Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дуплий, А. Т. Котвицкий, Обобщенное взаимодействие в мультигравитации, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 137–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:27:37

© 2013 г.

С. А. Дуплий*, А. Т. Котвицкий*

ОБОБЩЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ

Рассмотрен общий подход к описанию взаимодействия моделей мультигравитации в D -мерном пространстве-времени. Приведены различные возможности для обобщения инвариантного объема. Выведен наиболее общий вид потенциала взаимодействия, который в случае бигравитации переходит в модель типа Паули–Фирца. Подробный анализ данной модели, проведенный в формализме $(3 + 1)$ -разложения, а также требование отсутствия духов приводят к тому, что данная бигравитационная модель в пределе слабого поля полностью эквивалентна модели Паули–Фирца. Таким образом, на конкретном примере показано, что введение взаимодействия между метриками эквивалентно введению массы гравитона.

Ключевые слова: мультигравитация, бигравитация, массивная гравитация, инвариантный объем, потенциал взаимодействия, модель Паули–Фирца.

DOI: 10.4213/tmf8523

1. ВВЕДЕНИЕ

Мультигравитация наряду с конформной гравитацией [1] и скалярными теориями [2] представляет собой одно из возможных расширений общей теории относительности [3], [4]. В первых работах частный случай мультигравитации (бигравитация) назывался f - g theory или strong gravity [5]–[7]. В дальнейшем эта конструкция успешно применялась в квантовой гравитации и теории бран [8]–[10], теориях с дискретными размерностями [11], [12], теории перенормировок [13], массивной гравитации [14], а также при объяснении таких экспериментальных фактов, как темная энергия и темная материя [15]–[17], ускоренное расширение Вселенной [18], [19]. Поэтому важным является рассмотрение нелинейных формулировок мультигравитации (для бигравитации это рассматривалось в работе [20]).

С другой стороны, в теории массивной гравитации прогресс связан с работой [21], где продемонстрировано расширение массового слагаемого Паули–Фирца для линеаризованной теории гравитации и показано, что в такой модели нет духовых мод [22].

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина.
E-mail: sduplij@gmail.com

Далее теория была расширена на общую дополнительную метрику [23]. Основные свойства подобных теорий были рассмотрены в работах [24], [25], а в работе [26] было доказано отсутствие духовых слагаемых в нелинейных моделях. В теориях гравитации с ненулевой массой существует особенность, которая проявляется в том, что при стремлении массы гравитона к нулю теория не переходит в общую теорию относительности [27], [28]. Механизм Вайнштейна [29] позволяет избежать такой неоднородности в пространстве параметров [23], [30], кроме того, такая неоднородность может устраняться в случае неплоской фоновой метрики [31], [32].

В настоящей работе мы рассматриваем общий подход к описанию взаимодействия моделей мультигравитации в D -мерном пространстве-времени ($D > 3$). В разделе 2 мы изучаем различные возможности обобщения инвариантного объема взаимодействия $d\Omega_{\text{int}}^{(N)}$, на который налагаются ограничения, состоящие в том, что $d\Omega_{\text{int}}^{(N)}$ должен быть скаляром, а в пределе совпадения всех метрик инвариантный объем должен переходить в стандартный $\sqrt{g} d^D x$. Также функция $d\Omega_{\text{int}}^{(N)}$ должна быть монотонной и однородной по всем метрикам. В разделе 3 мы выводим наиболее общий вид потенциала взаимодействия и показываем, что в самом простом случае двух метрик (бигравитации) он переходит в модель типа Паули–Фирца. Подробный анализ данной модели, проведенный в формализме $(3+1)$ -разложения, и требование отсутствия духов приводят к тому, что данная бигравитационная модель в пределе слабого поля полностью эквивалентна модели Паули–Фирца. Фактически это означает, что введение взаимодействия между тензорными полями $g_{\mu\nu}^{(1)}$ и $g_{\mu\nu}^{(2)}$ может быть эквивалентно введению массы гравитона. В приложении мы приводим новый способ вычисления $\sqrt{g}$ для малых поправок, который можно использовать для любой фоновой метрики. В случае плоского фоновое пространство-времени Минковского получается стандартное выражение.

2. МУЛЬТИГРАВИТАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОБЪЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим совокупность N различных вселенных, каждая из которых описывается метрикой $g_{\mu\nu}^{(i)}$, где $i = 1, \dots, N$. В D -мерном пространстве-времени мы используем сигнатуру $(+, \overbrace{-, \dots, -}^{D-1})$. Для i -й вселенной действие запишем в виде

$$S_{G(i)} = \int d\Omega^{(i)} [L_{\text{gr}}^{(i)}(g^{(i)}) + L_{\text{mat}}(g^{(i)}, \Phi^{(i)})], \quad (1)$$

где $d\Omega^{(i)} = d^4 x \sqrt{g^{(i)}}$ – инвариантный объем, $g^{(i)} = |\det(g_{\mu\nu}^{(i)})|$ – скалярная плотность веса 2 и $g_{\mu\nu}^{(i)}$ – метрический тензор в i -й вселенной, $L_{\text{gr}}^{(i)}(g^{(i)})$ – лагранжиан, описывающий гравитационное поле, а лагранжиан $L_{\text{mat}}^{(i)}(g^{(i)}, \Phi^{(i)})$ описывает взаимодействие гравитации и материальных полей $\Phi^{(i)}$. При этом интегрирование в (1) ведется по общему многообразию для N вселенных.

В предположении “слабо связанных миров” [20] и “no-go”-теоремы [33] общее действие для N безмассовых гравитонов записывается в виде суммы чисто гравитационных действий вида (1):

$$S_0 = \sum_{i=1}^N S_{G(i)}.$$

В предположении, что “слабо связанные миры” взаимодействуют только за счет гравитационных полей, полное действие мультигравитации можно записать в виде

$$S_{\text{full}} = \sum_i^N S_{G(i)} + S_{\text{int}},$$

где последнее слагаемое S_{int} описывает взаимодействие вселенных. Выбор этого слагаемого является ключевым при описании моделей мультигравитации [34].

В общем случае D измерений для N -гравитации действие S_{int} можно представить как

$$S_{\text{int}} = \int d^D x W(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}),$$

где $d^D x$ и $W(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$ – скалярные плотности противоположных весов. По аналогии со стандартным инвариантным объемом $d\Omega = d^4 x \sqrt{g}$ в общей теории относительности [3], [4] представим выражение $d^D x W(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$ как

$$d^D x f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) V(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)});$$

в данном выражении $V(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}) \equiv V(\mathbf{g}^{(i)})$ – скалярный потенциал взаимодействия, а $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$ является гладкой, положительной функцией от N положительных (действительных) аргументов и имеет вес $+1$. Введем инвариантный объем взаимодействия

$$d\Omega_{\text{int}}^{(N)} = d^D x f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}), \quad (2)$$

который должен быть скаляром. Кроме того, в пределе совпадения [34]

$$g_{\mu\nu}^{(i)} = \dots = g_{\mu\nu}^{(N)} \equiv g_{\mu\nu}$$

инвариантный объем взаимодействия должен переходить в стандартный инвариантный объем: $d\Omega_{\text{int}}^{(N)} \rightarrow d\Omega$. Чтобы удовлетворить всем вышеперечисленным требованиям, функция $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$ должна обладать следующими свойствами:

- 1) идемпотентность в пределе совпадения, $f(\sqrt{g}, \dots, \sqrt{g}) = \sqrt{g}$;
- 2) монотонность;
- 3) однородность по всем аргументам, $f(t\sqrt{g_1}, \dots, t\sqrt{g_N}) = t^\alpha f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$ (из идемпотентности следует, что $\alpha = 1$);
- 4) симметричность по всем аргументам.

Из требования однородности и симметричности функции $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$ следует, что инвариантный объем взаимодействия может быть представлен как [34]

$$d\Omega_{\text{int}}^{(N)} = d^D x f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) = d^D x \sqrt[2N]{g_1 \dots g_N} f(y_1^{(N)}, \dots, y_N^{(N)}),$$

где

$$\begin{aligned} y_1^{(N)} &= \sqrt[2N]{g_1^{N-1} g_2^{-1} \cdots g_N^{-1}}, \\ y_2^{(N)} &= \sqrt[2N]{g_1^{-1} g_2^{N-1} \cdots g_N^{-1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ y_N^{(N)} &= \sqrt[2N]{g_1^{-1} g_2^{-1} \cdots g_{N-1}^{-1} g_N^{N-1}}. \end{aligned}$$

Переменные $y_i^{(N)}$, очевидно, удовлетворяют тождеству

$$y_1^{(N)} y_2^{(N)} \dots y_N^{(N)} = 1,$$

следовательно, функция f в действительности является функцией от $N - 1$ аргументов, и инвариантный объем взаимодействия можно записать в виде

$$d\Omega_{\text{int}}^{(N)} = d^4 x f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) = d^4 x \sqrt[2N]{g_1 \dots g_N} \hat{f}(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}),$$

где

$$\hat{f}(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}, \frac{1}{y_1^{(N)} y_2^{(N)} \dots y_{N-1}^{(N)}}\right).$$

Заметим, что в пределе совпадения $y_i^{(N)} = 1$ и $f(1, \dots, 1) = 1$.

Выберем инвариантный объем взаимодействия в конкретном виде суммы трех средних – среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического – с произвольными действительными коэффициентами α, β, γ . Тогда

$$d\Omega_{\text{int}}^{(N)} = d^D x \sqrt[2N]{g_1 \dots g_N} \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left[\frac{\alpha}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{(N)} + \beta + \gamma \frac{N}{\sum_{i=1}^N 1/y_i^{(N)}} \right], \quad (3)$$

где $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Из соображений простоты ограничимся этим естественным выражением (3) инвариантного объема взаимодействия в мультигравитации. Отметим, что в работе [20] был рассмотрен частный случай (3) при $\alpha = \gamma = 0$ и $\beta = 1$ для бигравитации (при $N = 2$).

3. ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим общий вид взаимодействия мультигравитации, которое описывается скалярным потенциалом $V(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$, заданным как функция от N метрик $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ в D -мерном пространстве-времени. Группа симметрии N вселенных является прямым произведением групп диффеоморфизмов [20]:

$$G_{\text{full}} = \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(i)}) \times \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(2)}) \times \dots \times \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(N)}),$$

где диффеоморфизм $\text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(i)})$ действует на метрику $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ вдоль вектора $\varepsilon_\mu^{(i)}(x)$. В силу известной теоремы [33] группа G_{full} может быть редуцирована к диагональной подгруппе, когда все векторы совпадают, $\varepsilon_\mu^{(i)}(x) = \varepsilon_\mu(x)$. Тогда инфинитезимальные преобразования любой метрики $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ определяются производной Ли:

$$\delta \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \mathcal{L}_\varepsilon \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \varepsilon^\rho \partial_\rho \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} + \mathbf{g}_{\mu\rho}^{(i)} \partial_\nu \varepsilon^\rho + \mathbf{g}_{\rho\nu}^{(i)} \partial_\mu \varepsilon^\rho.$$

Понятно, что скалярный потенциал взаимодействия должен выражаться через скалярные функции от метрик $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$. Естественно выбрать эти скалярные функции как инварианты тензора с одним ковариантным и одним контравариантным индексами, построенного из метрик $\mathbf{H}^\mu_\nu = \mathbf{H}^\mu_\nu(\mathbf{g}^{(i)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$. В этом случае собственные

значения матрицы $\hat{H}$, соответствующей тензору H^μ_ν , являются инвариантами относительно действия общих координатных преобразований $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$, поскольку

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} H^\mu_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} = \tilde{H}^\alpha_\beta.$$

Параметризуем матрицу $\hat{H}(g^{(i)}, \dots, g^{(N)})$, используя следующее замечание.

В большинстве физически интересных моделей [4] метрика имеет диагональную форму:

$$g_{\mu\nu}^{(i)} = \text{diag}(\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{D-1}^{(i)}), \quad (4)$$

где $\lambda_a^{(i)}$ – собственные значения i -й метрики. Следовательно, структура матрицы $\hat{H}(g^{(i)}, \dots, g^{(N)})$ может быть описана по аналогии со структурой инвариантного объема взаимодействия (построенного в разделе 2). А именно, построим N матриц $H_\nu^{(i)\mu}$ как следующее произведение диагональных метрик:

$$H_\nu^{(i)\mu} = g^{(i)\mu\alpha_1} g_{\alpha_1\rho_1}^{(i)} g^{(i)\rho_1\beta_1} g_{\beta_1\rho_2}^{(2)} \dots g^{(i)\rho_{j-1}\alpha_j} g_{\alpha_j\rho_j}^{(j)} g^{(i)\rho_j\beta_j} g_{\beta_j\rho_{j+1}}^{(j+1)} \dots \\ \dots g^{(i)\rho_{N-2}\alpha_{N-1}} g_{\alpha_{N-1}\rho_{N-1}}^{(N-1)} g^{(i)\rho_{N-1}\beta_{N-1}} g_{\beta_{N-1}\nu}^{(N)}.$$

Таким образом построенные матрицы $\hat{H}^{(i)}$ удовлетворяют тождеству

$$\hat{H}^{(1)} \hat{H}^{(2)} \dots \hat{H}^{(N)} = I, \quad (5)$$

где I – единичная матрица размера $D \times D$. В результате мы имеем $N-1$ независимых матриц $\hat{H}^{(i)}$. В случае бигравитации (при $N=2$) мы имеем две матрицы

$$H_\nu^{(1)\mu} = g^{(1)\mu\beta_1} g_{\beta_1\nu}^{(2)}, \quad H_\nu^{(2)\mu} = g^{(2)\mu\alpha_1} g_{\alpha_1\nu}^{(1)},$$

которые являются взаимно обратными, $\hat{H}^{(1)} \hat{H}^{(2)} = I$ (см. тождество (5)), поэтому достаточно рассматривать только одну из них (см., например, работу [20]). Исходя из этого целесообразно определить следующие N^2 матриц $\hat{p}^{(i,j)}$:

$$\hat{p}^{(i,j)\mu}_\nu = g^{(i)\mu\rho} g_{\rho\nu}^{(j)}, \quad (6)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, что матрицы $\hat{p}^{(i,j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\hat{p}^{(i,j)} \hat{p}^{(j,k)} = \hat{p}^{(i,k)}, \quad (7)$$

$$\hat{p}^{(i,j)} \hat{p}^{(j,i)} = \hat{p}^{(i,i)} = I. \quad (8)$$

Произведение (7) ассоциативно и обратимо (см. равенство (8)), но определено не для всех элементов, поэтому множество p -переменных является частичной группой [35]. Заметим, что существует $N(N-1)/2$ независимых p -матриц, которые коммутируют в случае диагональных метрик (4). В бигравитации (при $N=2$) имеем

$$\hat{H}^{(1)} = \hat{p}^{(1,2)}, \quad \hat{H}^{(2)} = \hat{p}^{(2,1)}.$$

Построим матрицы $\hat{H}^{(i)}$ из шести матриц $\hat{p}^{(i,j)}$ (три из которых независимы) для случая тернарной гравитации (при $N = 3$):

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(1)} &= \hat{p}^{(1,3)}\hat{p}^{(1,2)}, \\ \hat{H}^{(2)} &= \hat{p}^{(2,1)}\hat{p}^{(2,3)}, \\ \hat{H}^{(3)} &= \hat{p}^{(3,2)}\hat{p}^{(3,1)}.\end{aligned}$$

Матрицы $\hat{H}^{(i)}$ удовлетворяют тождеству

$$\hat{H}^{(1)}\hat{H}^{(2)}\hat{H}^{(3)} = I.$$

С учетом равенства (4) можно представить структуру собственных значений матриц $H_\nu^{(i)\mu}$, используя собственные значения метрик:

$$\hat{H}^{(i)} = \text{diag}\left(\frac{(\lambda_0^{(i)})^N}{R_0}, \frac{(\lambda_1^{(i)})^N}{R_1}, \dots, \frac{(\lambda_{D-1}^{(i)})^N}{R_{D-1}}\right), \quad (9)$$

где $R_a = \prod_{i=1}^N \lambda_a^{(i)}$. Тогда из (9) следует, что

$$\det \hat{H}^{(i)} = \frac{(\det g^{(i)})^N}{\prod_{j=1}^N \det g^{(j)}}, \quad (10)$$

и, очевидно, $\prod_{j=1}^N \det \hat{H}^{(j)} = 1$ (см. тождество (5)).

Отметим, что для метрики $g_{\mu\nu}^{(i)}$ с сигнатурой $(+, \overbrace{-, \dots, -}^{D-1})$ знаки собственных чисел определены так:

$$\lambda_0^{(i)} > 0, \quad \lambda_1^{(i)} < 0, \quad \dots, \quad \lambda_{D-1}^{(i)} < 0$$

(см., например, работу [4]). Учитывая соотношения (9) и (5), получаем, что все собственные значения матриц $\hat{H}^{(i)}$ являются положительными и ненулевыми. Это позволяет определить новые переменные

$$\mu_a^{(i)} = \ln \frac{(\lambda_a^{(i)})^N}{R_a}, \quad a = 0, 1, \dots, D-1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

которые удовлетворяют D тождествам

$$\sum_{i=1}^N \mu_a^{(i)} = 0, \quad a = 0, 1, \dots, D-1. \quad (12)$$

В результате число независимых μ -переменных есть $D(N-1)$. Таким образом, скалярный потенциал взаимодействия может быть выбран как гладкая функция от μ -переменных:

$$V(g^{(i)}, g^{(2)}, \dots, g^{(N)}) = \tilde{v}(\{\mu_a^{(i)}\}).$$

Следуя работе [20] (где рассматривался частный случай $N = 2$, $D = 4$), выбираем более удобный базис в виде симметричных полиномов

$$\sigma_k^{(i)} = \sum_{a=0}^{D-1} (\mu_a^{(i)})^k, \quad k = 1, \dots, D, \quad (13)$$

связанных между собой D соотношениями, вытекающими из тождеств (12). Таким образом, скалярный потенциал взаимодействия для мультигравитации можно записать в симметричном виде:

$$V(\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}) = v(\{\sigma_k^{(i)}\}), \quad k = 1, 2, \dots, D, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

где v – скалярная функция от $D(N-1)$ независимых полиномов $\sigma_k^{(i)}$.

Мы, естественно, предполагаем, что в случае плоских пространств взаимодействие отсутствует. Тогда имеем “граничное” условие

$$v(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (15)$$

Выразим скалярный потенциал взаимодействия (14) через комбинацию инвариантов матриц $\hat{\mathbf{H}}^{(i)}$ в явном виде. Из соотношений (10), (11) и (13) получаем

$$\sigma_k^{(i)} = \text{tr}(\ln \hat{\mathbf{H}}^{(i)})^k.$$

Параметризуем метрику следующим образом:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \eta_{\mu\nu} + \mathbf{h}_{\mu\nu}^{(i)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{h}_{\mu\nu}^{(i)}$ – некоторые возмущения над плоским фоном. Ограничиваясь квадратичными слагаемыми по возмущениям $\mathbf{h}_{\mu\nu}^{(i)}$, которые соответствуют массивному случаю и отсутствию самодействия, получаем для $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ следующие выражения:

$$\sigma_1^{(i)} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} [(h^{(i)} - h^{(j)}) - ((h_{\mu\nu}^{(i)})^2 - (h_{\mu\nu}^{(j)})^2)], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(i)} = & (N-1)^2 (h_{\mu\nu}^{(i)})^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} (h_{\mu\nu}^{(j)})^2 + \\ & + 2 \sum_{\substack{1 \leq k, j \leq N, \\ j \neq k, k \neq i, j \neq i}} h^{(j)\mu}{}_{\nu} h^{(k)\nu}{}_{\mu} - 2(N-1) h^{(i)\mu}{}_{\nu} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} h^{(j)\nu}{}_{\mu}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $h^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mu\nu}^{(i)} \eta^{\mu\nu}$ и $(h_{\mu\nu}^{(i)})^2 \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mu\nu}^{(i)} h^{(i)\mu\nu}$. Заметим, что $\sigma_k^{(i)} \sim O((h^{(i)})^k)$, следовательно, ограничиваясь квадратичными слагаемыми, мы можем не рассматривать выражения со степенями $k \geq 3$.

Итак, скалярный потенциал взаимодействия в мультигравитации в квадратичном приближении можно представить в виде

$$V(\mathbf{g}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N [a_i \sigma_1^{(i)} + b_i (\sigma_1^{(i)})^2 + c_i \sigma_2^{(i)}], \quad (19)$$

где a_i, b_i, c_i – произвольные действительные константы. Из формулы (17) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \sigma_1^{(i)} = 0,$$

что и должно вытекать из тождеств (12).

4. МОДЕЛЬ ПАУЛИ–ФИРЦА В БИГРАВИТАЦИИ

В качестве примера рассмотрим бигравитацию ($N = 2$) и получим из общих принципов модель Паули–Фирца. Так, вместо соотношений (17) и (18) имеем (с точностью до квадратичных слагаемых по возмущениям $h_{\mu\nu}^{(1)}, h_{\mu\nu}^{(2)}$)

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= -\sigma_1^{(2)} = h^{(1)} - h^{(2)} - ((h_{\mu\nu}^{(1)})^2 - (h_{\mu\nu}^{(2)})^2) \equiv \sigma_1, \\ \sigma_2^{(1)} &= \sigma_2^{(2)} = (h_{\mu\nu}^{(1)})^2 + (h_{\mu\nu}^{(2)})^2 - 2h^{(1)\mu}{}_{\nu} h^{(2)\nu}{}_{\mu} \equiv \sigma_2. \end{aligned}$$

Для скалярного потенциала взаимодействия сумма (19) принимает вид (с учетом условия (15))

$$V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}) = a\sigma_1 + b\sigma_1^2 + c\sigma_2, \quad (20)$$

где a, b, c – произвольные действительные константы размерности четвертой степени массы. Тогда полное действие для бигравитации запишется как

$$S_2 = -M_1^2 \int d^4x R_1 \sqrt{g_1} - M_2^2 \int d^4x R_2 \sqrt{g_2} + \int d\Omega_{\text{int}}^{(2)} V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}), \quad (21)$$

где $M_{1,2}$ – константы размерности массы и $d\Omega_{\text{int}}^{(2)}$ – инвариантный объем взаимодействия (2) для бигравитации, который в данном случае имеет вид

$$d\Omega_{\text{int}}^{(2)} = d^4x \sqrt[4]{g_1 g_2} \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right) + \beta + 2\gamma \left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right)^{-1} \right], \quad (22)$$

где α, β, γ – безразмерные параметры, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Заметим, что параметризация (16) равенства (22) приводит к выражению

$$d\Omega_{\text{int}}^{(2)} = d^4x \sqrt[4]{g_1 g_2} + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, квадратичные по возмущениям $h_{\mu\nu}^{(1)}$ и $h_{\mu\nu}^{(2)}$. Эти слагаемые не вносят вклада в (21), потому что мы ограничиваемся вторым порядком, а скалярный потенциал взаимодействия (20) не содержит слагаемых без $h_{\mu\nu}^{(1)}$ и $h_{\mu\nu}^{(2)}$. Используя разложение (16) и применяя его к действию (21), получаем

$$S_2 = \int d^4x (L_{\text{kin}} + L_{\text{int}}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_{\text{kin}} &= \frac{1}{4} M_1^2 [\partial^\rho h_{\mu\nu}^{(1)} \partial_\rho h^{(1)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(1)} \partial_\mu h^{(1)} + 2\partial_\mu h^{(1)\mu\nu} \partial_\nu h^{(1)} - 2\partial_\mu h^{(1)\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^{(1)\rho}] + \\
 &\quad + \frac{1}{4} M_2^2 [\partial^\rho h_{\mu\nu}^{(2)} \partial_\rho h^{(2)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(2)} \partial_\mu h^{(2)} + 2\partial_\mu h^{(2)\mu\nu} \partial_\nu h^{(2)} - 2\partial_\mu h^{(2)\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^{(2)\rho}], \\
 L_{\text{int}} &= a(h^{(1)} - h^{(2)})^2 + b(h_{\mu\nu}^{(1)} - h_{\mu\nu}^{(2)})(h^{(1)\mu\nu} - h^{(2)\mu\nu}) + \\
 &\quad + c(h_{\mu\nu}^{(2)} h^{(2)\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(1)} h^{(1)\mu\nu}) + \frac{c}{4} ((h^{(1)})^2 - (h^{(2)})^2).
 \end{aligned}$$

Далее, применим (3 + 1)-разложение [31] для полного действия (23). Отделим пространственные и временные компоненты в L_{int} , тогда

$$\begin{aligned}
 L_{\text{int}} &= a(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(1)} + h_{ii}^{(2)})^2 + b(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)})(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)}) - \\
 &\quad - 2b(h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)})(h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)}) + b(h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)})(h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)}) + \\
 &\quad + c(h_{00}^{(2)} h_{00}^{(2)} - 2h_{0i}^{(2)} h_{0i}^{(2)} + h_{ij}^{(2)} h_{ij}^{(2)} - h_{00}^{(1)} h_{00}^{(1)} + 2h_{0i}^{(1)} h_{0i}^{(1)} - h_{ij}^{(1)} h_{ij}^{(1)}) + \\
 &\quad + \frac{c}{4} ((h_{00}^{(1)} - h_{ii}^{(1)})^2 - (h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(2)})^2).
 \end{aligned}$$

Мы ограничимся рассмотрением только скалярного сектора, так как это является вполне достаточным для уничтожения духовых мод в спектре (для стандартной гравитации см. работу [31]). Запишем (3+1)-разложение с помощью параметризации

$$h_{00}^{(r)} = 2\varphi_r, \quad h_{0i}^{(r)} = \partial_i B_r, \quad h_{ij}^{(r)} = -2(\psi_r \delta_{ij} - \partial_i \partial_j E_r),$$

где φ_r , ψ_r , B_r , E_r – скалярные поля для возмущенной метрики $h_{\mu\nu}^{(r)}$, $r = 1, 2$. Из формулы (23) получаем для кинетического слагаемого и для слагаемого взаимодействия

$$\begin{aligned}
 L_{\text{kin}} &= M_1^2 [-2\psi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 6\dot{\psi}_1^2 - 4\varphi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k B_1 + 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k \dot{E}_1] + \\
 &\quad + M_2^2 [-2\psi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 6\dot{\psi}_2^2 - 4\varphi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k B_2 + 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k \dot{E}_2], \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\text{int}} &= a(2(\varphi_1 - \varphi_2) + 6(\psi_1 - \psi_2) - 2\Delta(E_1 - E_2))^2 + \\
 &\quad + b(4(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 2(B_1 - B_2)(\Delta B_1 - \Delta B_2) + 12(\psi_1 - \psi_2)^2 + 4(\Delta E_1 - \Delta E_2)^2 - \\
 &\quad - 8(\psi_1 - \psi_2)(\Delta E_1 - \Delta E_2)) + \\
 &\quad + c(4(\varphi_2^2 - \varphi_1^2) + 12(\psi_2^2 - \psi_1^2) + B_2 \Delta B_2 - B_1 \Delta B_1 + 4((\Delta E_2)^2 - (\Delta E_1)^2) + \\
 &\quad + 8(\psi_1 \Delta E_1 - \psi_2 \Delta E_2)) + c((\varphi_1 + 3\psi_1 - \Delta E_1)^2 - (\varphi_2 + 3\psi_2 - \Delta E_2)^2). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим часть полного лагранжиана, содержащую скалярные поля φ_1 , φ_2 :

$$\begin{aligned}
 L(\varphi) &= -4M_1^2 \varphi_1 \Delta \psi_1 - 4M_2^2 \varphi_2 \Delta \psi_2 + \varphi_1^2(4a + 4b - 3c) + \varphi_2^2(4a + 4b + 3c) + \\
 &\quad + \varphi_1(24a(\psi_1 - \psi_2) - 8a(\Delta E_1 - \Delta E_2) + 6c\psi_1 - 2c\Delta E_1) + \\
 &\quad + \varphi_2(-24a(\psi_1 - \psi_2) + 8a(\Delta E_1 - \Delta E_2) - 6c\psi_2 + 2c\Delta E_2) - 8\varphi_1 \varphi_2(a + b).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что при

$$4a + 4b - 3c = 0, \quad 4a + 4b + 3c = 0, \quad a + b = 0 \quad (26)$$

лагранжиан не содержит слагаемых, квадратичных по полям φ_1, φ_2 , т. е. скалярные поля являются нединамическими (подробности см. в работе [31]). Система (26) эквивалентна уравнениям

$$a + b = 0, \quad c = 0. \quad (27)$$

Отметим, что только при таких соотношениях параметров лагранжиан можно представить через разности соответствующих полей. Введем переменные

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad B = B_1 - B_2, \quad (28)$$

$$\psi = \psi_1 - \psi_2, \quad E = E_1 - E_2, \quad (29)$$

тогда лагранжиан взаимодействия (25) принимает вид

$$L_{\text{int}}^{(2)} = 4a \left[6\psi^2 + 6\varphi\psi - 2\varphi\Delta E - 4\psi\Delta E - \frac{1}{2}B\Delta B \right]. \quad (30)$$

Выражение (30) совпадает с массовым лагранжианом Паули–Фирца в $(3 + 1)$ -разложении стандартной гравитации [31]. Чтобы доказать эквивалентность бигравитаии (21) и теории Паули–Фирца, необходимо включить в рассмотрение также кинетическую часть. Отметим, что кинетическое слагаемое (24) можно представить через поля (28), (29) только с использованием уравнений движения. Для этого выпишем полный лагранжиан (24), (25) с учетом (28). Имеем

$$\begin{aligned} L_{\text{kin}}^{(2)} + L_{\text{int}}^{(2)} = & M_1^2 [-2\psi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 6\dot{\psi}_1^2 - 4\varphi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k B_1 + 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k \dot{E}_1] + \\ & + M_2^2 [-2\psi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 6\dot{\psi}_2^2 - 4\varphi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k B_2 + 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k \dot{E}_2] + \\ & + 24a(\psi_1 - \psi_2)^2 + 4a[6(\varphi_1 - \varphi_2)(\psi_1 - \psi_2) - 2(\varphi_1 - \varphi_2)\Delta(E_1 - E_2)] - \\ & - 16a(\psi_1 - \psi_2)\Delta(E_1 - E_2) - 2a(B_1 - B_2)\Delta(B_1 - B_2). \end{aligned} \quad (31)$$

Система уравнений Эйлера–Лагранжа по полям B_1, B_2 принимает вид

$$\begin{aligned} 4M_1^2 \Delta \dot{\psi}_1 + 4a(\Delta B_1 - \Delta B_2) &= 0, \\ 4M_2^2 \Delta \dot{\psi}_2 + 4a(\Delta B_2 - \Delta B_1) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где мы представили нужную нам часть лагранжиана как

$$L(B) = 4M_1^2 \partial_k \dot{\psi}_1 \partial_k B_1 + 4M_2^2 \partial_k \dot{\psi}_2 \partial_k B_2 + 2a(\partial_k B_1 - \partial_k B_2)(\partial_k B_1 - \partial_k B_2). \quad (33)$$

С учетом (28) система (32) переходит в

$$M_1^2 \Delta \dot{\psi}_1 = -a\Delta B, \quad M_2^2 \Delta \dot{\psi}_2 = a\Delta B, \quad (34)$$

откуда следует равенство

$$M_1^2 \psi_1 = -M_2^2 \psi_2. \quad (35)$$

Для поля ψ (см. определения (29)) получаем

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = \psi_1 + \frac{M_1^2}{M_2^2} \psi_1 = \frac{M_1^2 + M_2^2}{M_2^2} \psi_1 = -\frac{M_2^2}{M_1^2} \psi_2 - \psi_2 = -\frac{M_1^2 + M_2^2}{M_1^2} \psi_2.$$

Учитывая уравнения (34), имеем

$$B = \frac{M_1^2}{-a} \dot{\psi}_1 = \frac{M_1^2 M_2^2}{-a(M_1^2 + M_2^2)} \dot{\psi}.$$

Тогда часть лагранжиана $L(B)$ (33) принимает вид

$$L(B) = 2 \frac{M_1^4 M_2^4}{a(M_1^2 + M_2^2)^2} \dot{\psi} \Delta \dot{\psi}.$$

Варьирование выражения (31) по полям φ_1, φ_2 приводит к системе

$$\begin{aligned} -M_1^2 \Delta \psi_1 + 6a(\psi_1 - \psi_2) - 2a(\Delta E_1 - \Delta E_2) &= 0, \\ -M_2^2 \Delta \psi_2 - 6a(\psi_1 - \psi_2) + 2a(\Delta E_1 - \Delta E_2) &= 0, \end{aligned}$$

которая с учетом (29) и (35) эквивалентна уравнению

$$\Delta E = -\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)} \Delta \psi + 3\psi.$$

В результате часть лагранжиана, содержащую поля E_1, E_2 , можно переписать как

$$\begin{aligned} L(E) &= 4M_1^2 \dot{\psi}_1 \Delta \dot{E}_1 + 4M_2^2 \dot{\psi}_2 \Delta \dot{E}_2 - 8a\varphi \Delta E - 16a\psi \Delta E = \\ &= 4 \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} \dot{\psi} \left(-\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)} \Delta \dot{\psi} + 3\dot{\psi} \right) - \\ &\quad - 8a(\varphi + 2\psi) \left(-\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)} \Delta \psi + 3\psi \right). \end{aligned}$$

Оставшиеся слагаемые в кинетическом члене полного лагранжиана (31) также выразим через поле ψ :

$$\begin{aligned} L_k(\psi) &= -2M_1^2 \psi_1 \Delta \psi_1 - 2M_2^2 \psi_2 \Delta \psi_2 - \\ &\quad - 6M_1^2 \dot{\psi}_1^2 - 6M_2^2 \dot{\psi}_2^2 - 4M_1^2 \varphi_1 \Delta \psi_1 - 4M_2^2 \varphi_2 \Delta \psi_2 = \\ &= -2 \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} (\psi \Delta \psi + 3\dot{\psi}^2 + 2\varphi \Delta \psi). \end{aligned}$$

Полный лагранжиан (31) есть

$$\begin{aligned} L_{\text{kin}}^{(2)} + L_{\text{int}}^{(2)} &= L_k(\psi) + L(B) + L(E) + 24a\psi^2 + 24a\varphi\psi = \\ &= 6 \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} (\dot{\psi}^2 + \psi \Delta \psi) - 24a\psi^2. \end{aligned}$$

Представим постоянную a через новую постоянную m_g^2 :

$$a = \frac{1}{4} \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} m_g^2.$$

Тогда скалярный сектор бигравитации принимает вид

$$L = 6 \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} (\dot{\psi}^2 + \psi \Delta \psi - m_g^2 \psi^2) = 6 \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - m_g^2 \psi^2),$$

где m_g – масса гравитона. Тогда действие (21) с учетом условий (27) запишется как

$$S_g = -M_1^2 \int d^4x R_1 \sqrt{-g_1} - M_2^2 \int d^4x R_2 \sqrt{-g_2} - \frac{1}{4} \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} \int d^4x (g_1 g_2)^{1/4} (\sigma_2 - \sigma_1^2).$$

Отсюда следует, что только полное действие бигравитации приводит к теории Паули–Фирца. Отметим, что в работе [20] слагаемое взаимодействия было предложено на основе полуэвристических рассуждений, в то время как мы получили его в рамках квадратичного приближения, используя $(3+1)$ -разложение.

5. ВЫВОДЫ

Мы построили инвариантный объем взаимодействия мультигравитации в общем виде. Частный случай объема как суммы трех различных средних (в работе [20] рассматривалось только геометрическое среднее) был использован при анализе модели бигравитации. В рамках формализма $(3+1)$ -разложения мы строго доказали (в квадратичном приближении) эквивалентность полного лагранжиана бигравитации (с учетом кинетических слагаемых типа эйнштейновских) и массивной теории Паули–Фирца.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разложение $\sqrt{g}$ по малым возмущениям

При разложении $\sqrt{g}$ по малым возмущениям $h_{\mu\nu}$ стандартным образом используем выражение $\ln(\det g_{\mu\nu}) = \text{tr}(\ln g_{\mu\nu})$, из которого получаем

$$\sqrt{g} = \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}(\ln g_{\mu\nu})\right).$$

Над плоской фоновой метрикой $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ имеем

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\mu\alpha}h^{\mu\alpha} + \frac{1}{8}h^2 \quad (\text{П.1})$$

с точностью $O(h^2)$, где $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$.

Приведем метод вычисления разложения $\sqrt{g}$, который можно использовать для любой фоновой метрики $^{(0)}g_{\mu\nu}$. Общие формулы для разложения $\sqrt{g}$ с точностью до первого порядка приведены в работе [34], а с точностью до второго порядка – в работе [36]. Имеем

$$g_{\mu\nu} = ^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Отсюда (в случае $D = 4$) получаем

$$\det(^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (^{(0)}g_{0\alpha} + h_{0\alpha}) (^{(0)}g_{1\beta} + h_{1\beta}) (^{(0)}g_{2\rho} + h_{2\rho}) (^{(0)}g_{3\sigma} + h_{3\sigma}),$$

где $\varepsilon^{0123} = +1$. С точностью $O(h^2)$ имеем

$$\det(^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \det(^{(0)}g_{\mu\nu}) + h_{\mu\nu} K^{\mu\nu} (^{(0)}g) + h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} F^{\mu\nu\alpha\beta} (^{(0)}g),$$

где

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} = & \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (\delta_0^\mu \delta_\alpha^\nu (^{(0)}g_{1\beta} (^{(0)}g_{2\rho} (^{(0)}g_{3\sigma} + \delta_1^\mu \delta_\beta^\nu (^{(0)}g_{0\alpha} (^{(0)}g_{2\rho} (^{(0)}g_{3\sigma} + \\ & + \delta_2^\mu \delta_\rho^\nu (^{(0)}g_{0\alpha} (^{(0)}g_{1\beta} (^{(0)}g_{3\sigma} + \delta_3^\mu \delta_\sigma^\nu (^{(0)}g_{0\alpha} (^{(0)}g_{1\beta} (^{(0)}g_{2\rho})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\alpha\beta} = & \varepsilon^{\chi\omega\rho\sigma} (\delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_1^\alpha \delta_\omega^\beta \mathbf{g}_{2\rho}^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma}^{(0)} + \delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_2^\alpha \delta_\rho^\beta \mathbf{g}_{1\omega}^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma}^{(0)} + \\
& + \delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \mathbf{g}_{1\omega}^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho}^{(0)} + \delta_1^\mu \delta_\omega^\nu \delta_2^\alpha \delta_\rho^\beta \mathbf{g}_{0\chi}^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma}^{(0)} + \\
& + \delta_1^\mu \delta_\omega^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \mathbf{g}_{0\chi}^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho}^{(0)} + \delta_2^\mu \delta_\rho^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \mathbf{g}_{0\chi}^{(0)} \mathbf{g}_{1\omega}^{(0)}).
\end{aligned}$$

Общее выражение для разложения $\sqrt{g}$ принимает вид

$$\sqrt{g} = \sqrt{{}^{(0)}g} - \frac{\mathbf{h}_{\mu\nu} \mathbf{K}^{\mu\nu}({}^{(0)}\mathbf{g}) + \mathbf{h}_{\mu\nu} \mathbf{h}_{\alpha\beta} F^{\mu\nu\alpha\beta}({}^{(0)}\mathbf{g})}{2\sqrt{{}^{(0)}g}} - \frac{(\mathbf{h}_{\mu\nu} \mathbf{K}^{\mu\nu}({}^{(0)}\mathbf{g}))^2}{8\sqrt{{}^{(0)}g}^3}, \quad (\text{П.2})$$

где ${}^{(0)}g = |\det {}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}|$.

В статье рассматривается стандартный случай (разложение над плоской метрикой) ${}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, тогда выражения для ${}^{(0)}g$, $\mathbf{K}^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu\alpha\beta}$ переходят в

$$\det({}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}) = {}^{(0)}g = -1, \quad \mathbf{K}^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}),$$

и мы имеем для (П.2)

$$\sqrt{g} = 1 - \frac{-h + \mathbf{h}_{\mu\nu} \mathbf{h}_{\alpha\beta} (\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})/2}{2} - \frac{(-h)^2}{8} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}\mathbf{h}_{\mu\nu}\mathbf{h}^{\mu\nu} + \frac{1}{8}h^2.$$

Важным является тот факт, что это выражение совпадает с (П.1).

Список литературы

- [1] P. D. Mannheim, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **56**:2 (2006), 340–445.
- [2] H. F. M. Goenner, *Living Rev. Relativ.*, **7** (2004), 2004-2, 152 pp.
- [3] С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
- [4] Р. М. Уолд, *Общая теория относительности*, РУДН, М., 2008.
- [5] C. J. Isham, A. Salam, J. Strathdee, *Phys. Rev. D*, **3**:4 (1971), 867–873.
- [6] P. C. Aichelburg, R. Mansouri, H. K. Urbantke, *Phys. Rev. Lett.*, **27**:22 (1971), 1533–1534.
- [7] P. C. Aichelburg, *Phys. Rev. D*, **8**:2 (1973), 377–384.
- [8] I. I. Kogan, G. G. Ross, *Phys. Lett. B*, **485**:1–3 (2000), 255–262.
- [9] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou, G. G. Ross, *Nucl. Phys. B*, **595**:1–2 (2001), 225–249.
- [10] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou, *Phys. Lett. B*, **501**:1–2 (2001), 140–149.
- [11] C. Deffayet, J. Mourad, *Phys. Lett. B*, **589**:1–2 (2004), 48–58.
- [12] C. Deffayet, J. Mourad, *Int. J. Theor. Phys.*, **43**:3 (2004), 855–864.
- [13] R. Garattini, *J. Phys. A*, **40**:25 (2007), 7055–7060.
- [14] D. Blas, *AIP Conf. Proc.*, **841** (2006), 397–401.
- [15] S. Hannestad, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:08–09 (2006), 1938–1949, arXiv: astro-ph/0509320.
- [16] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, *Grav. Cosmol.*, **12**:2–3 (2006), 159–162.
- [17] S. L. Dubovsky, P. G. Tinyakov, I. I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:18 (2005), 181102, 4 pp.
- [18] T. Damour, I. I. Kogan, A. Papazoglou, *Phys. Rev. D*, **66**:10 (2002), 104025, 25 pp.
- [19] C. Deffayet, G. Dvali, G. Gabadadze, *Phys. Rev. D*, **65**:4 (2002), 044023, 9 pp.
- [20] T. Damour, I. I. Kogan, *Phys. Rev. D*, **66**:10 (2002), 104024, 17 pp.
- [21] C. de Rham, G. Gabadadze, *Phys. Rev. D*, **82**:4 (2010), 044020, 9 pp.
- [22] D. G. Boulware, S. Deser, *Phys. Rev. D*, **6**:12 (1972), 3368–3382.

- [23] K. Koyama, G. Niz, G. Tasinato, *Phys. Rev D*, **84**:6 (2011), 064033, 13 pp.
- [24] C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley, *JHEP*, **11** (2011), 093, 35 pp.
- [25] A. H. Chamseddine, V. Mukhanov, *JHEP*, **08** (2011), 091, 7 pp.
- [26] S. F. Hassan, R. A. Rosen, *Phys. Rev. Lett.*, **108**:4 (2012), 041101, 4 pp.
- [27] В. И. Захаров, *Письма в ЖЭТФ*, **12**:9, 447–449.
- [28] H. van Dam, M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **22**:2 (1970), 397–411.
- [29] A. I. Vainshtein, *Phys. Lett. B*, **39**:3 (1972), 393–394.
- [30] E. Babichev, C. Deffayet, R. Ziour, *Phys. Rev. D*, **82**:10 (2010), 104008, 27 pp.
- [31] В. А. Рубаков, П. Г. Тиняков, *УФН*, **178**:8 (2008), 785–822.
- [32] K. Hinterbichler, *Rev. Modern Phys.*, **84**:2 (2012), 671–710.
- [33] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri, M. Henneaux, *Nucl. Phys. B*, **597**:1–3 (2001), 127–171.
- [34] S. A. Duplij, A. T. Kotvytskiy, *J. Kharkiv Univ. Ser. Nuclei, Particles, Fields*, **784**:4(36) (2007), 61–66.
- [35] R. Hermann, *Quantum, Fermion Differential Geometry*, Math. Sci. Press, Brookline, 1994.
- [36] A. T. Kotvytskiy, D. V. Kruchkov, *Acta Polytechnica*, **51**:4 (2011), 54–58.

Поступила в редакцию 26.02.2013,
после доработки 21.05.2013