva, B. Dragović, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **200**:4 (1988), 512–514.
- [6] I. Ya. Areféva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:24 (1991), 4341–4358.
- [7] P. G. O. Freund, M. Olson, *Phys. Lett. B*, **199**:2 (1987), 186–190.
- [8] E. Marinary, G. Parisi, *Phys. Lett. B*, **203**:1–2 (1988), 52–56.
- [9] I. V. Volovich, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:1 (2010), 77–87.
- [10] I. V. Volovich, *Class. Quantum Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [11] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, *J. Phys. A*, **32**:50 (1999), 8785–8791, arXiv: cond-mat/9904360.

- [12] A. Yu. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Mathematics and its Applications, **309**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [13] A. Yu. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [14] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta-Function*, Graduate Texts in Mathematics, **58**, Springer, New York–Heidelberg, 1977.
- [15] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [16] A. Besser, C. Deninger, *J. Reine Angew. Math.*, **517** (1999), 19–50.
- [17] A. Yu. Khrennikov, *Indag. Math. New Ser.*, **7**:3 (1996), 311–330.
- [18] A. Yu. Khrennikov, S. Yamada, A. van Rooij, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **6**:1 (1999), 21–32.
- [19] S. V. Lüdkovsky, A. Yu. Khrennikov, *Markov Process. Relat. Fields*, **9**:1 (2003), 131–162.
- [20] S. V. Lüdkovsky, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2005**:23 (2005), 3799–3817.
- [21] S. Albeverio, W. Karwowski, *Stochastic Process. Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.
- [22] S. Albeverio, X. Zhao, *Markov Process. Related Fields*, **6**:2 (2000), 239–256.
- [23] S. Albeverio, X. Zhao, *Ann. Probab.*, **28**:4 (2000), 1680–1710.
- [24] M. Del Muto, A. Figà-Talamanca, *Expo. Math.*, **22**:3 (2004), 197–211.
- [25] A. N. Kochubei, *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **244**, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [26] K. Yasuda, *Osaka J. Math.*, **37**:4 (2000), 967–985.
- [27] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
- [28] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **19**:1 (2005), 61–76.
- [29] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:2 (2006), 199–213.
- [30] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *Theory of p-adic Distributions. Linear and Nonlinear Models*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **370**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [31] H. Kaneko, A. N. Kochubei, *Tohoku Math. J.*, **59**:4 (2007), 547–564.
- [32] С. В. Козырев, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 103–126.
- [33] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, *Physica A*, **359**:1 (2006), 222–240, arXiv: cond-mat/0603685; 241–266, arXiv: cond-mat/0603687; **378** (2007), 283–298, arXiv: cond-mat/0603694.
- [34] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 500–507.
- [35] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Indag. Math. New Ser.*, **15**:1 (2004), 85–99.
- [36] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:2 (2005), 277–290.
- [37] F. M. Mukhamedov, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:3 (2010), 241–251.
- [38] D. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz, *Markov Process. Relat. Fields*, **18**:1 (2012), 701–720, arXiv: 1107.4884.
- [39] Ф. Мухамедов, Б. Омиров, Н. Сабуров, К. Масутова, *Сибирск. матем. журн.*, **54**:3 (2013), 637–654.
- [40] A. Monna, T. Springer, *Indag. Math.*, **25** (1963), 634–653.
- [41] A. Yu. Khrennikov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:2 (2007), 142–159.
- [42] V. Anashin, A. Khrennikov, *Applied Algebraic Dynamics*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **49**, Walter de Gruyter, Berlin, 2009.
- [43] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, *p-Adic Deterministic and Random Dynamical Systems*, Mathematics and its Applications, **574**, Kluwer, Dordrecht, 2004.

- [44] F. Mukhamedov, *Rep. Math. Phys.*, **70**:3 (2012), 385–406.
- [45] A. K. Katsaras, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:3 (2009), 190–203.
- [46] A. K. Katsaras, *J. Math. Anal. Appl.*, **365**:1 (2010), 342–357.
- [47] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, *Узб. матем. журн.*, **4** (1998), 23–29.
- [48] A. K. Katsaras, *Indag. Math. New Ser.*, **19**:4 (2008), 579–600.
- [49] M. Khamraev, F. M. Mukhamedov, *J. Math. Phys.*, **45**:11 (2004), 4025–4034.
- [50] A. Khrennikov, F. M. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2923–2937.
- [51] F. Mukhamedov, “On the existence of generalized Gibbs measures for the one-dimensional p -adic countable state Potts model”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 177–188.
- [52] F. M. Mukhamedov, *J. Inequal. Appl.*, **2012**:4 (2012), 104, 12 pp.

Поступила в редакцию 17.02.2013