Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Б. Манукян, Соотношение неопределенностей для квантовых систем с произвольно большим числом частиц и скорость расширения материи в балке, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 2, 290–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:30:25

© 2014 г.

Э. Б. Манукян*

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ И СКОРОСТЬ РАСШИРЕНИЯ МАТЕРИИ В БАЛКЕ

Соотношение неопределенностей для произведения числа частиц N и времени жизни T , где последнее рассматривается как мера того, как система сопротивляется изменениям, строго выводится для любой квантовой системы с произвольно большим N , для которой нижний край спектра имеет ненулевую ширину и ограничен снизу величиной N . Полученное неравенство можно применять при исследовании нетривиальной проблемы скорости расширения материи в балке как функции числа электронов при больших N . Решение этой задачи получено на основе наблюдения, что сопротивление увеличению скорости расширения можно определить в рамках квантовой механики в терминах времени жизни при таком увеличении. Показано, что достаточное условие ненулевого времени жизни материи при увеличении скорости расширения состоит в том, что нижний край спектра соответствует нижнему краю энергетической зоны, для которой применение полученного соотношения неопределенностей делается очевидным. Кроме того, показано, что если скорость расширения возрастает с ростом радиуса R , то при больших R время жизни убывает не быстрее, чем $1/R^3$. Для полноты и последовательности анализа рассмотрен также формальный предел нулевой ширины. Поскольку полученное соотношение неопределенностей является универсальным, можно ожидать, что оно будет иметь и другие приложения.

Ключевые слова: соотношение неопределенностей, квантовые системы с произвольно большим числом частиц, скорость расширения материи в балке, время жизни при увеличении скорости расширения.

DOI: 10.4213/tmf8527

Для любой квантовой системы с произвольно большим числом частиц N , нижний край спектра которой ограничен снизу величиной N и соответствует нижнему краю энергетической зоны, мы строго выводим соотношение неопределенностей для произведения N и времени жизни системы T , которое рассматривается в качестве меры того, как система сопротивляется всяким изменениям своего начального состояния.

*The Institute for Fundamental Study, Naresuan University, Phitsanulok, Thailand.
E-mail: manoukian_eb@hotmail.com

Соответствующее неравенство далее применяется для исследования ключевой проблемы скорости расширения материи. Фундаментальное свойство материи состоит в том, что она расширяется как функция N и увеличивается в размере, и этот факт можно строго выразить количественно с помощью утверждения, что для ненулевой вероятности наличия электронов внутри сферы радиуса R при больших N [1] этот радиус растет не медленнее, чем $N^{1/3}$. Это нетрудно видеть из явного неравенства, приведенного ниже. Таким образом, не удивительно, что материя занимает такой большой объем. Здесь стоит вспомнить знаменитое историческое высказывание Эренфеста [2], [3] о материи, с которым он обратился к Паули в 1931 г. по случаю присуждения ему медали Лоренца за открытие этого эффекта: *“Возьмем кусок металла или камешек. При размышлении об этом нас изумляет, что такое количество материи вынуждено занимать такой большой объем”*. После чего он заявил, что причиной этого является принцип Паули: *“Ответ: только благодаря принципу Паули – два электрона не могут находиться в одном состоянии”*.

В равной мере интересно исследовать скорость расширения материи и выяснить, замедляется ли оно или протекает быстрее. Косвенный способ исследовать это состоит в том, чтобы изучить возможное сопротивление материи при любых изменениях скорости расширения, а затем посмотреть, убывает или возрастает это сопротивление при расширении. В квантовой физике сопротивление изменению состояния можно определить в терминах времени жизни T . Имея это в виду, покажем, что достаточное условие ненулевого времени жизни материи при увеличении скорости расширения состоит в том, чтобы нижний край спектра гамильтониана рассматриваемой системы являлся нижним краем ненулевой энергетической зоны, а затем установим, в частности, что если скорость расширения увеличивается с ростом R при больших R , то время жизни с необходимостью убывает не быстрее чем $1/R^3$.

Мы применяем полученное соотношение неопределенностей к весьма нетривиальной квантовой системе с гамильтонианом материи в балке с N электронами вида

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_j|} + \sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}, \quad (1)$$

где m – масса электрона, а $\vec{x}_i$ и $\vec{R}_j$ – координаты электронов и ядер соответственно. Рассмотрим также нейтральную материю, для которой $\sum_{j=1}^k Z_j = N$. Несомненно, одной из наиболее важных и серьезных проблем, решенных квантовой физикой, является проблема устойчивости материи. Принцип Паули оказывается не только достаточным, но и необходимым для устойчивости. Ранние исследования устойчивости материи восходят к классическим работам Дайсона и Ленарда [3], [4], а более недавние – к работам Лейба и Тиринга [5], [6]. Фундаментальное свойство материи состоит в том, что нижний край спектра $E_N \sim N$, соответствующий приведенному выше гамильтониану, содержит N в единственной степени, в отличие от материи, на которую не налагается принципа Паули, – так называемой “бозонной материи”, для которой $E_N \sim N^\alpha$, где $\alpha > 1$ [3], [7]–[12]. Из такого степенного поведения при $\alpha > 1$, в отличие от обыкновенной материи, следует неустойчивость¹⁾, которая заключается в том, что образование одной системы, состоящей из $2N + 2N$ частиц, является

¹⁾ Педагогическая трактовка проблемы устойчивости материи приведена, например, в работе [12].

предпочтительным по сравнению с образованием двух отдельных систем, сведенных вместе, каждая из которых состоит из $N + N$ частиц, а энергия, выделяемая при слиянии двух систем в одну, пропорциональная $(2N)^\alpha - 2N^\alpha$, будет подавляюще большой при больших N , например при $N \sim 10^{23}$.

Элементарное свойство, выведенное подробно в работе [1], которое следует из гамильтониана (1) и которое легко интерпретируется физически, состоит в том, что вероятность нахождения N электронов в пределах радиуса R , $\text{Prob}[|\vec{x}_1| \leq R, \dots, |\vec{x}_N| \leq R]$, удовлетворяет простому неравенству:

$$\text{Prob}[|\vec{x}_1| \leq R, \dots, |\vec{x}_N| \leq R] \left(\frac{N}{v_R} \right)^{2/5} < \left(\frac{1}{a_0^3} \right)^{2/5} 1.846 [1 + Z^{2/3}]^{6/5}, \quad (2)$$

где $a_0 = 1/me^2$, $v_R = 4\pi R^3/3$, а $Z = \max_j Z_j$, причем $|e|Z_j$ – заряд j -го ядра в материи ($\hbar = 1$). Отметим здесь, что при ненулевой вероятности нахождения электронов внутри сферы радиуса R соответствующий объем v_R увеличивается при $N \rightarrow \infty$ никак не медленнее, чем первая степень N , поскольку в противном случае левая часть неравенства (2) стремилась бы к бесконечности, что противоречит наличию конечной верхней границы правой части.

Чтобы вывести обсуждаемое соотношение неопределенностей, обозначим через $-c_N N$ нижний край спектра, где $c_N < c$ – конечная положительная константа, при всех больших N . Покажем, что достаточное условие ненулевого времени жизни материи, т. е. ее сопротивления изменению скорости расширения с ростом N , заключается в том, что нижний край спектра является нижним краем энергетической зоны $(-c_N, [-c_N + \Delta_N])N$, где $\Delta_N \leq \Delta$ при больших N . Соответственно, можно рассмотреть масштабированный гамильтониан H/N и описать нижний край спектра посредством состояния следующим образом:

$$|\psi\rangle = \int_0^\infty d\rho \chi_{\Delta_N}(\rho) \delta([H/N + c_N] - \rho) |\psi\rangle, \quad (3)$$

где $\chi_{\Delta_N}(\rho)$ равно единице при ρ , лежащем в интервале $(0, \Delta_N)$, и равно нулю в других случаях. Умножая это уравнение на $\langle\psi|$ и используя нормируемость состояния $|\psi\rangle$, получаем

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \chi_{\Delta_N}(\rho) F(\rho) = 1, \quad (4)$$

$$F(\rho) = 2\pi \langle\psi|\delta([H/N + c_N] - \rho)|\psi\rangle. \quad (5)$$

Состояние $|\psi\rangle$ развивается во времени следующим образом:

$$|\psi_t\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle = \int_0^\infty d\rho \chi_{\Delta_N}(\rho) e^{-i(-c_N + \rho)Nt} \delta([H/N + c_N] - \rho) |\psi\rangle, \quad (6)$$

$$\langle\psi|\psi_t\rangle = \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} e^{-i(-c_N + \rho)Nt} \chi_{\Delta_N}(\rho) F_N(\rho), \quad (7)$$

где $|\langle\psi|\psi_t\rangle|^2$ – вероятность того, что система в момент времени t находится в своем начальном состоянии, и эта величина называется *вероятностью выживания*. Время жизни определяется как

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dt |\langle\psi|\psi_t\rangle|^2 = \frac{1}{2N} \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \chi_{\Delta_N}(\rho) |F_N(\rho)|^2. \quad (8)$$

С другой стороны, используя неравенство Шварца, из (4) получаем

$$1 = \left| \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \chi_{\Delta_N}(\rho) F(\rho) \right|^2 \leq \left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \chi_{\Delta_N}(\rho) \right) \left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \chi_{\Delta_N}(\rho) |F_N(\rho)|^2 \right). \quad (9)$$

Тогда из (8) получаем основное неравенство:

$$1 \leq \frac{1}{\pi} NT \Delta_N \leq \frac{1}{\pi} NT \Delta, \quad (10)$$

или

$$\frac{\pi}{T \Delta} \leq N. \quad (11)$$

Выражая N в терминах T в левой части (2), из (11) получаем

$$\text{Prob}[|\vec{x}_1| \leq R, \dots, |\vec{x}_N| \leq R] \left(\frac{1}{v_R T} \right)^{2/5} < \left(\frac{\Delta}{\pi a_0^3} \right)^{2/5} 1.846 [1 + Z^{2/3}]^{6/5}, \quad (12)$$

где левая часть представляет собой нижнюю границу левой части (2) с точностью до члена $(\Delta/\pi)^{2/5}$, появляющегося в правой части неравенства (12).

Эта формула представляет интерес с различных точек зрения. Неравенство не запрещает постоянства или увеличения времени жизни T с ростом R при больших R , т.е. постоянства или уменьшения скорости расширения материи. Это показывает, однако, что если скорость расширения увеличивается с ростом R , то при больших R время жизни убывает не быстрее чем $1/R^3$, при $R \rightarrow \infty$, поскольку в противном случае левая часть неравенства (12) стремилась бы к бесконечности, что противоречит тому, что его правая часть при ненулевой вероятности имеет конечную верхнюю границу. Наконец, из соотношений (10)–(12) мы также выводим ожидаемый квантово-механический результат в формальном пределе нулевой ширины $\Delta_N \equiv \Delta \rightarrow 0$, поскольку согласно этим соотношениям мы должны одновременно получить $T \rightarrow \infty$, что соответствует изолированному связанному состоянию, без изменений в соответствующем состоянии (с точностью до фазового множителя), что согласуется с нашим анализом.

Поскольку полученное соотношение неопределенностей является универсальным, можно ожидать, что оно применимо и к другим задачам. Такие дополнительные применения, а также трактовки “бозонной материи” требуют некоторых специальных средств и будут рассмотрены в отдельной работе.

Благодарности. Автор благодарит своих коллег из Institute for Fundamental Study за интерес, который они проявили к настоящей работе.

Список литературы

- [1] E. B. Manoukian, S. Sirinilakul, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:19 (2005), 190402, 3 pp.
- [2] P. Ehrenfest, “Ansprache zur Verleihung der Lorentz-Medaille an Professor Wolfgang Pauli am 31 Oktober 1931”, *Paul Ehrenfest: Collected Scientific Papers*, ed. M. J. Klein, North-Holland, Amsterdam, 1959, 617.
- [3] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **8**:8 (1967), 1538–1545.
- [4] J. F. Dyson, A. Lenard, *J. Math. Phys.*, **8**:3 (1967), 423–434.
- [5] A. Lenard, F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **9**:5 (1968), 698–711.

- [6] E. Lieb, W. E. Thirring, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:11 (1975), 687–689; **35**:16 (1975), 1116–1116.
- [7] E. H. Lieb, *The Stability of Matter: From Atoms to Stars.*, Selecta of E. H. Lieb, ed. W. Thirring, Springer, New York, 1991.
- [8] E. B. Manoukian, C. Muthaporn, *Progr. Theor. Phys.*, **110**:2 (2003), 385–391.
- [9] C. Muthaporn, E. B. Manoukian, *Phys. Lett. A*, **321**:3 (2004), 152–154.
- [10] E. B. Manoukian, S. Sirininlakul, *Phys. Lett. A*, **332**:1–2 (2004), 54–59.
- [11] E. B. Manoukian, C. Muthaporn, S. Sirininlakul, *Phys. Lett. A*, **352**:6 (2006), 488–490.
- [12] E. B. Manoukian, *Quantum Theory: A Wide Spectrum*, Springer, Amsterdam, 2006.

Поступила в редакцию 8.03.2013,
после доработки 31.05.2013